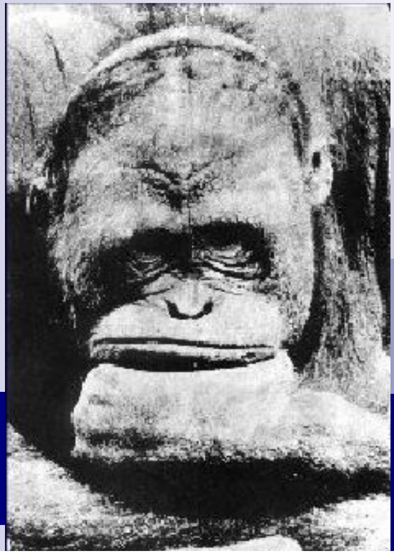
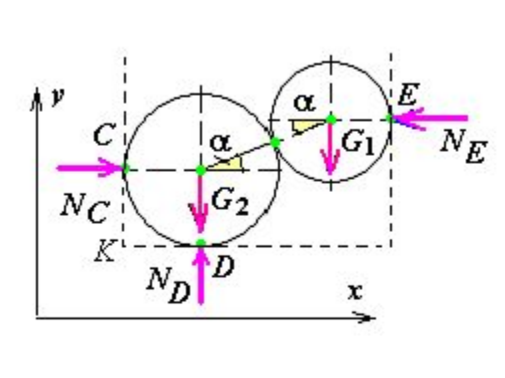
Московский государственный университет путей сообщения (МИИТ)
Кафедра теоретической механики
Научно-технический центр транспортных технологий



Бондаренко А.Н.

Курс лекций по теоретической механике



Статика

Электронный учебный курс написан на основе лекций, читавшихся автором для студентов, обучавшихся по специальностям СЖД, ПГС и СДМ в НИИЖТе и МИИТе (1974-2006 гг.). Учебный материал соответствует календарным планам в объеме трех семестров.

Для полной реализации анимационных эффектов при презентации необходимо использовать средство просмотра Power Point не ниже, чем встроенный в Microsoft Office операционной системы Windows-XP Professional. Запуск презентации – F5, навигация – Enter, навигационные клавиши, щелчок мыши, кнопки.
Завершение – Esc.
Замечания и предложения можно послать по e-mail: bond@miit.ru .

Москва - 2007

- **Лекция 4**.

Плоские фермы. Методы расчета. Метод вырезания узлов. Метод Риттера. Понятие о линиях влияния опорных реакций и усилий.

Равновесие сочлененных тел.

Условие равновесия рычага.

Условие устойчивости тела на опрокидывание.

Кинематический способ определения реакций (принцип возможных перемещений).

Лекция 4

- **Плоские фермы** – Геометрически неизменяемые стержневые конструкции, стержни которых лежат в одной плоскости.

Узлы фермы – точки, в которых сходятся оси стержней (*опорные узлы* – узлы, которыми ферма опирается на основание).

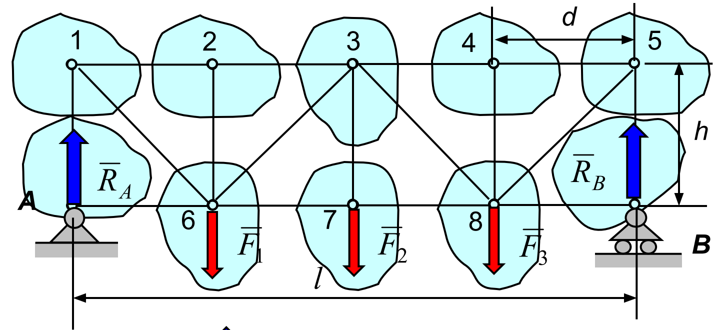
Верхний и нижний пояса – стержни, образующие верхний и нижний контуры.

Стойки – вертикальные стержни.

Раскосы – наклонные стержни.

Пролет фермы – расстояние между опорными узлами (l).

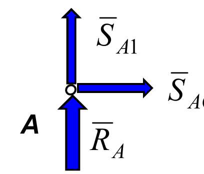
Длина панели – расстояние между стойками (d).



Методы расчета. Для расчета усилий, возникающих в стержнях ферм, используются метод вырезания узлов и метод сквозных сечений (метод Риттера).

Основные допущения, принимаемые при расчете ферм:

1. Все узлы соединения стержней считаются идеальными шарнирами, не препятствующими взаимному повороту стержней. Узлы в металлических фермах, в которых стержни соединяются при помощи фасонных листов и заклепок, также рассматриваются как шарнирные, поскольку при нагрузке они допускают малые упругие деформации (взаимные повороты).
2. Нагрузка приложена в узлах. Для узловой передачи нагрузки на практике используются специальные балочные конструкции.
3. Геометрические размеры фермы не изменяются при нагружении (деформации малы).



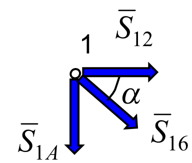
$$\sum X_i = 0; \quad S_{A6} = 0,$$
$$\sum Y_i = 0; \quad S_{A1} + R_A = 0.$$

$$S_{A6} = 0, \quad S_{A1} = -R_A$$

- **Метод вырезания узлов** – Последовательно вырезаются узлы фермы так, чтобы в двух уравнениях равновесия для каждого из узлов было не более двух неизвестных усилий. Как правило внешние опорные реакции должны быть предварительно определены.

Порядок расчета:

1. Выбираем в качестве объекта равновесия ферму в целом и определяем опорные реакции:
2. Нумеруем или обозначаем буквами необозначенные узлы. Реакции стержней (или усилия в них) будем обозначать далее двумя индексными цифрами или буквами – первая из них совпадает с номером (обозначением) вырезаемого узла, а вторая указывает к каком узлу присоединяется другим концом рассматриваемый стержень.
3. Вырезаем узел *A* (в этом узле всего два неизвестных усилия) и заменяем действие разрезанных (отброшенных) узлов усилиями (реакциями) $\boldsymbol{S}_{A1}$ и $\boldsymbol{S}_{A6}$.
4. Составляем уравнения равновесия для узла A и вычисляем усилия $\boldsymbol{S}_{A1}$ и $\boldsymbol{S}_{A6}$.
5. Вырезаем узел 1 (в этом узле всего два неизвестных усилия) и заменяем действие разрезанных (отброшенных) узлов усилиями (реакциями) $\boldsymbol{S}_{1A}$, $\boldsymbol{S}_{12}$ и $\boldsymbol{S}_{16}$.
6. Составляем уравнения равновесия для узла 1 и вычисляем усилия $\boldsymbol{S}_{12}$ и $\boldsymbol{S}_{16}$ ($\boldsymbol{S}_{1A}$ и $\boldsymbol{S}_{A1}$ равны алгебраически, поскольку при направлении неизвестных усилий от узла аксиома действия и противодействия выполняется автоматически).



$$\sum X_i = 0; \quad S_{12} + S_{16}\cos\alpha = 0,$$
$$\sum Y_i = 0; \quad S_{1A} - S_{16}\sin\alpha = 0.$$

$$S_{16} = \frac{S_{1A}}{\sin\alpha} = \frac{S_{A1}}{\sin\alpha},$$
$$S_{12} = -S_{16}\cos\alpha = -\frac{S_{A1}}{\sin\alpha}\cos\alpha.$$

Далее процесс вырезания узлов и определения усилий повторяется в определенном порядке, например: 2, 6, 7, 3, 4, 8, 5.

Вырезание последнего узла *B* может служить для контроля правильности расчета.

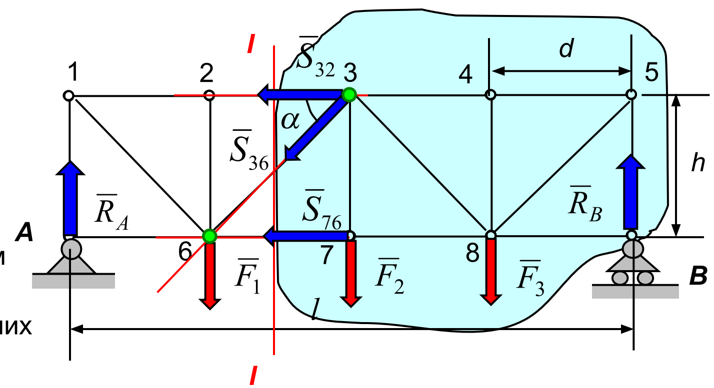
Лекция 4 (продолжение – 4.2)

Метод вырезания узлов для вычисления усилия только в указанном стержне **требует рассмотрения всех узлов и решения для них уравнений равновесия** (по крайней мере узлов, находящихся между одним из опорных узлов и узлом, к которому подходит указанный стержень). Кроме того, последовательное вычисление усилий и подстановка результатов в дальнейший расчет при большом числе узлов чревато накоплением ошибок, не говоря уже о том, допущенная грубая ошибка в одном из узлов делает дальнейшие вычисления неверными.

■ **Метод сквозных сечений (метод Риттера)** в большинстве случаев не требует для вычисления усилия только в указанном стержне составления каких-либо других вспомогательных уравнений равновесия кроме того уравнения, в котором непосредственно участвует искомое усилие.
Метод основывается на составлении **одного уравнения равновесия** с использованием II и III форм уравнений равновесия произвольной плоской системы сил.

Порядок расчета:

1. Выбираем в качестве объекта равновесия ферму в целом и **определяем опорные реакции**:



2. Проводим сквозное сечение, разделяющее ферму на две отдельные части так, чтобы **в сечение попадало не более трех стержней**, в одном из которых требуется найти усилие, например, сечение I-I для определения S_{23}.
3. Выбирая в качестве объекта равновесия одну часть, например, правую, отбрасываем другую (левую) часть.
4. Действие отброшенной части на оставшуюся заменяем реакциями стержней, попавших в разрез – S_{32}, S_{36} и S_{76}.
5. Для искомого усилия S_{32} **находим положение точки Риттера**, как точки пересечения линий действия двух других усилий S_{36} и S_{76}, не подлежащих определению в данный момент. Точка Риттера для усилия S_{32} совпадает с узлом 6.

$$\boxed{\sum M_{i6}^{\text{прав}} = 0; \quad S_{32}h + R_B 3d - F_3 2d - F_2 d = 0}$$

6. Составляем **моментное уравнение равновесия** для оставленной (правой) части относительно найденной точки Риттера (узла 6) и определяем искомое усилие.

$$\boxed{S_{32} = \frac{-R_B 3d + F_3 2d + F_2 d}{h}}$$

7. Для определения усилия S_{76} **находим положение точки Риттера**, как точки пересечения линий действия двух других усилий S_{36} и S_{32}, не подлежащих определению в данный момент. Точка Риттера для усилия S_{76} совпадает с узлом 3.

$$\boxed{\sum M_{i3}^{\text{прав}} = 0; \quad -S_{76}h + R_B 2d - F_3 d = 0}$$

8. Составляем **моментное уравнение равновесия** для оставленной (правой) части относительно найденной точки Риттера (узла 3) и определяем искомое усилие.

$$\boxed{S_{76} = \frac{R_B 2d - F_3 d}{h}}$$

7. При определении усилия S_{36} **точка Риттера**, как точка пересечения линий действия двух других усилий S_{76} и S_{32}, не подлежащих определению в данный момент, **уходит в бесконечность**.
В этом случае моментное уравнение равновесия вырождается в уравнение равновесия в проекциях на ось, перпендикулярную линиям, уходящим в бесконечность.

$$\boxed{\sum Y_i^{\text{прав}} = 0; \quad -S_{36}\sin\alpha + R_B - F_2 - F_3 = 0}$$

$$\boxed{S_{36} = \frac{R_B - F_2 - F_3}{\sin\alpha}}$$

Для определения других усилий необходимо провести другое сечение (п.2) и повторить описанные действия (пп. 3,4,….)

Лекция 4 (продолжение – 4.3 – дополнительный материал)

■ **Понятия о линиях влияния опорных реакций и усилий.** Железнодорожные мосты, сооружаемые с использованием таких элементов, как фермы и балочные конструкции, при эксплуатации подвергаются подвижной многоосной нагрузке. При движении поезда усилия в элементах изменяются по некоторому закону и требуется определить наиболее опасные расположения такой нагрузки на сооружении. Исходным аппаратом решения этой задачи являются линии влияния усилий. Линии влияния широко используются в строительной механике.

Линия влияния усилия – график изменения усилия в зависимости от положения **единичной подвижной нагрузки**.

Выражения для усилий в стержнях фермы от постоянной нагрузки содержат величину опорной реакции, например:

$$\boxed{S_{36} = \frac{R_B - F_2 - F_3}{\sin\alpha}}$$

В случае рассмотрения единичной подвижной нагрузки (F_1=F_2=F_3=0, P=1) соответствующие выражения будут различными в зависимости от расположения единичной нагрузки:

груз находится слева от сечения I-I:

$$\boxed{S_{36} = \frac{R_{B3}}{\sin\alpha}}$$

груз находится справа от сечения I-I (*на оставленной части фермы*):

$$\boxed{S_{36} = \frac{R_{B3} - 1}{\sin\alpha}}$$

Таким образом, линия влияния усилия S_{36} может быть построена с помощью линии влияния опорной реакции R_B:

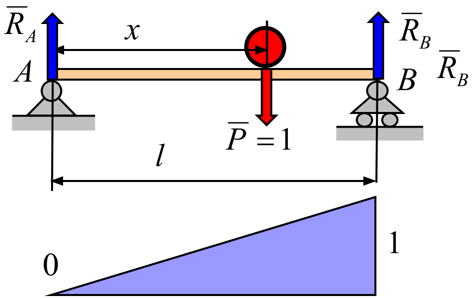
груз находится слева от сечения I-I:
(левая ветвь)

$$\boxed{\text{Л.в.}S_{36} = \frac{\text{Л.в.}R_{B3}}{\sin\alpha}}$$

груз находится справа от сечения I-I :
(правая ветвь)

$$\boxed{\text{Л.в.}S_{36} = \frac{\text{Л.в.}R_{B3} - 1}{\sin\alpha}}$$

Построение линии влияния опорной реакции – Ферму можно в данном случае представить в виде обычной балки:



1. Отбрасываем связи и заменяем реакциями:

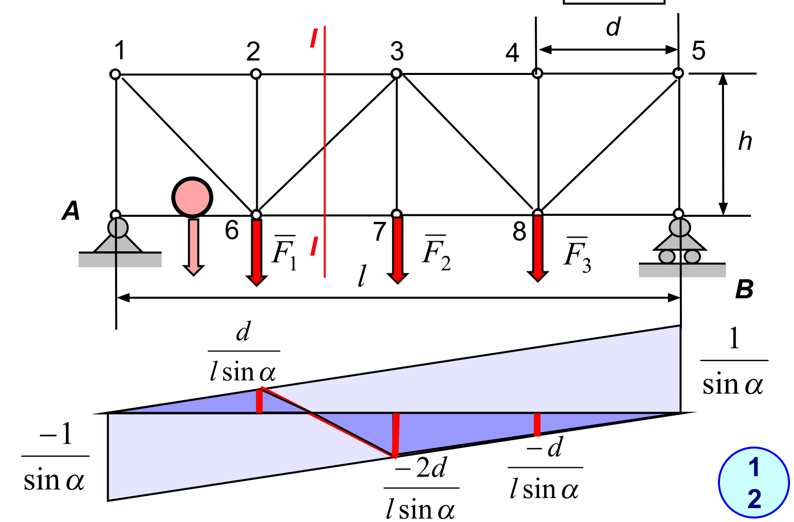
2. Составляем моментное уравнение равновесия и находим величину реакции в функции от координаты положения груза :

$$\boxed{\sum M_{iA} = 0; \quad R_B l - 1x = 0}$$

$$\boxed{R_B = \frac{x}{l}}$$

3. Подставляя значения x = 0 и x = l строим график изменения значения опорной реакции (линию влияния):

Построение линии влияния усилия в стержне S_{36}:



Построенная линия влияния позволяет легко найти величину усилия от любой статической (постоянной) вертикальной нагрузки как сумму произведений величин сил на значения ординат линии влияния:

$$\boxed{S_{36} = \sum F_i y_i = F_1 \frac{d}{l\sin\alpha} + F_2\left(\frac{-2d}{l\sin\alpha}\right) + F_3\left(\frac{-d}{l\sin\alpha}\right)}$$

Лекция 4 (продолжение – 4.4)

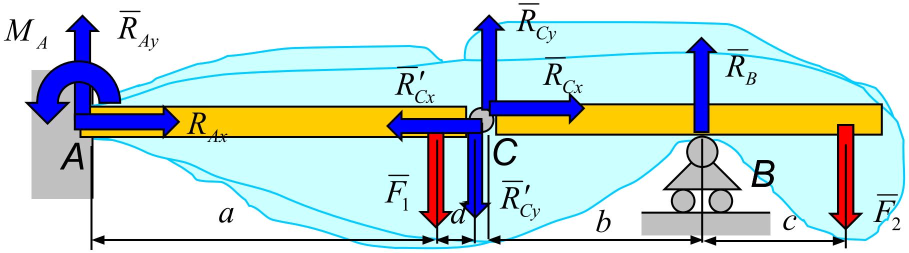
■ **Равновесие сочлененных тел.** Железнодорожные и строительные конструкции могут состоять из сочлененных между собой тел (балок, ферм). Количество наложенных связей может превышать число независимых уравнений равновесия, которые можно составить для рассматриваемой конструкции. Такие задачи являются **статически неопределимыми**. Степень статической неопределимости для плоских систем равна:

$$\boxed{n = 3Ж + 2Ш + С - 3Д}$$

где *Д* – число жестких дисков, *Ж* – число жестких заделок,
Ш – число неподвижных шарниров (опорных и соединяющих диски между собой,
С – число шарнирных стержней (опорных или соединяющих диски между собой) или подвижных шарниров

В теоретической механике возможно решение только статически определимых задач, в которых количество связей равно числу независимых уравнений равновесия (*n* = 0).

$$\boxed{n = 3\cdot 1 + 2\cdot 1 + 1\cdot 1 - 3\cdot 2 = 0}$$



1. Выберем в качестве объекта всю конструкцию.
2. Отбросим связи и заменим их действие реакциями.
3. Число неизвестных реакций – 4, а количество независимых уравнений - 3. Это означает, что необходимо **расчленить** конструкцию – отбросить шарнир С и заменить его действие на каждую из частей реакциями.

$$(CB):\quad \sum X_i = 0;\quad R_{Cx} = 0;$$
$$\sum M_{Ci} = 0;\quad R_B b - F_2(b+c) = 0;$$
$$\sum M_{Bi} = 0;\quad -R_{Cy} b - F_2 b = 0.$$

$$\overline{R}'_{Cx} = -\overline{R}_{Cx},\ \text{но}\ R'_{Cx} = R_{Cx};$$
$$\overline{R}'_{Cy} = -\overline{R}_{Cy},\ \text{но}\ R'_{Cy} = R_{Cy}.$$

4. Число неизвестных реакций – 8, а количество независимых уравнений равновесия для обоих частей - 3·2 = 6.
С использованием аксиомы действия и противодействия для каждой пары реакций шарнира *С* общее число неизвестных реакций уменьшается до 6 и равно общему числу уравнений равновесия:

$$(AC):\quad \sum X_i = 0;\quad R_{Ax} - R'_{Cx} = 0;$$
$$\sum Y_i = 0;\quad R_{Ay} - R'_{Cy} - F_1 = 0;$$
$$\sum M_{Ai} = 0;\quad M_A - R'_{Cy}(a+d) - F_1 a = 0.$$

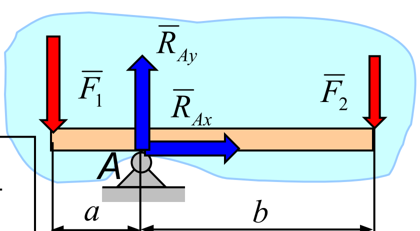
5. Решение полученной системы уравнений не представляет особых затруднений в указанном порядке: от *вспомогательной* балки *СВ* (не может оставаться в равновесии без балки АС) к *основной* балке *АС* (может находиться в равновесии без балки СВ).

■ **Равновесие рычага.** Рычаг – твердое тело, имеющее одну неподвижную точку.
Рычаг имеет одну степень кинематической подвижности (*w* = – *n* = 3*Д* – 3*Ж* – 2*Ш* – *С* = = 3·1 – 3·0 – 2·1 – 0 = 1) и в равновесии может быть лишь при определенном соотношении активных сил, действующих на рычаг.

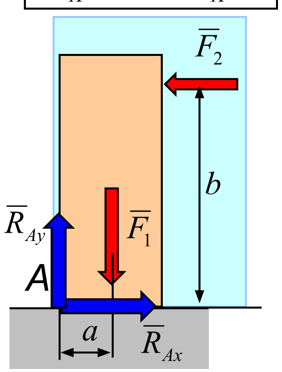
■ **Уравнения равновесия рычага.** Применяя общий подход составления уравнений равновесия к рычагу получаем:

$$\sum X_i = 0;\quad R_{Ax} = 0;$$
$$\sum Y_i = 0;\quad R_{Ay} - F_1 - F_2 = 0;$$
$$\boxed{\sum M_{Ai} = 0;\quad F_1 a - F_2 b = 0.}$$

Во многих случаях значением опорных реакций не интересуются и искомое соотношение сил определяют из последнего моментного уравнения, которое и принимается за **уравнение равновесия рычага.**



$$\boxed{M_A^{\text{удерж}} > M_A^{\text{опрок}}}$$



Уравнение равновесия рычага используется при **расчете подпорной стенки или груза на опрокидывание**:
Условие устойчивости на опрокидывание: Удерживающий момент относительно неподвижной точки (от $\boldsymbol{F}_1$) должен быть больше опрокидывающего момента (от $\boldsymbol{F}_2$) относительно этой же точки.

Лекция 4 (продолжение – 4.5 – дополнительный материал)

- **Кинематический способ определения реакций и усилий.** Способ основывается на принципе возможных перемещений:

- **Принцип возможных перемещений – Для равновесия материальной системы, подчиненной стационарным, двухсторонним и идеальным связям, необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех активных сил на любом возможном перемещении из предполагаемого положения равновесия равнялось нулю:**

$$\boxed{\delta A^F = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k \delta \overline{r}_k = 0.}$$

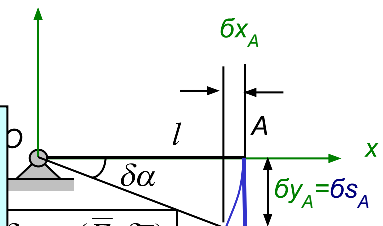
Стационарные связи – не зависящие от времени.
Двухсторонние связи – препятствующие перемещениям в обоих противоположных направлениях (жесткая заделка, шарнир, стержень являются двухсторонними связями, нить, гладкая поверхность – односторонние связи). Если связь односторонняя, то достаточно просто не рассматривать в качестве возможных перемещений перемещения, соответствующие тому направлению, в котором связь не может удерживать объект, например, в направлении отрыва объекта от гладкой поверхности.
Идеальные связи – работа которых на любом возможном перемещении равна нулю.
Если связь не идеальная, то реакция такой связи должна быть причислена к действующим (активным) силам, например, сила трения шероховатой поверхности добавляется к активным силам.

- **Возможные перемещения – бесконечно малые перемещения, допускаемые наложенными на систему связями.** Возможные перемещения не зависят от приложенных к системе сил.

- **Вычисление возможных перемещений:** - в силу малости возможных перемещений при повороте твердого тела любая его точка может рассматриваться движущейся не по дуге, а по перпендикуляру к радиусу вращения в сторону угла поворота:

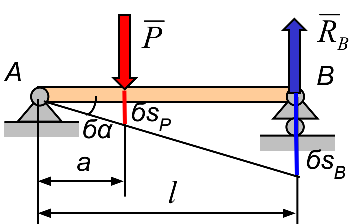
$\delta x_A = l - l\,\mathrm{co}$

$\delta y_A = l \sin \delta$



- **Возможная работа силы –** элементарная работа силы ... $\delta s \cos(\overline{F}, \delta \overline{r}).$

- **Примеры использования принципа возможных пер**...



Пример 1. Определить реакц... балки в правой опоре:

...ействительных перемещений.

Без правой опоры балка м... ...заменим ее реакцией:

к активным силам. Задад... ...цию R_B причисляем

Вычислим возможные перем...

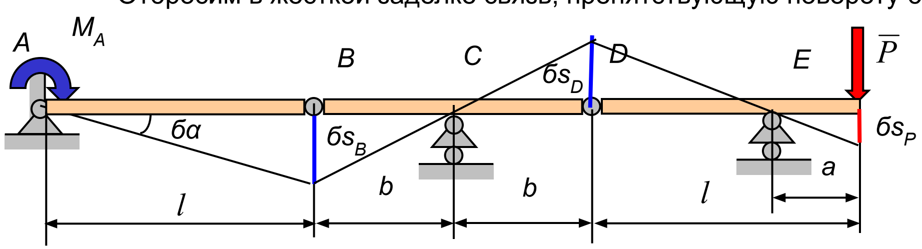
Запишем сумму работ: ...

$$\boxed{R_B = \frac{Pa\delta\alpha}{l\delta\alpha} = \frac{Pa}{l}.}$$

> Заметим, что
> 1. для нахождения опорного момента M_A из уравнений статики потребовалось бы решить как минимум три уравнения равновесия;
> 2. эпюра возможных перемещений пропорциональна линии влияния усилия;
> 3. если задать возможное перемещение для искомой реакции равным 1, например, $\delta\alpha = 1$, то эпюра перемещений будет полностью тождественна линии влияния поскольку
>
> $$\delta A = M_A \cdot 1 + 1 \cdot \delta s_F(z) = 0; \quad M_A = -\delta s_F(z).$$

Пример 2. Определить опорный момент многопролетной ...

Отбросим в жесткой заделке связь, препятствующую повороту балки, и заменим ее парой сил M_A:



Вычислим возможные перемещения:

$$\delta s_B = l\delta\alpha; \quad \delta s_D = \delta s_B = l\delta\alpha;$$

$$\delta s_F = \frac{a}{l-a}\delta s_D = \frac{a}{l-a} l\delta\alpha.$$

Запишем сумму работ:

$$\delta A = M_A \delta\alpha + F\delta s_F = 0.$$

$$M_A \delta\alpha + F\frac{a}{l-a} l\delta\alpha = 0.$$

$$\boxed{M_A = -F\frac{a}{l-a} l.}$$