Тема: Векторное и смешанное произведение векторов

РЕНЕ ДЕКАРТ

Французский математик и философ

1596-1650

ПЬЕР ФЕРМА

Французский юрист и математик 1601-1665

К. Ф. ГАУСС

Немецкий физик и математик 1777-1855

Н.И. ЛОБАЧЕВСКИЙ

Великий
русский
математик
(1792-1856)

Типы величин

скалярные

- длина
- масса
- температура
- плотность
- и т.д.

векторные

- перемещение
- скорость
- сила
- ускорение
- и т.д.

Векторная величина определяется числовым значением и направлением

Геометрической абстракцией векторной величины

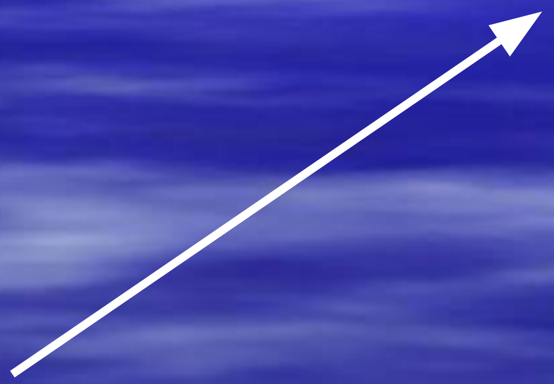
есть вектор – направленный отрезок прямой.

Чтобы задать вектор

необходимо указать

направление

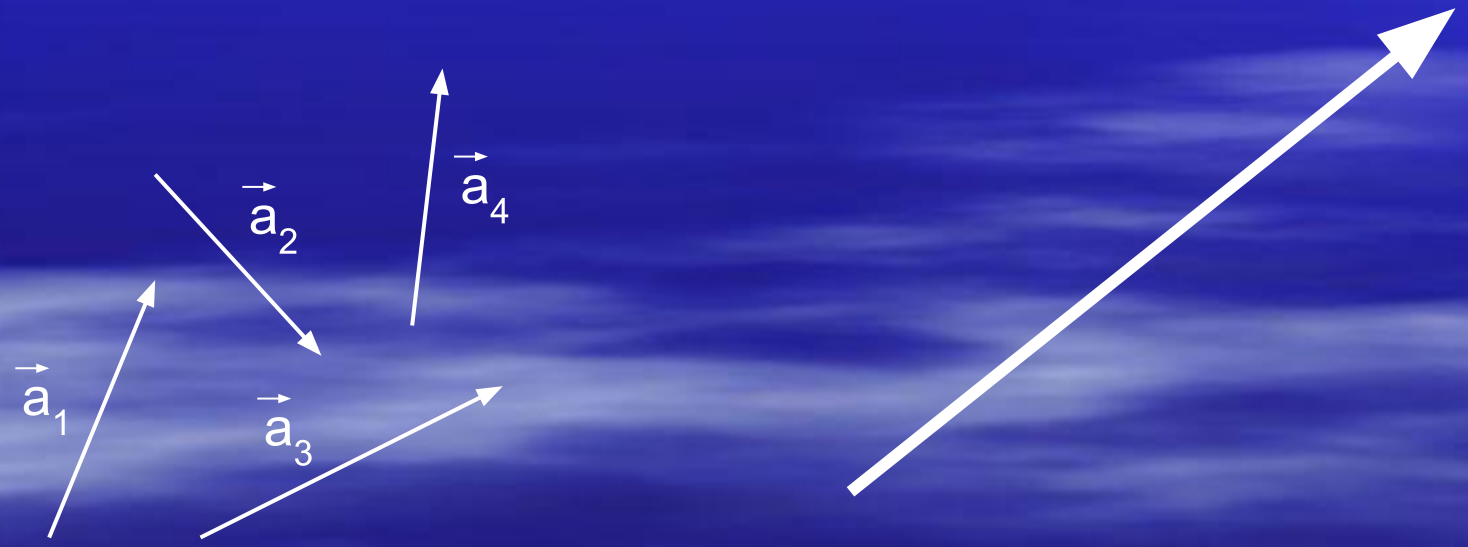
длину



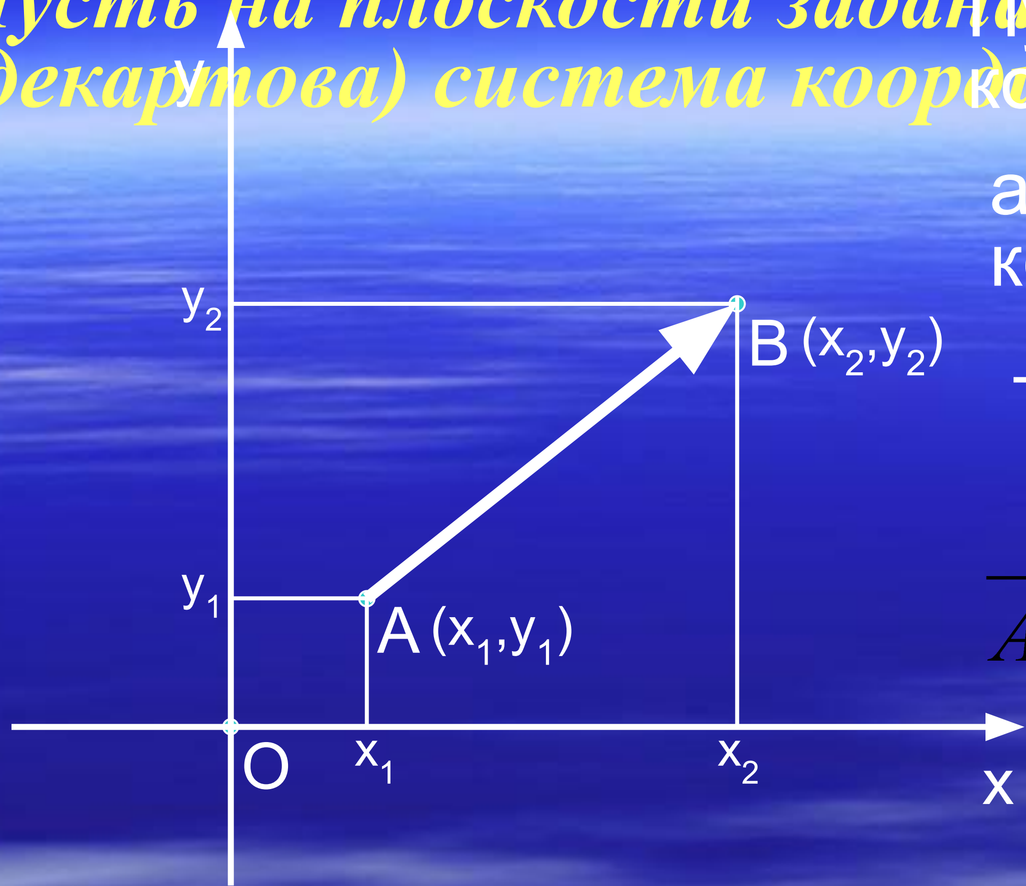
Действия с векторами

- Сложение векторов

Определение: Суммой векторов называется вектор, замыкающий ломаную, построенную из данных векторов таким образом, что конец предыдущего вектора является началом последующего



Пусть на плоскости задана прямоугольная (декартова) система координат



Пусть точка А имеет координаты (x_1, y_1),

а точка В имеет координаты (x_2, y_2)

тогда вектор $\overrightarrow{AB}$

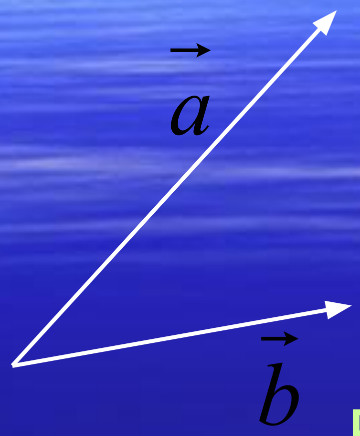
имеет координаты

$$\overrightarrow{AB} = \left(x_2 - x_1, y_2 - y_1\right)$$

а его длина вычисляется по формуле

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2}$$

Скалярное произведение векторов



$$\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right) = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)$$

Из скалярного произведения находят угол между векторами

$$\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \frac{\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}$$

Если вектора заданы своими координатами

$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ $\quad$ $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ тогда

$$\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

$$\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

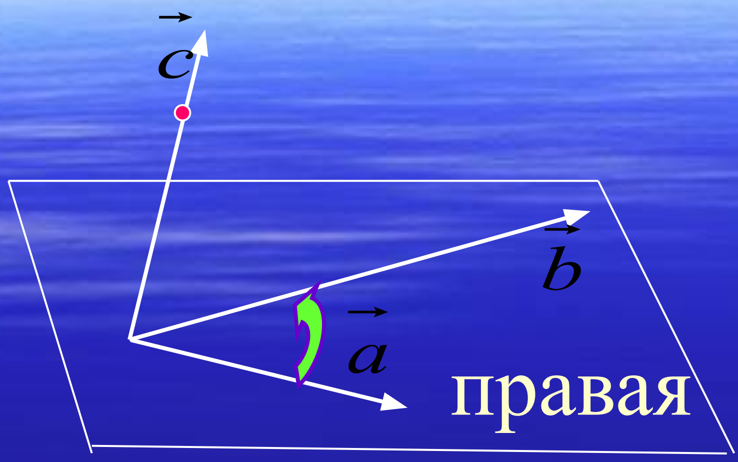
Скалярное произведение векторов в теоретической механике

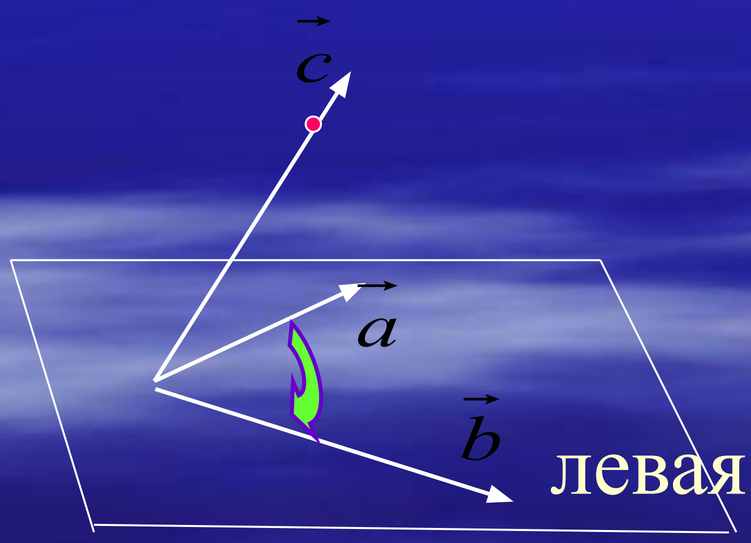
Работа A силы $\vec{F}$, произведенная этой силой при перемещении тела на пути $|s|$, определяемом вектором s, вычисляется по формуле

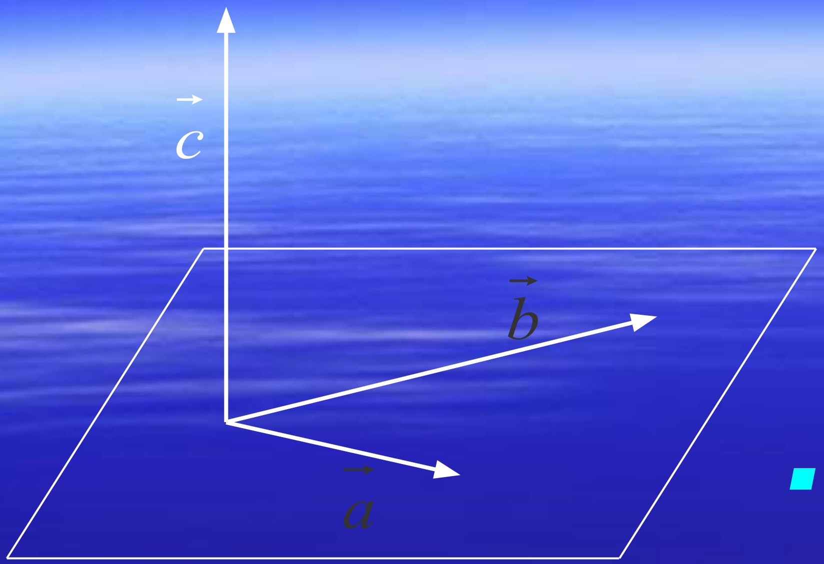
$$A = F \cdot s = |F||s|\cos(F, s)$$

Три вектора ***a,b,c***, будем называть упорядоченной тройкой, если указан порядок следования

Определение. Тройка некомпланарных векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется правой (левой), если после приведения к общему началу, кратчайший поворот от ***a*** к ***b*** из точек вектора ***c*** кажется совершающимся против часовой стрелки (по часовой стрелке).







Определение. Вектор ***c*** называется **векторным произведением** векторов ***a*** и ***b***, если:

- $|\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}| \sin\varphi$,

где φ – угол между ***a*** и ***b***.

- $\boldsymbol{c} \perp \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c} \perp \boldsymbol{b}$
- тройка векторов ***abc*** правая.

Теорема. /геометрический смысл векторного произведения/

*Длина векторного произведения равняется площади S параллелограмма, построенного на приведенных к общему началу векторах **a** и **b**.*

ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ В КООРДИНАТНОЙ ФОРМЕ

Пусть вектора заданы своими координатами

$\vec{a}=(x_1, y_1, z_1)$

$\vec{b}=(x_2, y_2, z_2)$

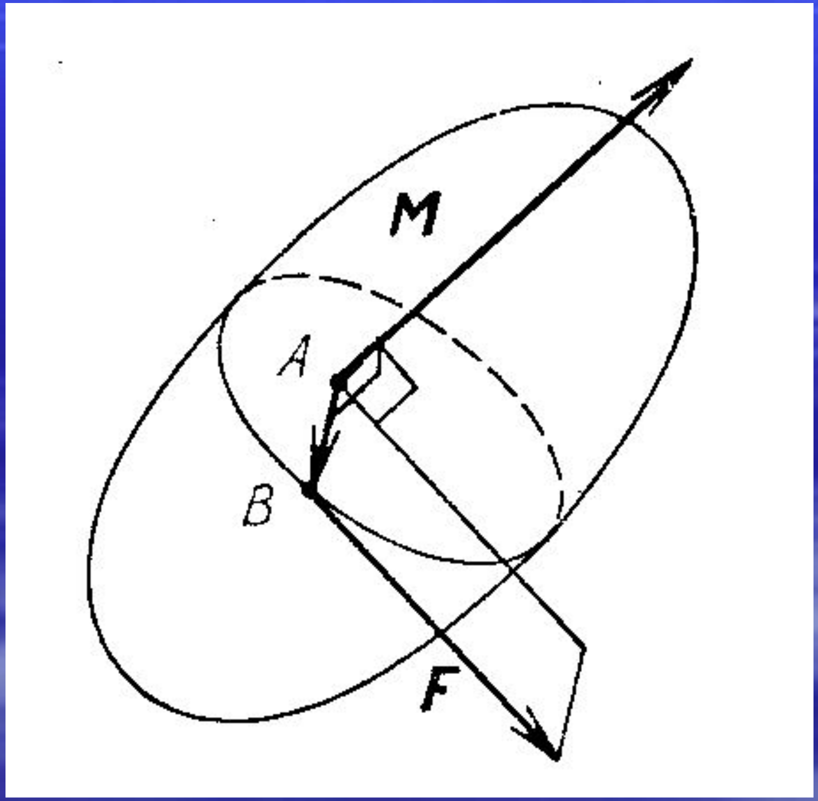
тогда координаты векторного произведения вычисляются по формуле

$$\vec{c} = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right)$$

Векторное произведение векторов в теоретической механике

С помощью векторного произведения можно вычислить вращающий момент М силы F, приложенной к точке В тела, закрепленного в точке А:

$$\vec{M} = \vec{AB} \times \vec{F}$$



Смешанное произведение векторов

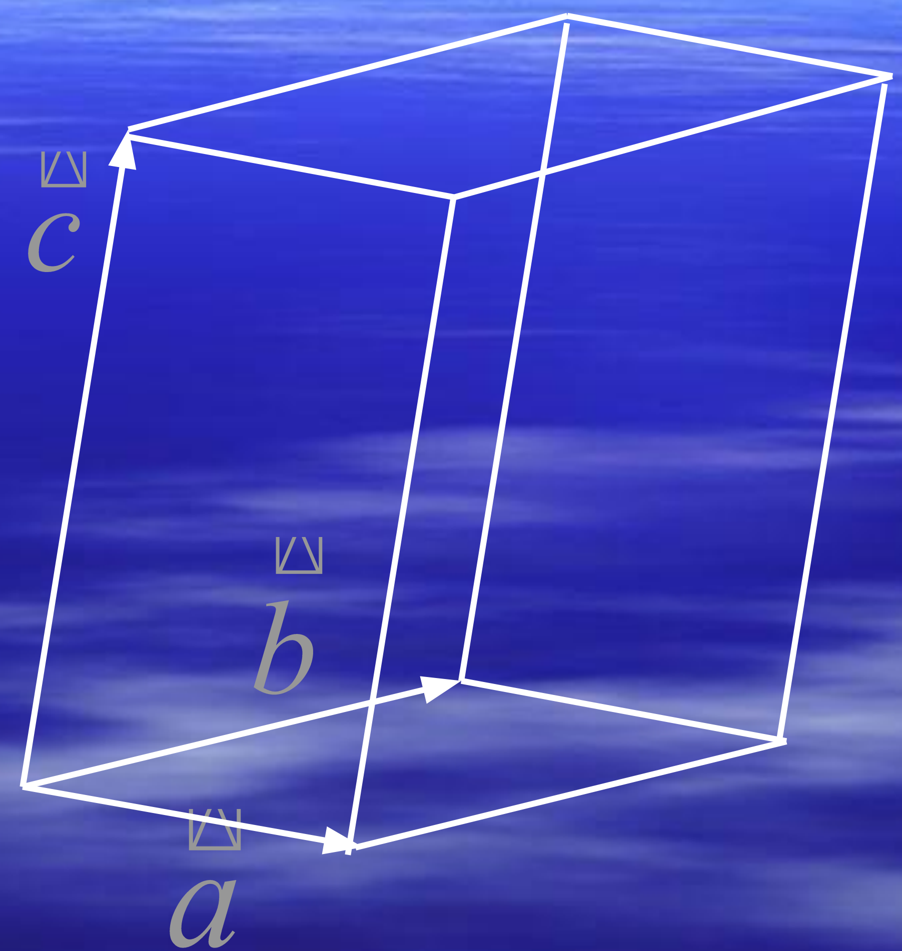
Определение

Пусть даны три вектора ***a, b, c.*** Если вектор ***a*** векторно умножить на вектор ***b***, а затем получившийся при этом вектор скалярно умножить на вектор ***c***, то в результате получается число, которое называется смешанным произведением векторов ***a, b, c***

Обозначение $\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\vec{c}$

Теорема (геометрический смысл смешанного произведения)

Смешанное произведение равно объему параллелепипеда, построенного на приведенных к общему началу векторах **a, b, c**



Замечание

Если три вектора лежат в одной плоскости, то их смешанное произведение равно нулю

СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ В КООРДИНАТНОЙ ФОРМЕ

Если три вектора определены своими декартовыми координатами

$$\vec{a}=(x_1,y_1,z_1) \qquad \vec{b}=(x_2,y_2,z_2) \qquad \vec{c}=(x_2,y_2,z_2)$$

то смешанное произведение равняется определителю, строки которого соответственно равны координатам перемножаемых векторов

$$[\vec{a},\vec{b}]\vec{c}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

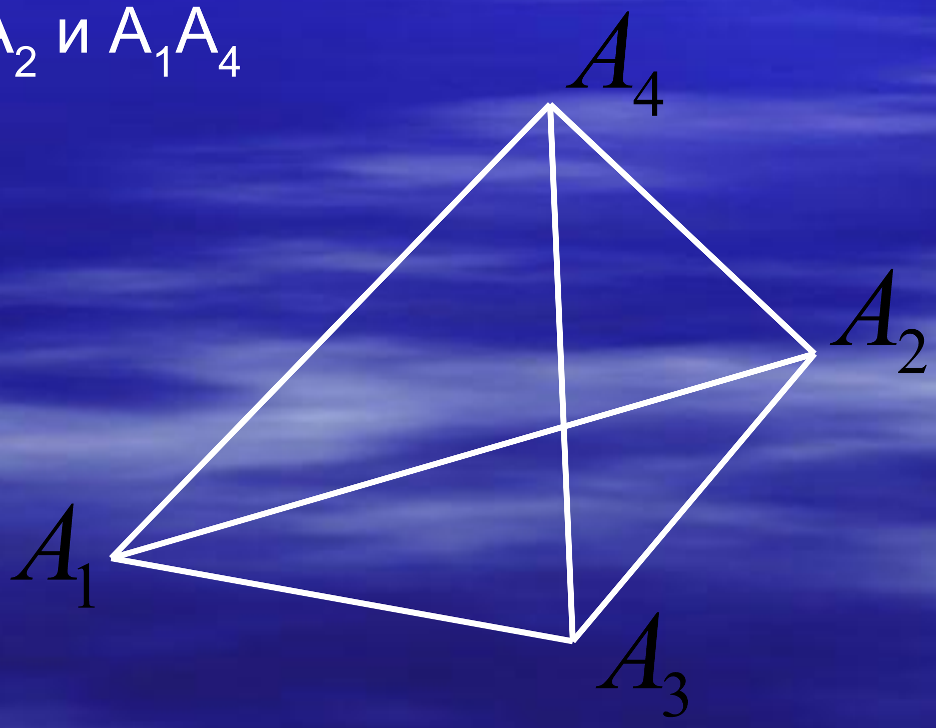
ЗАДАЧА № 1

Даны координаты вершин пирамиды

$$A_1(1;-1;6),\ A_2(4;5;-2),\ A_3(-1;3;0),\ A_4(6;1;5)$$

Методами векторной алгебры определить

- Угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4
- Площадь грани $A_1A_2A_3$
- Объем пирамиды



ЗАДАЧА № 2

Вычислить координаты вращающего момента *M* силы *F(3,2,1)*, приложенной к точке *A (-1,2,4)*, относительно начала координат *O*

ЗАДАЧА № 3

Вычислить работу равнодействующей F сил $F_1=(3,-4,5)$, $F_2=(2,1,-4)$, $F_3=(-1,6,2)$, приложенных к материальной точке, которая под их действием перемещается прямолинейно из точки $M_1(4,2,-3)$ в точку $M_2(7,4,1)$