

Данилов Н.Н.

«Роль и место математического моделирования в прикладных исследованиях»

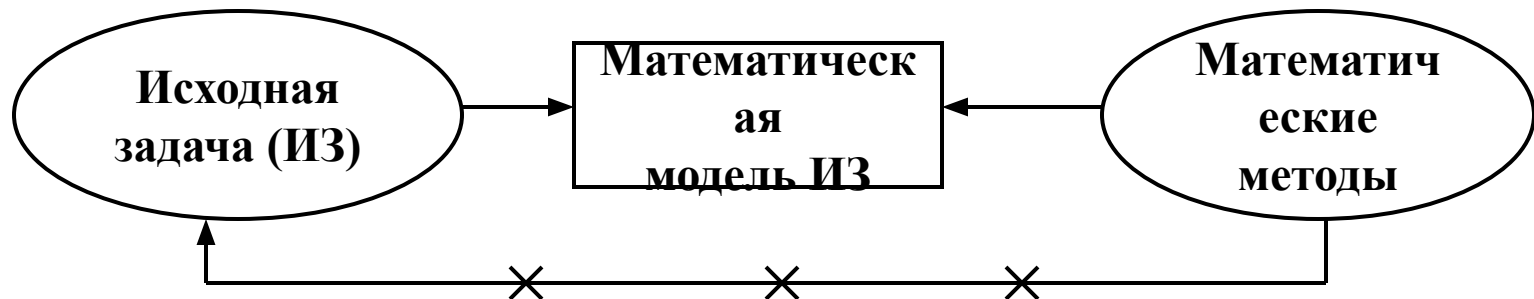
- Методология прикладных исследований;
- Математическое моделирование как средство научного познания;
- Схема и примеры математического моделирования.

Математическая модель

Суть – упрощенная схема (макет) реального объекта, системы, процесса;

Элементы – буквенные символы и математические соотношения (функции, формулы, неравенства и др.);

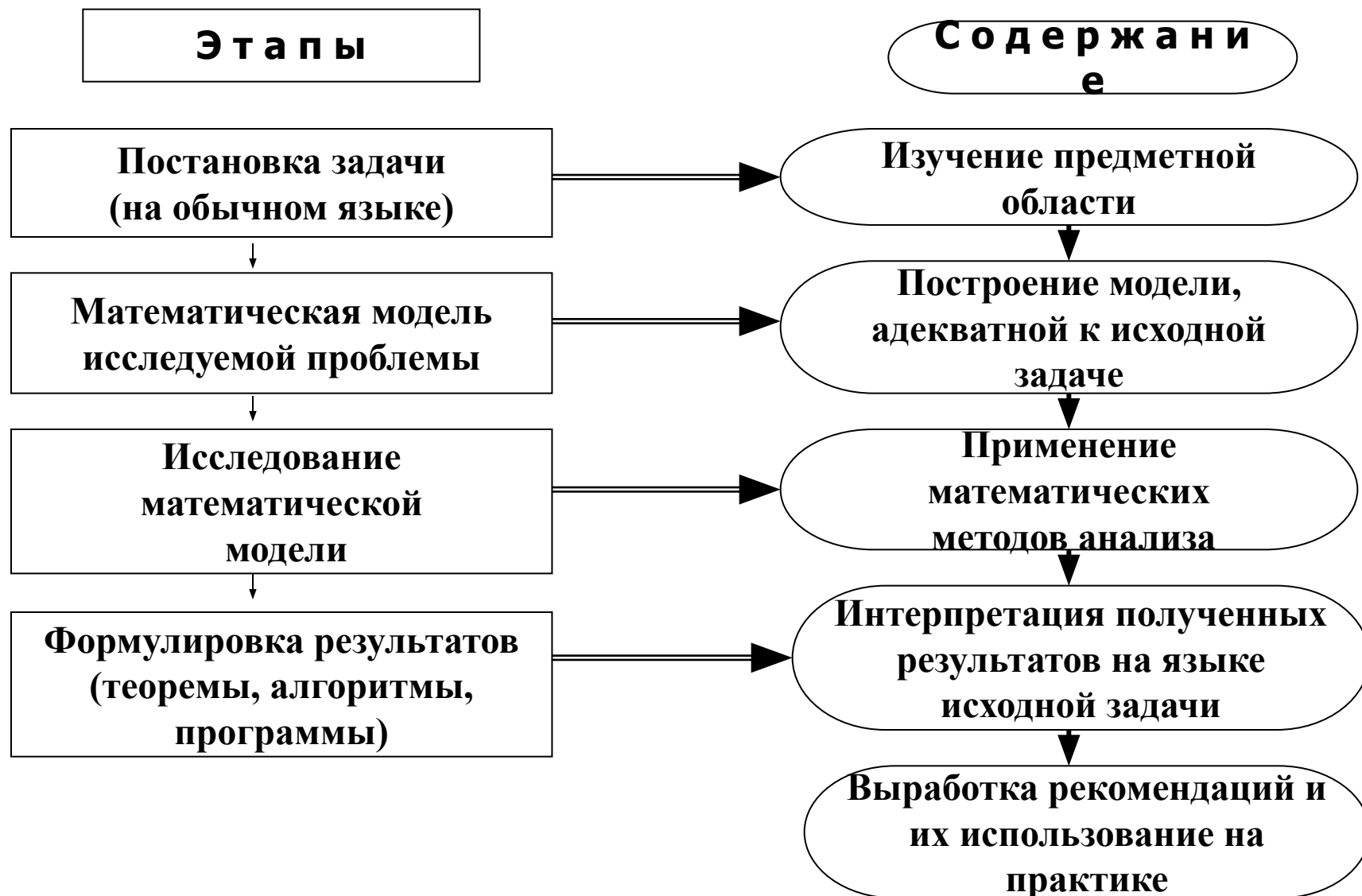
Форма – строгая математическая задача



Предназначение и роль математических моделей

- Возможность применения строгих, точных и универсальных математических методов;
- Возможность использования статистических, экспертных, нормативных данных и новых информационных и вычислительных технологий;
- Исключение необходимости проведения дорогостоящих экспериментов на исследуемом объекте;
- Возможность многократного экспериментирования на модели без дополнительных капиталовложений;
- Получение наилучших вариантов решения проблемы (исходной задачи).

Схема применения математических моделей в прикладных исследованиях



Математическая модель задачи потребителя

Исходя из цен товаров и своего бюджета приобрести те виды и то количество товаров, чтобы от их потребления получить максимальную пользу.

Обозначения: $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ → max – набор товаров;
 $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ – вектор цен; k – доход потребления; u – функция полезности.

Модель:

$$\begin{aligned} &u(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \max \\ &\text{при условиях} \\ &p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n \leq k, \\ &x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0. \end{aligned}$$

Решение: $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ - спрос потребителя

Математическая модель задачи фирмы на максимизацию прибыли

Исходя из запасов ресурсов их цен и цен товаров, произвести такое их количество, чтобы получить максимальную прибыль.

$$P(y; x_1, \dots, x_k) = py - \sum_{j=1}^m w_j x_j \rightarrow \max$$

при условиях

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_k); \quad x_j \leq v_j, \quad j = 1, \dots, m.$$

Решение: $y^* = f(x_1^*, \dots, x_k^*)$ – предложение фирмы.

Математическая модель задачи фирмы на МИНИМИЗАЦИЮ затрат

|| Произвести фиксированный (плановый) объем выпуска с минимальными затратами.

$$C(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^m w_j x_j \rightarrow \min$$

при условиях

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = y^*; x_1 \geq 0, \dots, x_k \geq 0.$$

Решение: $x^* = (x_1^*, \dots, x_k^*)$ – спрос на ресурсы.

Задача инвестора: Формирование оптимального инвестиционного портфеля

Доступные виды финансовых активов:

- Депозиты банков (денежные вклады);
- Паевые инвестиционные фонды;
- Ценные бумаги(акции, облигации крупных компаний);
- Драгметаллы;
- Валюта;
- Недвижимость (в том числе жилье).

Учитываемые характеристики финансовых активов:

- Доходность;
- Ликвидность;
- Управляемость;
- Возвратность (периодичность, процент);
- Уровень риска;
- Уровень инфляции.

Обозначения к задаче инвестора

$\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)$ – вектор долей k финансовых активов
(инвест. портфель);

$\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_l)$ – вектор, характеризующий состояние
(параметры) рынка;

$\xi^i = (\xi_1^i, \xi_2^i, \dots, \xi_k^i)$, $i = 1, \dots, m$, – допустимые варианты
структуры инвестиционного портфеля;

$\eta^j = (\eta_1^j, \eta_2^j, \dots, \eta_l^j)$, $j = 1, \dots, n$, – допустимые состояния
инвестиционного рынка;

a_{ij} – прибыль инвестора в ситуации (ξ^i, η^j) .

Модель задачи инвестора в форме игры с природой:

$$\begin{array}{c}
 \xi^1 \\
 \xi^2 \\
 \dots \\
 \xi^m
 \end{array}
 \rightarrow
 \begin{array}{cccc}
 \eta^1 & \eta^2 & \dots & \eta^n \\
 \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\
 \left(\begin{array}{cccc}
 a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
 a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}
 \end{array} \right)
 \end{array}$$

Решение ЗИ: оптимальный портфель инвестора

$\xi^{i^*} = (\xi_1^{i^*}, \dots, \xi_k^{i^*})$ и оптимальная (в смысле минимакса) прибыль $a_{i^*j^*}$.

Модель задачи инвестора в форме задачи нелинейного программирования (модель Марковица)

$$\min \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \delta_{ij} \xi_i \xi_j$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^k \alpha_j \xi_j \geq b, \quad \sum_{j=1}^k \xi_j = 1, \quad \xi_j \geq 0, \quad j=1, \dots, n,$$

где δ_{ij} - ковариация, α_j - ожидаемая прибыль от единицы финансового актива вида j , b - уровень доходности портфеля.

Концепция устойчивого развития как новая модель развития цивилизации

Основные этапы развития:

- **Стокгольмская конференция по окружающей среде (1972)** – принятие 26 принципов об окружающей среде;
- **Доклад Международной комиссии по окружающей среде «Наше общее будущее» (1987)** – необходимость «устойчивого развития» человеческого общества;
- **Конференция ООН по окружающей среде и развитию (1992)** – концепция устойчивого развития;
- **Создание комиссии ООН по устойчивому развитию (1993);**
- **«Концепция перехода РФ к устойчивому развитию» (Указ Президента РФ, 1996).**

Основные принципы устойчивого развития

(Из стокгольмской декларации (1972))

- Принцип 1.** Человек имеет основное право на свободу, равенство и благоприятные условия жизни в окруж. среде, качество кот. позволяет вести достойную и процвет. жизнь, и несет главную ответственность за охрану и улучшение окруж. среды на благо нынешнего и будущих поколений. В связи с этим политика поощрения или увековечения апартеида, расовой сегрегации, дискриминации, колониального и др. форм угнетения и иностранного господства осуждается и должна быть прекращена;
- Принцип 2.** Природ. Ресурсы Земли, включая воздух, землю, флору и фауну, и особенно репрезентативные образцы естественных экосистем, должны быть сохранены на благо нынешнего и будущих поколений путем тщательного планирования и управления по мере необх-ти;
- Принцип 3.** Способ-ть Земли производить жизненно важные восполняемые ресурсы должна поддерживаться, а там, где это практически желательно и осуществимо, восстанавливаться и улучшаться;
- Принцип 4.** Человек несет особую ответственность за сохранение и разумное управл. продуктами живой природы и ее среды, кот. в наст. время наход-ся под серьезной угрозой в связи с рядом неблагопр. факторов. Поэтому в планир. эконо. развития важное место должно уделяться сохранению природы, включая живую природу;
- Принцип 5.** Невосполн. ресурсы Земли должны разрабат-ся т.о., чтобы обеспечивалась защита от истощения этих ресурсов в будущем и чтобы выгоды от их разработки получало все человечество.

Модель устойчивого развития экономического региона

Требование к математической модели:

- 1) учет трех секторов региона – социального, экономического, экологического – и взаимосвязанного их развития;
- 2) наличие в модели параметров управления развитием региона на долгосрочном интервале времени;
- 3) учет многоцелевого характера развития региона;
- 4) формализация основных принципов и факторов устойчивого развития региона;
- 5) наличие параметров, определяющих необходимые и достаточные предпосылки для перехода на «рельсы» устойчивого развития (условие применимости модели).

Цель: Разработка общего методологического подхода к исследованию вопросов у.р. с применением матем. моделирования как метода научного познания.

Система обозначений

$[0, T]$ - плановый период;

$I(t)$ - выпуск продукции в год t ;

$P_i(t)$ - диапазоны возрастов;

$c_1 B_L(t), B_1(t)$ - предельный и желаемый фертильности;

W_A - ст-ть ввода в эксплуатацию гектара земли;

I_X - доли с/х инвестиций;

M_Z - скорость деградации плодородия почвы;

T_W - время регенерации плодородия почвы;

Z_{LA} - скорость генерации загрязнения;

$T_Z^0 = c_Z T_Z$ - характерное время абсорбции загрязнения;

$D_{Li}, i = 1, \dots, 4$ - смертность в различных диапазонах
возрастов;

Система обозначений (продолжение)

u_1, u_2 - доли инвестиций в промышл. и пр-во услуг;

T_1 - фиксированное время износа основных фондов промышл. предприятий;

T_S - время износа фондов сервисных предприятий;

u_3 - доля инвестиций в производство пищи;

u_4 - доля инвестиций на восстановление почвы, разрушенной эрозией;

$q_E = \text{const}$ - стоимость восстановления одного гектара земли;

u_5 - доля инвестиций на восстановление ресурсов;

u_6 - доля инвестиций на борьбу с загрязнениями;

$q_R = \text{const}$ - стоимость восстановления единицы ресурса;

$q_Z = \text{const}$ - стоимость очистки единицы загрязнения;

Система обозначений (продолжение)

$q_R = const$ - максим. кол-во средств, выделяемых на контроль за рождаемостью;

D_{L1} - вероятность смерти индивидуума в первом диапазоне возрастов;

$\frac{1}{q_P} U_P \in [0,1]$ - множитель эффект. контроля над рожд.;

C_Y - показатель плодородия целинной земли;

$\mu_j(t)$ - минимально возможная доля продукта для сектора.

Математическая модель Экон-го региона

$$x_1(t) = x_1(t-1) \left(1 - \frac{1}{T_I} \right) + I(t)u_1(t), \quad (1)$$

$$x_2(t) = x_2(t-1) \left(1 - \frac{1}{T_S} \right) + I(t)u_2(t), \quad (2)$$

$$x_3(t) = x_3(t-1) - \frac{I(t)u_3(t)I_X}{W_A}, \quad (3)$$

$$x_4(t) = x_4(t-1)(1 + \alpha) - \frac{u_4(t)I(t)}{q_E}, \quad (4)$$

$$x_5(t) = x_5(t-1)(1 - \beta) + \frac{I(t)u_5(t)}{q_R}, \quad (5)$$

$$x_6(t) = x_6(t-1) \left(1 - \frac{1}{T_Z^0} \right) + Z_{IA} - \frac{I(t)u_6(t)}{q_Z}, \quad (6)$$

Математическая модель Экон-го региона

(продолжение)

$$x_7(t) = x_7(t-1) \left(1 - D_{L1} - \frac{1}{15} \right) + \frac{p_2(t)}{2 \cdot 30} \left(B_2(t) + \frac{I(t)}{q_P} u_7(t) (B_1(t) - B_2(t)) \right), \quad (7)$$

$$y(t) = y(t-1) \left(1 - \frac{1}{T_W} - M_Z \right) + \frac{c_Y}{T_W}, \quad (8)$$

$$a_U(t) = a_U(t-1)(1 - \gamma), \quad (9)$$

$$a(t) = a(t-1) - a_U(t-1) - x_3(t-1) - x_4(t-1), \quad (10)$$

$$p_3(t) = p_3(t-1) \left(1 - D_{L3} - \frac{1}{20} \right) + \frac{p_2(t-1)}{30}, \quad (11)$$

$$p(t) = x_7(t) + \sum_{i=2}^4 p_i(t), \quad (12)$$

Математическая модель экон-го региона (продолжение)

$$\sum_{j=1}^7 u_j(t) + G_C \leq 1, \quad (13)$$

$$u_j(t) \geq \mu_j(t), \quad j = 1, \dots, 7, \quad (14)$$

$$x_j(t) \geq 0, \quad j = 3, 4, 6, 7, \quad x_5(t+1) - x_5(t) \leq 0, \quad t = 0, \dots, T-1. \quad (15)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F_1 = \sum_{t=1}^T x_6(t) \rightarrow \min, \\ F_2 = \sum_{t=1}^T I(t) \left(1 - \sum_{j=1}^7 u_j(t) - G_C \right) \rightarrow \min, \\ F_3 = \sum_{t=1}^T \frac{x_2(t)}{p(t)} \rightarrow \max. \end{array} \right. \quad (16)$$

Математическая модель экон-го региона (продолжение)

$$x_j(0) = x_j^0, j = 1, \dots, 7,$$

$$a_U(0) = a_U^0, a(0) = a^0, y(0) = y^0, \quad (17)$$

$$p_i(0) = p_i^0, i = 2, 3, 4.$$

$$x_j(T) = x_j^T, j = 1, \dots, 7. \quad (18)$$

Элементы модели (1)-(18) у. р. региона

(1) – (7) – уравнения движения,

(8) – (12) – вспомогательные соотношения,

(13) – (15) – ограничения на фазовые переменные и управляющие параметры,

(16) – функционалы, характеризующие качество достижения цели управления,

(17) – состояние системы в начальный момент времени,

(18) – планируемое конечное состояние системы,

$x = (x_1, \dots, x_7)$ - вектор фазового состояния,

$u = (u_1, \dots, u_7)$ - управляющие параметры.