

# Тема: Векторное и смешанное произведение векторов

# РЕНЕ ДЕКАРТ

Французский  
математик и  
философ  
1596-1650



# ПЬЕР ФЕРМА

Французский  
юрист и  
математик  
1601-1665



# К. Ф. ГАУСС

Немецкий  
физик и  
математик  
1777-1855



# Н.И. ЛОБАЧЕВСКИЙ

Великий  
русский  
математик  
(1792-1856)



# Типы величин

## скалярные

- перемещение
- скорость
- сила
- ускорение
- и т.д.

- длина
- масса
- температура
- плотность
- и т.д.

## векторные

# Векторная величина определяется числовым значением и направлением

Геометрической абстракцией векторной величины  
есть вектор – направленный отрезок прямой.

**Чтобы задать вектор**

**необходимо указать**  
*направление*

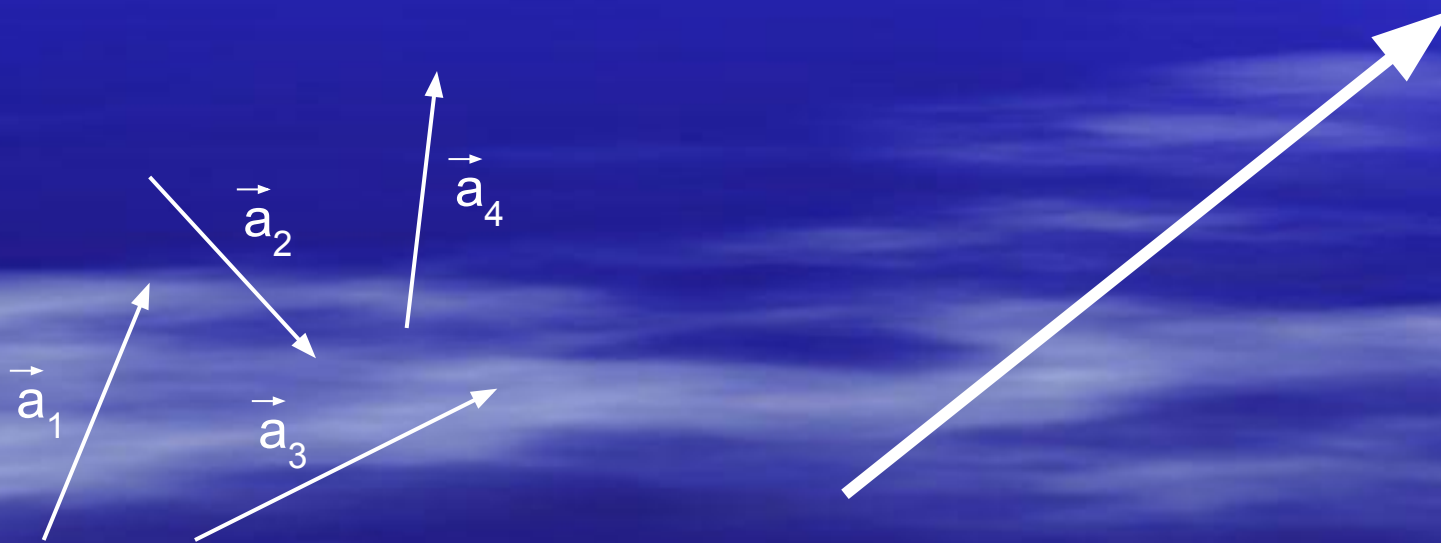
*длину*



# Действия с векторами

- Сложение векторов

*Определение:* Суммой векторов называется вектор, замыкающий ломаную, построенную из данных векторов таким образом, что конец предыдущего вектора является началом последующего



Пусть на плоскости задана прямоугольная (декартова) система координат. Пусть точка А имеет координаты  $(x_1, y_1)$ ,



а точка В имеет координаты  $(x_2, y_2)$

тогда вектор  $\vec{AB}$

имеет координаты

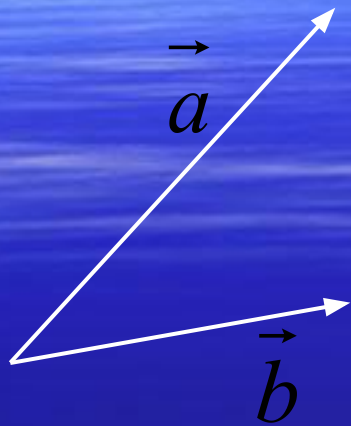
$$\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

а его длина вычисляется по формуле

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



# Скалярное произведение векторов



$$\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$$

Из скалярного произведения находят угол между векторами

Если вектора заданы своими координатами

$$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1) \quad \vec{b} = (x_2, y_2, z_2) \quad \text{тогда}$$

$$\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

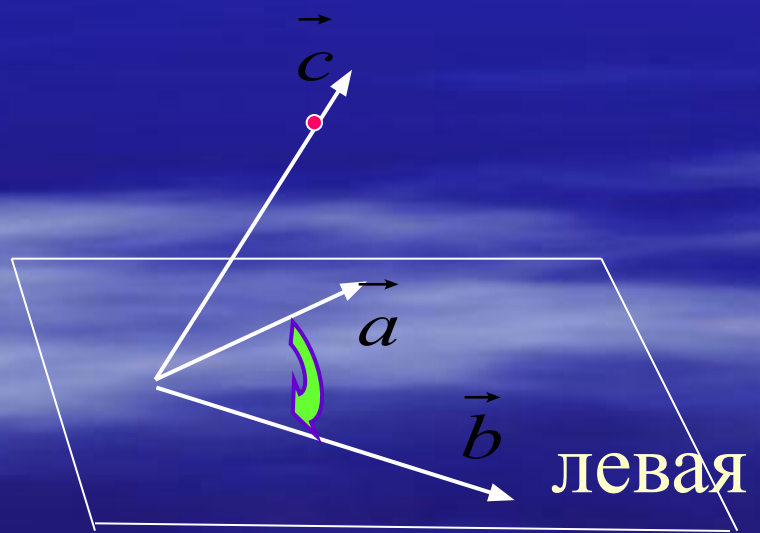
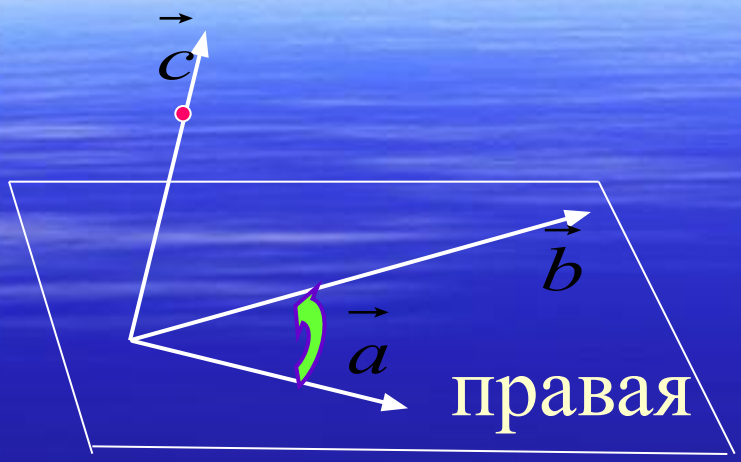
$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

# Скалярное произведение векторов в теоретической механике

Работа  $A$  силы  $\vec{F}$ , произведенная этой силой при перемещении тела на пути  $|s|$ , определяемом вектором  $s$ , вычисляется по формуле

$$A = F \cdot s = |F| |s| \cos(F, s)$$

Три вектора  $a, b, c$ , будем называть определенной тройкой, если указан порядок следования некопланарных



Тройка векторов  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  называется правой (левой), если после приведения к общему началу, кратчайший поворот от  $a$  к  $b$  из точек вектора  $c$  кажется совершающимся против часовой стрелки (по часовой стрелке).

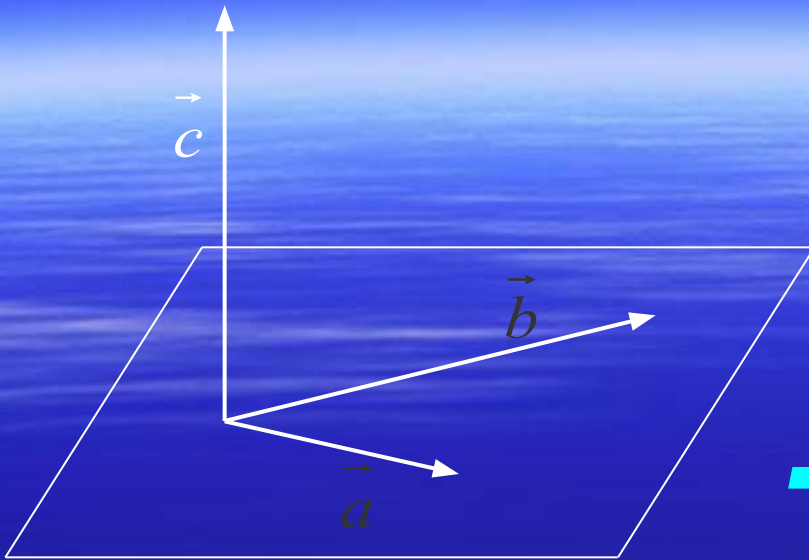
Определение. Вектор  $c$  называется **векторным произведением** векторов  $a$  и  $b$ , если:

- $|c| = |a| |b| \sin\varphi$ ,

где  $\varphi$  – угол между  $a$  и  $b$ .

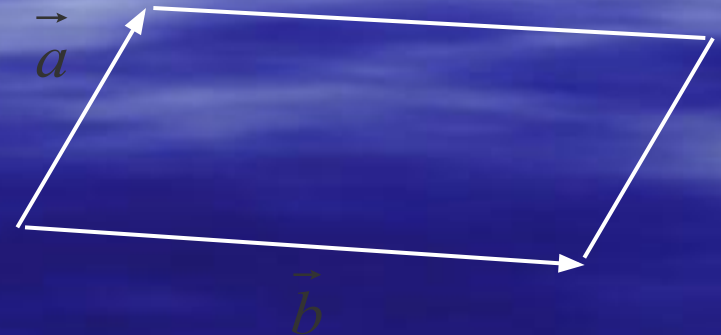
- $c \perp a, c \perp b$

- тройка векторов  $abc$  правая.



Теорема. /геометрический смысл векторного произведения/

Длина векторного произведения равняется площади  $S$  параллелограмма, построенного на приведенных к общему началу векторах  $a$  и  $b$ .



# ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ В КООРДИНАТНОЙ ФОРМЕ

Пусть вектора заданы своими координатами

→

$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$  тогда координаты векторного

произведения вычисляются по

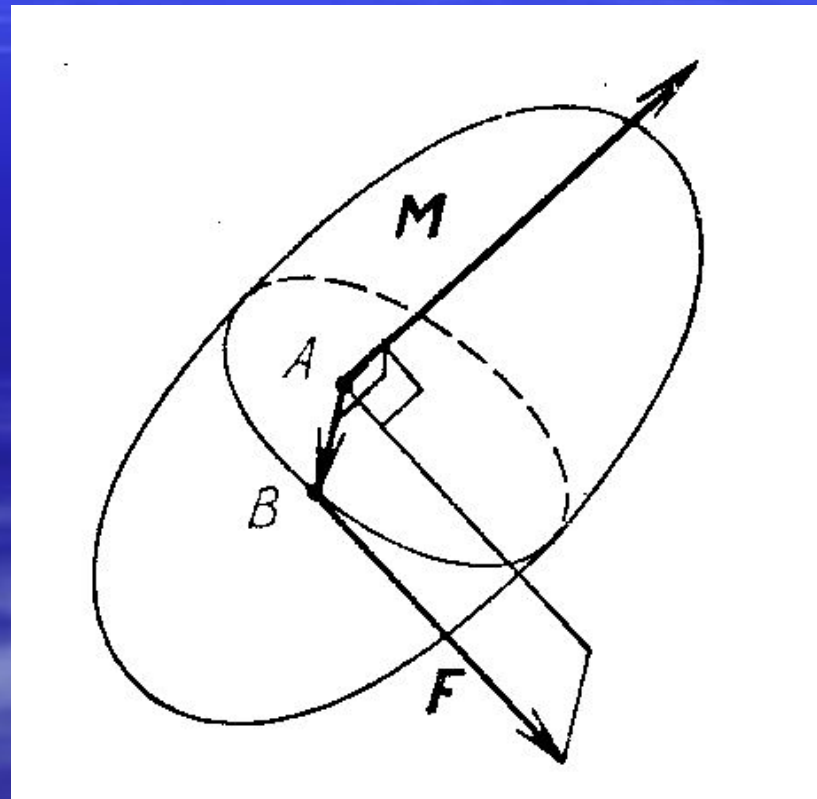
→  
 $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$  формуле

$$\vec{c} = \left( \begin{array}{c} \left| \begin{array}{cc} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{cc} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{cc} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{array} \right| \end{array} \right)$$

# Векторное произведение векторов в теоретической механике

С помощью векторного произведения можно вычислить вращающий момент  $M$  силы  $F$ , приложенной к точке  $B$  тела, закрепленного в точке  $A$ :

$$\vec{M} = \vec{AB} \times \vec{F}$$



# Смешанное произведение векторов

## Определение

Пусть даны три вектора  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Если вектор  $a$  векторно умножить на вектор  $b$ , а затем получившийся при этом вектор скалярно умножить на вектор  $c$ , то в результате получается число, которое называется смешанным произведением векторов  $a$ ,  $b$ ,  $c$

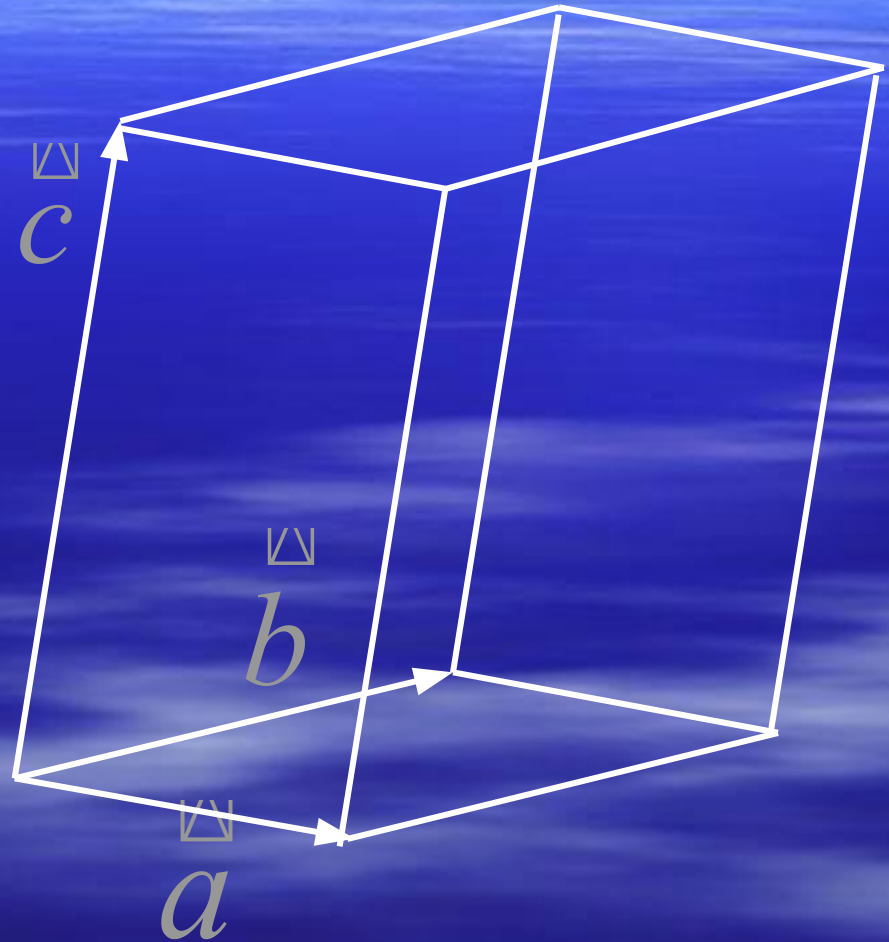
Обозначение  $\left[ \begin{matrix} \times & \times \\ a, b \end{matrix} \right] \times c$

# Теорема (геометрический смысл смешанного произведения)

Смешанное произведение равно объему параллелепипеда, построенного на приведенных к общему началу векторах  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$

## Замечание

*Если три вектора лежат в одной плоскости, то их смешанное произведение равно нулю*





# СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ В КООРДИНАТНОЙ ФОРМЕ

Если три вектора определены своими декартовыми координатами

$$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1) \quad \vec{b} = (x_2, y_2, z_2) \quad \vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$$

то смешанное произведение равняется определителю, строки которого соответственно равны координатам перемножаемых векторов

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

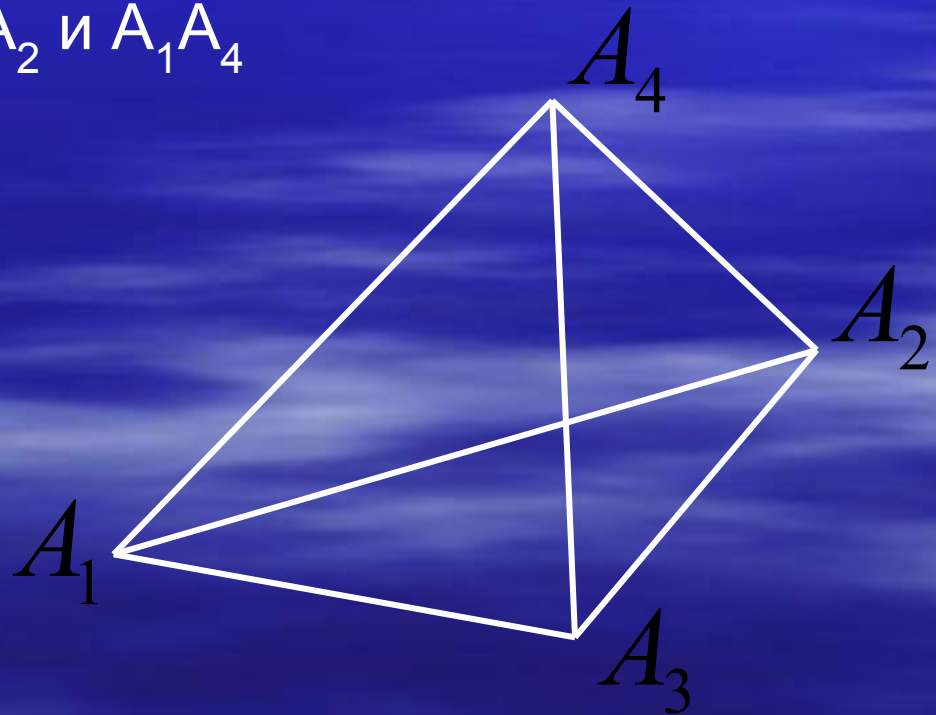
# ЗАДАЧА № 1

Даны координаты вершин пирамиды

$$A_1(1; -1; 6), A_2(4; 5; -2), A_3(-1; 3; 0), A_4(6; 1; 5)$$

Методами векторной алгебры определить

- Угол между ребрами  $A_1A_2$  и  $A_1A_4$
- Площадь грани  $A_1A_2A_3$
- Объем пирамиды



## ЗАДАЧА № 2

Вычислить координаты вращающего момента  $M$  силы  $F(3,2,1)$ , приложенной к точке  $A(-1,2,4)$ , относительно начала координат  $O$

## ЗАДАЧА № 3

Вычислить работу равнодействующей  $F$  сил  $F_1=(3,-4,5)$ ,  $F_2=(2,1,-4)$ ,  $F_3=(-1,6,2)$ , приложенных к материальной точке, которая под их действием перемещается прямолинейно из точки  $M_1(4,2,-3)$  в точку  $M_2(7,4,1)$