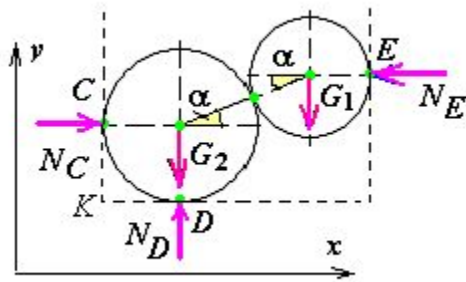


Бондаренко А.Н.

# Курс лекций по теоретической механике

## Статика



Электронный учебный курс написан на основе лекций, читавшихся автором для студентов, обучавшихся по специальностям СЖД, ПГС и СДМ в НИИЖТе и МИИТе (1974-2006 гг.). Учебный материал соответствует календарным планам в объеме трех семестров.

Для полной реализации анимационных эффектов при презентации необходимо использовать средство просмотра Power Point не ниже, чем встроенный в Microsoft Office операционной системы Windows-XP Professional. Запуск презентации – F5, навигация – Enter, навигационные клавиши, щелчок мыши, кнопки.

Завершение – Esc.

Замечания и предложения можно послать по e-mail: [bond@miit.ru](mailto:bond@miit.ru).

Москва - 2007

## ■ Лекция 4.

Плоские фермы. Методы расчета. Метод вырезания узлов. Метод Риттера. Понятие о линиях влияния опорных реакций и усилий.

Равновесие сочлененных тел.

Условие равновесия рычага.

Условие устойчивости тела на опрокидывание.

Кинематический способ определения реакций (принцип возможных перемещений).

# Лекция 4

**Плоские фермы** – Геометрически неизменяемые стержневые конструкции, стержни которых лежат в одной плоскости.

**Узлы фермы** – точки, в которых сходятся оси стержней (*опорные узлы* – узлы, которыми ферма опирается на основание).

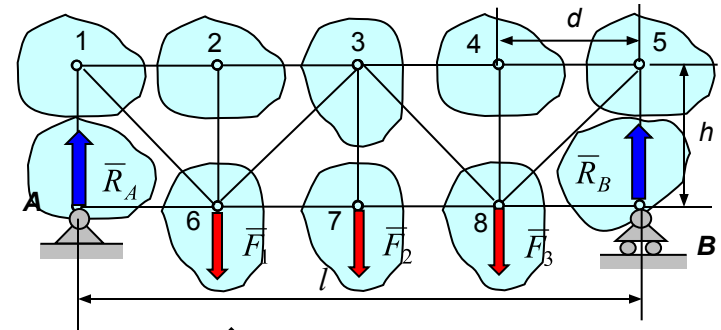
**Верхний и нижний пояса** – стержни, образующие верхний и нижний контуры.

**Стойки** – вертикальные стержни.

**Раскосы** – наклонные стержни.

**Пролет фермы** – расстояние между опорными узлами ( $l$ ).

**Длина панели** – расстояние между стойками ( $d$ ).



**Методы расчета.** Для расчета усилий, возникающих в стержнях ферм, используются метод вырезания узлов и метод сквозных сечений (метод Риттера).

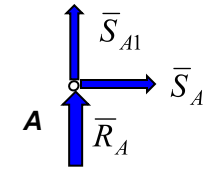
**Основные допущения, принимаемые при расчете ферм:**

1. Все узлы соединения стержней считаются идеальными шарнирами, не препятствующими взаимному повороту стержней. Узлы в металлических фермах, в которых стержни соединяются при помощи фасонных листов и заклепок, также рассматриваются как шарнирные, поскольку при нагрузке они допускают малые упругие деформации (взаимные повороты).
2. Нагрузка приложена в узлах. Для узловой передачи нагрузки на практике используются специальные балочные конструкции.
3. Геометрические размеры фермы не изменяются при нагружении (деформации малы).

■ **Метод вырезания узлов** – Последовательно вырезаются узлы фермы так, чтобы в двух уравнениях равновесия для каждого из узлов было не более двух неизвестных усилий. Как правило внешние опорные реакции должны быть предварительно определены.

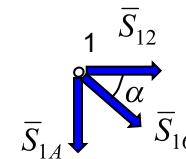
**Порядок расчета:**

1. Выбираем в качестве объекта равновесия ферму в целом и определяем опорные реакции:
2. Нумеруем или обозначаем буквами необозначенные узлы. Реакции стержней (или усилия в них) будем обозначать далее двумя индексными цифрами или буквами – первая из них совпадает с номером (обозначением) вырезаемого узла, а вторая указывает к какому узлу присоединяется другим концом рассматриваемый стержень.
3. Вырезаем узел A (в этом узле всего два неизвестных усилия) и заменяем действие разрезанных (отброшенных) узлов усилиями (реакциями)  $S_{A1}$  и  $S_{A6}$ .
4. Составляем уравнения равновесия для узла A и вычисляем усилия  $S_{A1}$  и  $S_{A6}$ .
5. Вырезаем узел 1 (в этом узле всего два неизвестных усилия) и заменяем действие разрезанных (отброшенных) узлов усилиями (реакциями)  $S_{1A}$ ,  $S_{12}$  и  $S_{16}$ .
6. Составляем уравнения равновесия для узла 1 и вычисляем усилия  $S_{12}$  и  $S_{16}$  ( $S_{1A}$  и  $S_{A1}$  равны алгебраически, поскольку при направлении неизвестных усилий от узла аксиома действия и противодействия выполняется автоматически).



$$\begin{cases} \sum X_i = 0; & S_{A6} = 0, \\ \sum Y_i = 0; & S_{A1} + R_A = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_{A6} = 0, \\ S_{A1} = -R_A \end{cases}$$



$$\begin{cases} \sum X_i = 0; & S_{12} + S_{16} \cos \alpha = 0, \\ \sum Y_i = 0; & S_{1A} - S_{16} \sin \alpha = 0. \end{cases}$$

$$S_{16} = \frac{S_{1A}}{\sin \alpha} = \frac{S_{A1}}{\sin \alpha},$$

$$S_{12} = -S_{16} \cos \alpha = -\frac{S_{A1}}{\sin \alpha} \cos \alpha.$$

**Далее процесс вырезания узлов и определения усилий повторяется в определенном порядке, например: 2, 6, 7, 3, 4, 8, 5.**

**Вырезание последнего узла B может служить для контроля правильности расчета.**

# Лекция 4 (продолжение – 4.2)

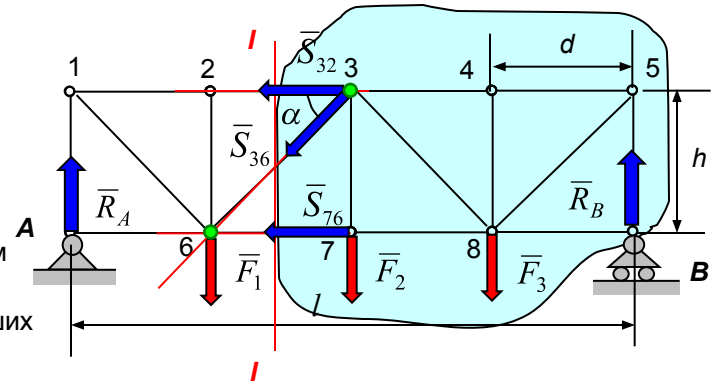
**Метод вырезания узлов** для вычисления усилия только в указанном стержне **требует рассмотрения всех узлов и решения для них уравнений равновесия** (по крайней мере узлов, находящихся между одним из опорных узлов и узлом, к которому подходит указанный стержень). Кроме того, последовательное вычисление усилий и подстановка результатов в дальнейший расчет при большом числе узлов чревато накоплением ошибок, не говоря уже о том, допущенная грубая ошибка в одном из узлов делает дальнейшие вычисления неверными.

■ **Метод сквозных сечений (метод Риттера)** в большинстве случаев не требует для вычисления усилия только в указанном стержне составления каких-либо других вспомогательных уравнений равновесия кроме того уравнения, в котором непосредственно участвует искомое усилие.

Метод основывается на составлении **одного уравнения равновесия** с использованием II и III форм уравнений равновесия произвольной плоской системы сил.

## Порядок расчета:

1. Выбираем в качестве объекта равновесия ферму в целом и **определяем опорные реакции**:
2. Проводим сквозное сечение, разделяющее ферму на две отдельные части так, чтобы **в сечение попадало не более трех стержней**, в одном из которых требуется найти усилие, например, сечение I-I для определения  $S_{23}$ .
3. Выбирая в качестве объекта равновесия одну часть, например, правую, отбрасываем другую (левую) часть.
4. Действие отброшенной части на оставшуюся заменяем реакциями стержней, попавших в разрез –  $S_{32}$ ,  $S_{36}$  и  $S_{76}$ .
5. Для искомого усилия  $S_{32}$  **находим положение точки Риттера**, как точки пересечения линий действия двух других усилий  $S_{36}$  и  $S_{76}$ , не подлежащих определению в данный момент. Точка Риттера для усилия  $S_{32}$  совпадает с узлом 6.
6. Составляем **моментное уравнение равновесия** для оставленной (правой) части относительно найденной точки Риттера (узла 6) и определяем искомое усилие.
7. Для определения усилия  $S_{76}$  **находим положение точки Риттера**, как точки пересечения линий действия двух других усилий  $S_{36}$  и  $S_{32}$ , не подлежащих определению в данный момент. Точка Риттера для усилия  $S_{76}$  совпадает с узлом 3.
8. Составляем **моментное уравнение равновесия** для оставленной (правой) части относительно найденной точки Риттера (узла 3) и определяем искомое усилие.
7. При определении усилия  $S_{36}$  **точка Риттера**, как точка пересечения линий действия двух других усилий  $S_{76}$  и  $S_{32}$ , не подлежащих определению в данный момент, **уходит в бесконечность**. В этом случае моментное уравнение равновесия вырождается в уравнение равновесия в проекциях на ось, перпендикулярную линиям, уходящим в бесконечность.



$$\sum M_{i6}^{\text{прав}} = 0; \quad S_{32}h + R_B 3d - F_3 2d - F_2 d = 0$$

$$S_{32} = \frac{-R_B 3d + F_3 2d + F_2 d}{h}$$

$$\sum M_{i3}^{\text{прав}} = 0; \quad -S_{76}h + R_B 2d - F_3 d = 0$$

$$S_{76} = \frac{R_B 2d - F_3 d}{h}$$

$$\sum Y_i^{\text{прав}} = 0; \quad -S_{36} \sin \alpha + R_B - F_2 - F_3 = 0$$

$$S_{36} = \frac{R_B - F_2 - F_3}{\sin \alpha}$$

**Для определения других усилий необходимо провести другое сечение (п.2) и повторить описанные действия (пп. 3,4,....)**

# Лекция 4 (продолжение – 4.3 – дополнительный материал)

**Понятия о линиях влияния опорных реакций и усилий.** Железнодорожные мосты, сооружаемые с использованием таких элементов, как фермы и балочные конструкции, при эксплуатации подвергаются подвижной многоосной нагрузке. При движении поезда усилия в элементах изменяются по некоторому закону и требуется определить наиболее опасные расположения такой нагрузки на сооружении. Исходным аппаратом решения этой задачи являются линии влияния усилий. Линии влияния широко используются в строительной механике.

**Линия влияния усилия** – график изменения усилия в зависимости от положения **единичной подвижной нагрузки**.

Выражения для усилий в стержнях фермы от постоянной нагрузки содержат величину опорной реакции, например:

$$S_{36} = \frac{R_B - F_2 - F_3}{\sin \alpha}$$

В случае рассмотрения единичной подвижной нагрузки ( $F_1 = F_2 = F_3 = 0, P = 1$ ) соответствующие выражения будут различными в зависимости от расположения единичной нагрузки:

груз находится слева от сечения I-I:

$$S_{36} = \frac{R_{B3}}{\sin \alpha}$$

груз находится справа от сечения I-I (на оставленной части фермы):

$$S_{36} = \frac{R_{B3} - 1}{\sin \alpha}$$

Таким образом, линия влияния усилия  $S_{36}$  может быть построена с помощью линии влияния опорной реакции  $R_B$ :

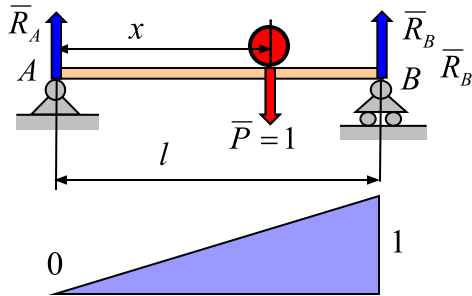
груз находится слева от сечения I-I:  
(левая ветвь)

$$\text{Л.в. } S_{36} = \frac{\text{Л.в. } R_{B3}}{\sin \alpha}$$

груз находится справа от сечения I-I:  
(правая ветвь)

$$\text{Л.в. } S_{36} = \frac{\text{Л.в. } R_{B3} - 1}{\sin \alpha}$$

**Построение линии влияния опорной реакции** – Ферму можно в данном случае представить в виде обычной балки:



1. Отбрасываем связи и заменяем реакциями:
2. Составляем моментное уравнение равновесия и находим величину реакции в функции от координаты положения груза:
3. Подставляя значения  $x = 0$  и  $x = l$  строим график изменения значения опорной реакции (линию влияния):

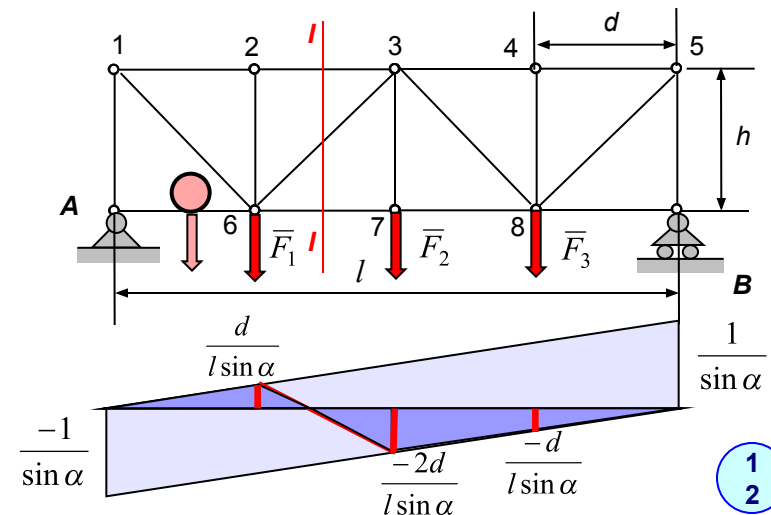
$$\sum M_{iA} = 0; \quad R_B l - 1x = 0$$

$$R_B = \frac{x}{l}$$

**Построение линии влияния усилия в стержне  $S_{36}$ :**

Построенная линия влияния позволяет легко найти величину усилия от любой статической (постоянной) вертикальной нагрузки как сумму произведений величин сил на значения ординат линии влияния:

$$S_{36} = \sum F_i y_i = F_1 \frac{d}{l \sin \alpha} + F_2 \left( \frac{-2d}{l \sin \alpha} \right) + F_3 \left( \frac{-d}{l \sin \alpha} \right)$$



# Лекция 4 (продолжение – 4.4)

■ **Равновесие сочлененных тел.** Железнодорожные и строительные конструкции могут состоять из сочлененных между собой тел (балок, ферм). Количество наложенных связей может превышать число независимых уравнений равновесия, которые можно составить для рассматриваемой конструкции. Такие задачи являются **статически неопределимыми**. Степень статической неопределимости для плоских систем равна:

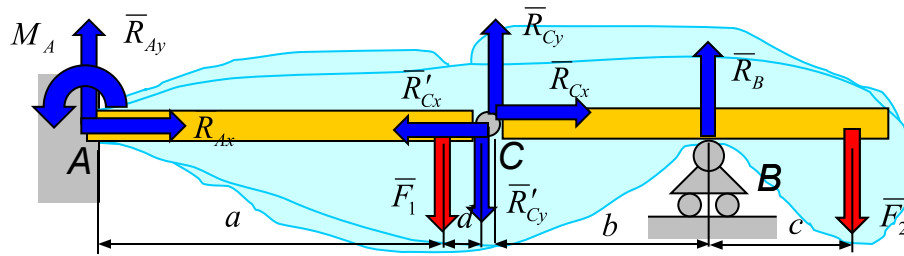
$$n = 3Ж + 2Ш + С - 3Д$$

где  $Д$  – число жестких дисков,  $Ж$  – число жестких заделок,  
 $Ш$  – число неподвижных шарниров (опорных и соединяющих диски между собой),  
 $С$  – число шарнирных стержней (опорных или соединяющих диски между собой) или подвижных шарниров

**В теоретической механике возможно решение только статически определимых задач, в которых количество связей равно числу независимых уравнений равновесия ( $n = 0$ ).**

$$n = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = 0$$

1. Выберем в качестве объекта всю конструкцию.
2. Отбросим связи и заменим их действие реакциями.
3. Число неизвестных реакций – 4, а количество независимых уравнений - 3. Это означает, что необходимо **расчлнить** конструкцию – отбросить шарнир С и заменить его действие на каждую из частей реакциями.



4. Число неизвестных реакций – 8, а количество независимых уравнений равновесия для обеих частей -  $3 \cdot 2 = 6$ .  
 С использованием аксиомы действия и противодействия для каждой пары реакций шарнира С общее число неизвестных реакций уменьшается до 6 и равно общему числу уравнений равновесия:

$$(CB): \sum X_i = 0; \quad R_{Cx} = 0;$$

$$\sum M_{Ci} = 0; \quad R_B b - F_2(b+c) = 0;$$

$$\sum M_{Bi} = 0; \quad -R_{Cy} b - F_2 b = 0.$$

$$\bar{R}'_{Cx} = -\bar{R}_{Cx}, \text{ но } R'_{Cx} = R_{Cx};$$

$$\bar{R}'_{Cy} = -\bar{R}_{Cy}, \text{ но } R'_{Cy} = R_{Cy}.$$

5. Решение полученной системы уравнений не представляет особых затруднений в указанном порядке: от **вспомогательной** балки СВ (не может оставаться в равновесии без балки АС) к **основной** балке АС (может находиться в равновесии без балки СВ).

$$(AC): \sum X_i = 0; \quad R_{Ax} - R'_{Cx} = 0;$$

$$\sum Y_i = 0; \quad R_{Ay} - R'_{Cy} - F_1 = 0;$$

$$\sum M_{Ai} = 0; \quad M_A - R'_{Cy}(a+d) - F_1 a = 0.$$

$$M_A^{\text{удерж}} > M_A^{\text{опрок}}$$

■ **Равновесие рычага.** Рычаг – твердое тело, имеющее одну неподвижную точку. Рычаг имеет одну степень кинематической подвижности ( $w = -n = 3Д - 3Ж - 2Ш - С = 3 \cdot 1 - 3 \cdot 0 - 2 \cdot 1 - 0 = 1$ ) и в равновесии может быть лишь при определенном соотношении активных сил, действующих на рычаг.

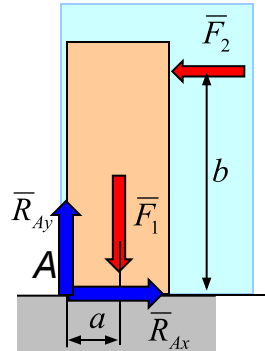
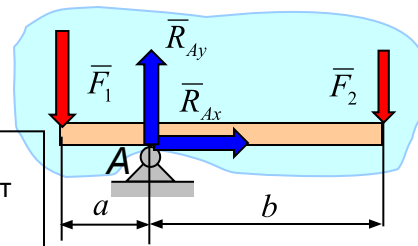
■ **Уравнения равновесия рычага.** Применяя общий подход составления уравнений равновесия к рычагу получаем:

$$\sum X_i = 0; \quad R_{Ax} = 0;$$

$$\sum Y_i = 0; \quad R_{Ay} - F_1 - F_2 = 0;$$

$$\sum M_{Ai} = 0; \quad F_1 a - F_2 b = 0.$$

Во многих случаях значением опорных реакций не интересуются и искомое соотношение сил определяют из последнего моментного уравнения, которое и принимается за **уравнение равновесия рычага**.



Уравнение равновесия рычага используется при **расчете подпорной стенки или груза на опрокидывание**:  
**Условие устойчивости на опрокидывание:** Удерживающий момент относительно неподвижной точки (от  $F_1$ ) должен быть больше опрокидывающего момента (от  $F_2$ ) относительно этой же точки.



# Лекция 4 (продолжение – 4.5 – дополнительный материал)

■ **Кинематический способ определения реакций и усилий.** Способ основывается на принципе возможных перемещений:

■ **Принцип возможных перемещений** – Для равновесия материальной системы, подчиненной стационарным, двухсторонним и идеальным связям, необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех активных сил на любом возможном перемещении из предполагаемого положения равновесия равнялась нулю:

$$\delta A^F = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k \delta \vec{r}_k = 0.$$

**Стационарные связи** – не зависящие от времени.

**Двухсторонние связи** – препятствующие перемещениям в обоих противоположных направлениях (жесткая заделка, шарнир, стержень являются двухсторонними связями, нить, гладкая поверхность – односторонние связи). Если связь односторонняя, то достаточно просто не рассматривать в качестве возможных перемещений перемещения, соответствующие тому направлению, в котором связь не может удерживать объект, например, в направлении отрыва объекта от гладкой поверхности.

**Идеальные связи** – работа которых на любом возможном перемещении равна нулю.

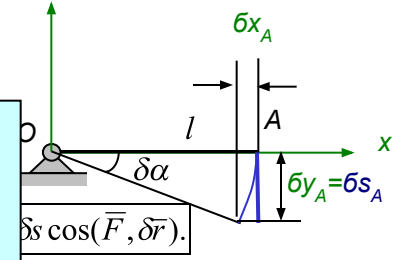
Если связь не идеальная, то реакция такой связи должна быть причислена к действующим (активным) силам, например, сила трения шероховатой поверхности добавляется к активным силам.

■ **Возможные перемещения** – бесконечно малые перемещения, допускаемые наложенными на систему связями. Возможные перемещения не зависят от приложенных к системе сил.

■ **Вычисление возможных перемещений:** - в силу малости возможных перемещений при повороте твердого тела любая его точка может рассматриваться движущейся не по дуге, а по перпендикуляру к радиусу вращения в сторону угла поворота:

$$\delta x_A = l - l \cos \delta\alpha$$

$$\delta y_A = l \sin \delta\alpha$$



Заметим, что

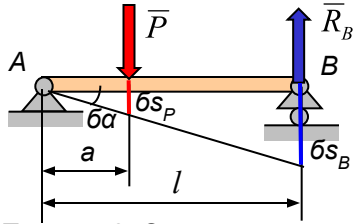
1. для нахождения опорного момента  $M_A$  из уравнений статики потребовалось бы решить как минимум три уравнения равновесия;
2. эпюра возможных перемещений пропорциональна линии влияния усилия;
3. если задать возможное перемещение для искомой реакции равным 1, например,  $\delta y_A = 1$ , то эпюра перемещений будет полностью тождественна линии влияния поскольку

$$\delta A = M_A \cdot 1 + 1 \cdot \delta s_F(z) = 0; \quad M_A = -\delta s_F(z).$$

■ **Возможная работа силы** – элементарная работа силы

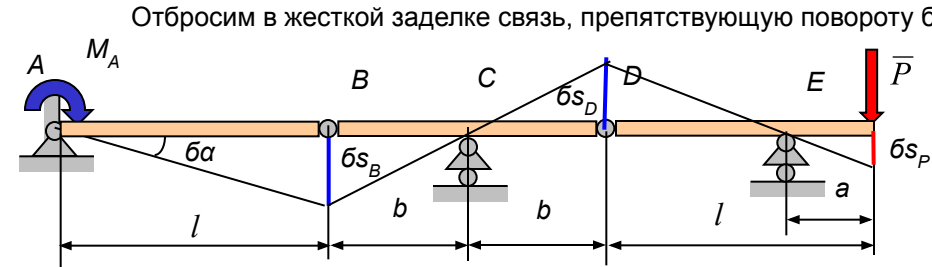
■ **Примеры использования принципа возможных перемещений**

**Пример 1.** Определить реакции балки в правой опоре:



Без правой опоры балка падает. Придадим ей вращательное перемещение  $\delta\alpha$  к активным силам. Зададим реакцию в правой опоре равной 1. Вычислим возможные перемещения. Запишем сумму работ:

**Пример 2.** Определить опорный момент многопролетной балки:



Отбросим в жесткой заделке связь, препятствующую повороту балки, и заменим ее парой сил  $M_A$ :

Вычислим возможные перемещения:

$$\delta s_B = l \delta\alpha; \quad \delta s_D = \delta s_B = l \delta\alpha;$$

$$\delta s_F = \frac{a}{l-a} \delta s_D = \frac{a}{l-a} l \delta\alpha.$$

Вместо реакции в правой опоре  $R_B$  приложим единичную силу. Действительных перемещений не будет. Запишем сумму работ: заменим ее реакцией:

$$R_B = \frac{Pa \delta\alpha}{l \delta\alpha} = \frac{Pa}{l}.$$

Запишем сумму работ:  $\delta A = M_A \delta\alpha + F \delta s_F = 0.$

$$M_A \delta\alpha + F \frac{a}{l-a} l \delta\alpha = 0.$$

$$M_A = -F \frac{a}{l-a} l.$$