

---

# Тригонометрия

## Основные формулы

---

---

# содержание

- Соотношение между градусной и радианной мерами угла
  - Соотношения между функциями одного аргумента
  - Значения тригонометрических функций
  - Формулы сложения
  - Формулы приведения
  - Функции двойного и тройного аргументов
  - Функции половинного аргумента
  - Формулы суммы и разности одноимённых функций
  - Формулы преобразования произведения в сумму
  - Числовая окружность
  - График функции  $y=\sin x$
  - Свойства функции  $y=\sin x$
  - График функции  $y=\cos x$
  - Свойства функции  $y=\cos x$
-

# Соотношение между градусной и радианной мерами угла

$$1^{\circ} = \frac{\pi}{180} \text{ рад} \approx 0,017 \text{ рад};$$

$$1 \text{ рад} = \frac{180^{\circ}}{\pi} \approx 57^{\circ}.$$



# Соотношения между функциями одного аргумента

$$1. \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$2. \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$3. \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$4. 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$5. 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$6. \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$



# Значения тригонометрических функций

$\alpha$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$
Функция		6	4	3	2	3	4	6	$\pi$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	-



# Функции двойного и тройного аргументов

$$1. \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$2. \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$3. \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$4. \sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

$$5. \cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

$$6. \operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}$$



# Формулы сложения

$$1. \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$2. \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$3. \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$4. \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$5. \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

$$6. \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$



# Формулы приведения

$\varphi$	$\sin \varphi$	$\cos \varphi$	$tg \varphi$	$ctg \varphi$
$\alpha + 2\pi n$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$tg \alpha$	$ctg \alpha$
$-\alpha$	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$-tg \alpha$	$-ctg \alpha$
$\pi - \alpha$	$\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-tg \alpha$	$-ctg \alpha$
$\pi + \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$tg \alpha$	$ctg \alpha$
$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$ctg \alpha$	$tg \alpha$
$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$-ctg \alpha$	$-tg \alpha$
$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$-\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$ctg \alpha$	$tg \alpha$
$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$-ctg \alpha$	$-tg \alpha$





# Функции половинного аргумента

$$1. \sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$2. \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$3. \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

$$4. \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

$$5. \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$$



# Формулы суммы и разности одноимённых функций

$$1. \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$2. \sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$3. \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$4. \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$5. \operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$$

$$6. \operatorname{ctg} \alpha \pm \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}$$



# Формулы преобразования произведения в сумму

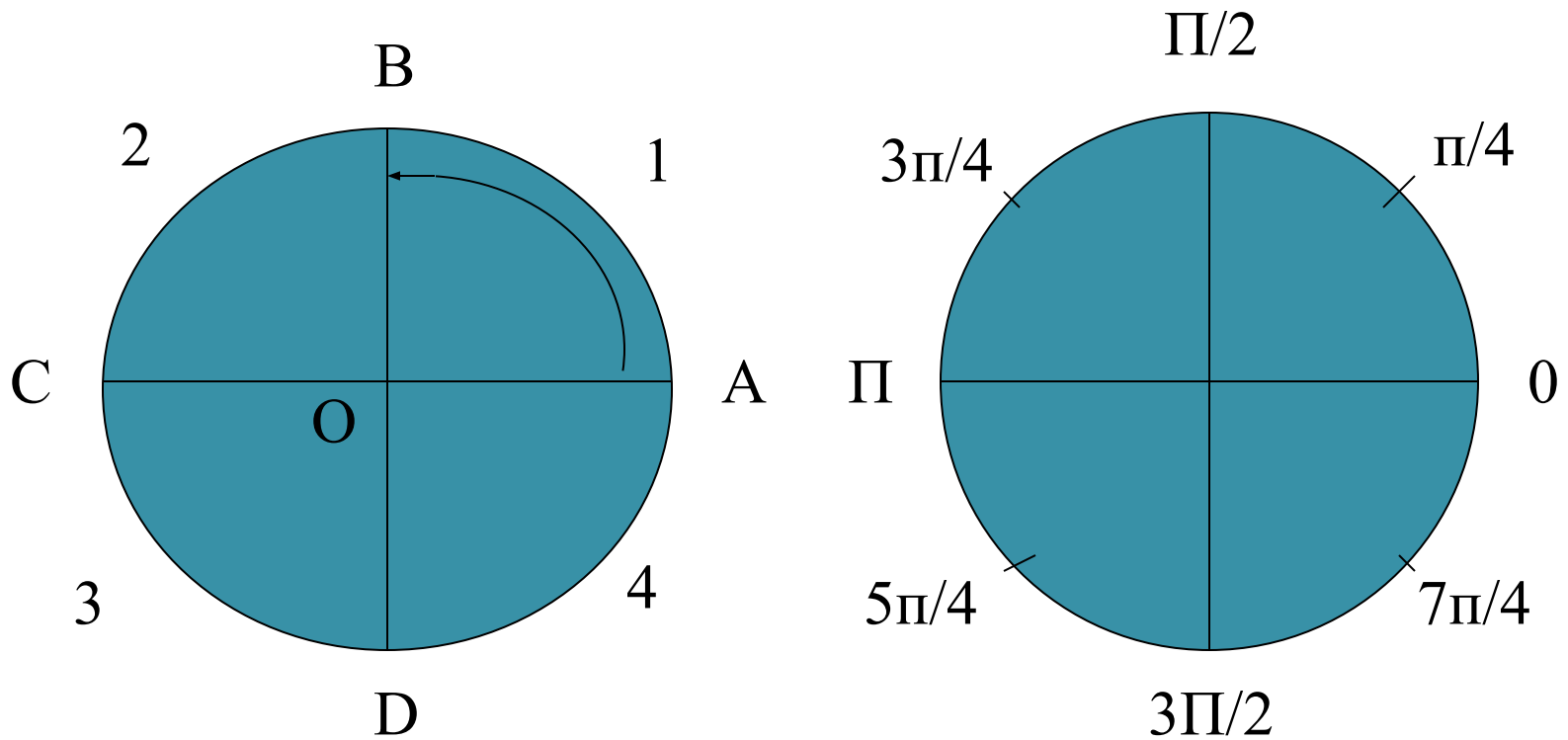
$$1. \sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2}$$

$$2. \sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2}$$

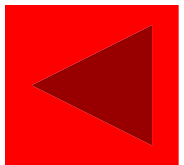
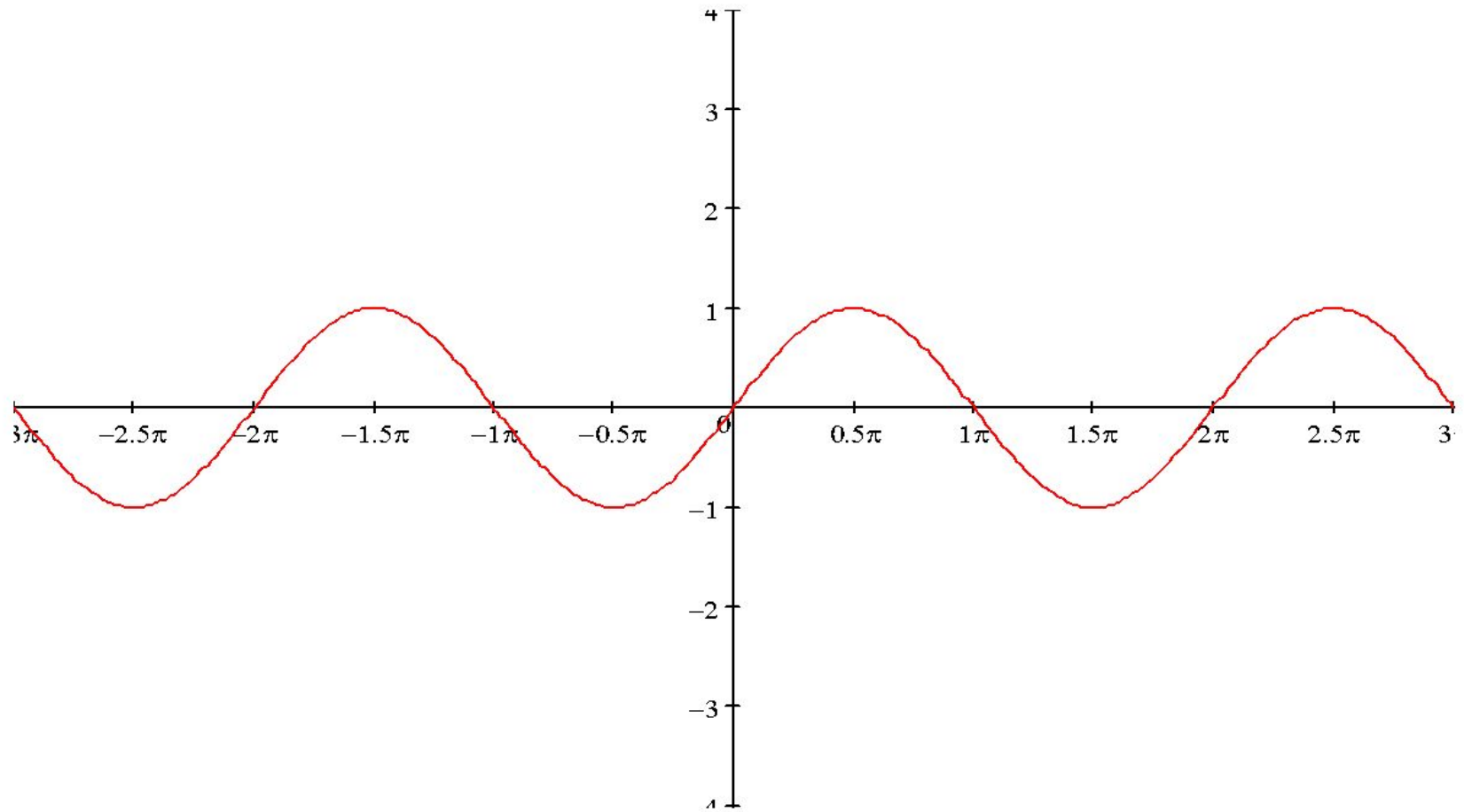
$$3. \cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)}{2}$$



# Числовая окружность



# График функции $y = \sin x$



# Свойства функции $y = \sin x$

- $D(y)=\mathbb{R}$

- $E(y)=[-1;1]$

- Функция периодическая  $T= 2\pi$

- Функция нечётная

- $y=0$  при  $x= \pi n$

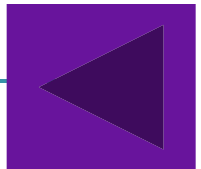
- $y=1$  при  $x= \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$        $y=-1$  при  $x= -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

- $y>0$  при  $x \in (\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n), n \in \mathbb{Z}$

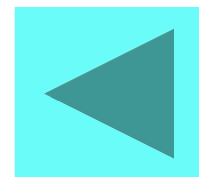
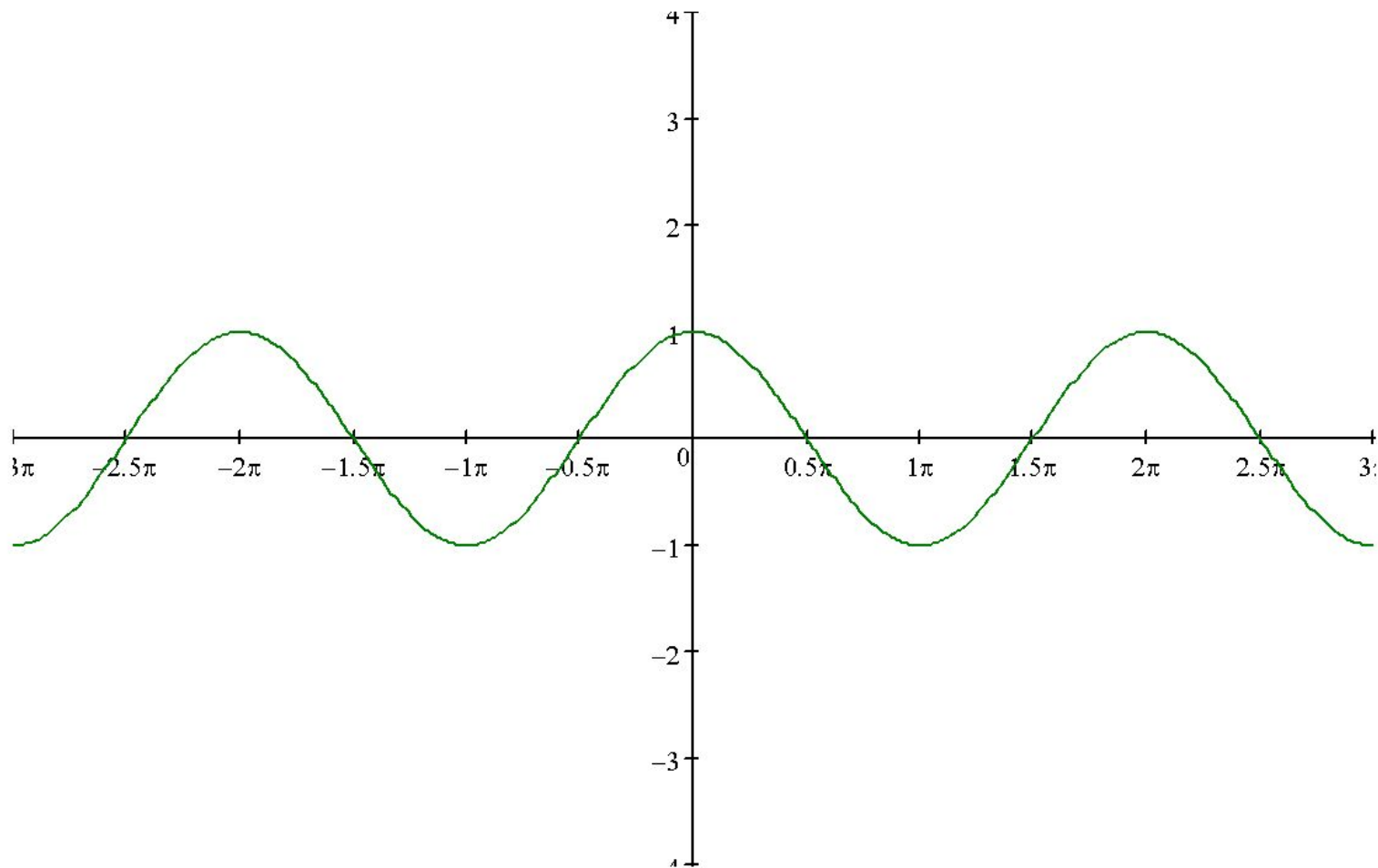
- $y<0$  при  $x \in (0 + 2\pi n; \pi + 2\pi n), n \in \mathbb{Z}$

- Возрастает на отрезке  $\left[ \frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n \right], n \in \mathbb{Z}$

- Убывает на отрезке  $\left[ -\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n \right], n \in \mathbb{Z}$



# График функции $y = \cos x$



# Свойства функции $y = \cos x$

- $D(y)=\mathbb{R}$
- $E(y)=[-1;1]$
- Функция периодическая  $T=2\pi$
- Функция чётная
- $Y=0$  при  $X = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
- $y=1$  при  $X = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$      $y=-1$  при  $X = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
- $Y>0$  при  $X \in \left( -\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n \right), n \in \mathbb{Z}$
- $Y<0$  при  $X \in \left( \frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n \right), n \in \mathbb{Z}$
- Возрастает на отрезке  $[\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n], n \in \mathbb{Z}$
- Убывает на отрезке  $[0 + 2\pi n; \pi + 2\pi n], n \in \mathbb{Z}$

