Данилов Н.Н.

«Роль и место математического моделирования в прикладных исследованиях»

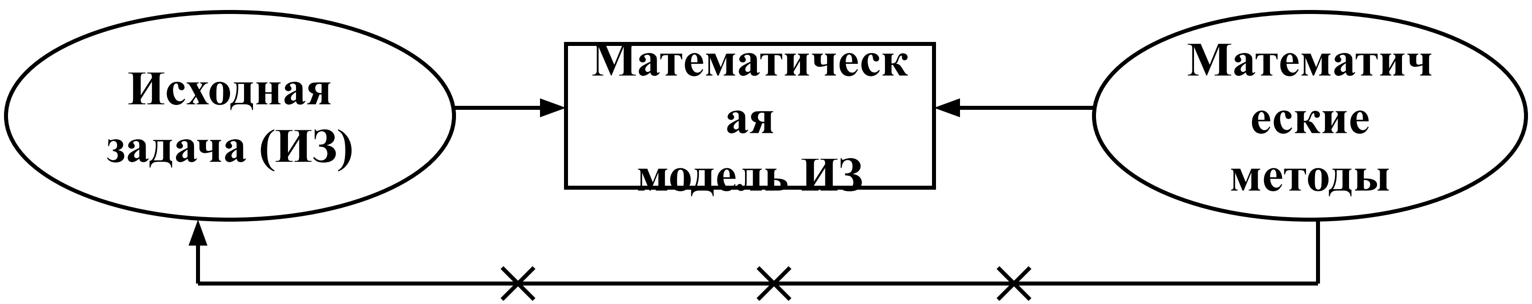
- Методология прикладных исследований;
- Математическое моделирование как средство научного познания;
- Схема и примеры математического моделирования.

Математическая модель

Суть – упрощенная схема (макет) реального объекта, системы, процесса;

Элементы – буквенные символы и математические соотношения (функции, формулы, неравенства и др.);

Форма – строгая математическая задача



Предназначение и роль математических моделей

- Возможность применения строгих, точных и универсальных математических методов;
- Возможность использования статистических, экспертных, нормативных данных и новых информационных и вычислительных технологий;
- Исключение необходимости проведения дорогостоящих экспериментов на исследуемом объекте;
- Возможность многократного экспериментирования на модели без дополнительных капиталовложений;
- Получение наилучших вариантов решения проблемы (исходной задачи).

Схема применения математических моделей в прикладных исследованиях

Математическая модель задачи потребителя

Исходя из цен товаров и своего бюджета приобрести те виды и то количество товаров, чтобы от их потребления получить максимальную пользу.

Обозначения: $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \max$ **– набор товаров;** $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ **– вектор цен;** k **– доход потребления;** u **– функция полезности.**

Модель:

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \max$$

при условиях

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n \le k,$$

$$x_1 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0.$$

Решение: $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ **- спрос потребителя**

Математическая модель задачи фирмы на максимизацию прибыли

Исходя из запасов ресурсов их цен и цен товаров, произвести такое их количество, чтобы получить максимальную прибыль.

$$P(y; x_1, \ldots, x_k) = py - \sum_{j=1}^{m} w_j x_j \to \max$$

при условиях

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_k); \;\; x_j \le v_j,\; j = 1, \ldots, m.$$

Решение: $y^* = f(x_1^*, \ldots, x_k^*)$ **– предложение фирмы.**

Математическая модель задачи фирмы на минимизацию затрат

Произвести фиксированный (плановый) объем выпуска с минимальными затратами.

$$C(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{j=1}^{m} w_j x_j \to \min$$

при условиях

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=y^*;\; x_1\ge 0,\ldots,x_k\ge 0.$$

Решение: $x^*=(x_1^*,\ldots,x_k^*)$ **– спрос на ресурсы.**

Задача инвестора: Формирование оптимального инвестиционного портфеля

Доступные виды финансовых активов:

- **Депозиты банков (денежные вклады);**
- **Паевые инвестиционные фонды;**
- **Ценные бумаги(акции, облигации крупных компаний);**
- **Драгметаллы;**
- **Валюта;**
- **Недвижимость (в том числе жилье).**

Учитываемые характеристики финансовых активов:

- **Доходность;**
- **Ликвидность;**
- **Управляемость;**
- **Возвратность (периодичность, процент);**
- **Уровень риска;**
- **Уровень инфляции.**

Обозначения к задаче инвестора

$\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)$ – **вектор долей *k* финансовых активов (инвест. портфель);**

$\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_l)$ – **вектор, характеризующий состояние (параметры) рынка;**

$\xi^i = (\xi_1^i, \xi_2^i, \ldots, \xi_k^i),\ i = 1, \ldots, m,$ – **допустимые варианты структуры инвестиционного портфеля;**

$\eta^j = (\eta_1^j, \eta_2^j, \ldots, \eta_l^j),\ j = 1, \ldots, n,$ – **допустимые состояния инвестиционного рынка;**

a_{ij} – **прибыль инвестора в ситуации** (ξ^i, η^j)**.**

Модель задачи инвестора в форме игры с природой:

$$\begin{array}{ccc}
 & & \begin{matrix} \eta^1 & \eta^2 & \dots & \eta^n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{matrix} \\
\begin{matrix}\xi^1\\ \xi^2\\ \dots\\ \xi^m\end{matrix} & \begin{matrix}\to\\ \to\\ \\ \to\end{matrix} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}
\end{array}$$

Решение ЗИ: оптимальный портфель инвестора $\xi^{i^*} = (\xi_1^{i^*},\dots,\xi_k^{i^*})$ и оптимальная (в смысле минимакса) прибыль $a_{i^* j^*}$.

Модель задачи инвестора в форме задачи нелинейного программирования (модель Марковица)

$$\min \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \delta_{ij} \xi_i \xi_j$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_i \xi_j \geq b, \ \ \sum_{j=1}^{k} \xi_j = 1, \ \ \xi_\mathrm{j} \geq 0, \ \ \mathrm{j} = 1, \ldots, \mathrm{n},$$

где δ_{ij} - ковариация, α_j - ожидаемая прибыль от единицы финансового актива вида j, b - уровень доходности портфеля.

Концепция устойчивого развития как новая модель развития цивилизации

Основные этапы развития:

- **Стокгольмская конференция по окружающей среде** (1972) – принятие 26 принципов об окружающей среде;
- **Доклад Международной комиссии по окружающей среде «Наше общее будущее»** (1987) – необходимость «устойчивого развития» человеческого общества;
- **Конференция ООН по окружающей среде и развитию** (1992) – концепция устойчивого развития;
- **Создание комиссии ООН по устойчивому развитию** (1993);
- **«Концепция перехода РФ к устойчивому развитию»** (Указ Президента РФ, 1996).

Основные принципы устойчивого развития

(Из стокгольмской декларации (1972))

Принцип 1. Человек имеет основное право на свободу, равенство и благоприятные условия жизни в окруж. среде, качество кот. позволяет вести достойную и процвет. жизнь, и несет главную ответственность за охрану и улучшение окруж. среды на благо нынешнего и будущих поколений. В связи с этим политика поощрения или увековечения апартеида, расовой сегрегации, дискриминации, колониального и др. форм угнетения и иностранного господства осуждается и должна быть прекращена;

Принцип 2. Природ. Ресурсы Земли, включая воздух, землю, флору и фауну, и особенно репрезентативные образцы естественных экосистем, должны быть сохранены на благо нынешнего и будущих поколений путем тщательного планирования и управления по мере необх-ти;

Принцип 3. Способ-ть Земли производить жизненно важные восполняемые ресурсы должна поддерживаться, а там, где это практически желательно и осуществимо, восстанавливаться и улучшаться;

Принцип 4. Человек несет особую ответственность за сохранение и разумное управл. продуктами живой природы и ее среды, кот. в наст. время наход-ся под серьезной угрозой в связи с рядом неблагопр. факторов. Поэтому в планир. эконом. развития важное место должно уделяться сохранению природы, включая живую природу;

Принцип 5. Невосполн. ресурсы Земли должны разрабат-ся т.о., чтобы обеспечивалась защита от истощения этих ресурсов в будущем и чтобы выгоды от их разработки получало все человечество.

Модель устойчивого развития экономического региона

Требование к математической модели:

1) учет трех секторов региона – социального, экономического, экологического – и взаимосвязанного их развития;

2) наличие в модели параметров управления развитием региона на долгосрочном интервале времени;

3) учет многоцелевого характера развития региона;

4) формализация основных принципов и факторов устойчивого развития региона;

5) наличие параметров, определяющих необходимые и достаточные предпосылки для перехода на «рельсы» устойчивого развития (условие применимости модели).

Цель: Разработка общего методологического подхода к исследованию вопросов у.р. с применением матем. моделирования как метода научного познания.

Система обозначений

$[0,T]$ - плановый период;

$I(t)$ - **выпуск продукции в год** t;

$P_i(t)$ - **диапазоны возрастов;**

$c_1 B_L(t), \mathrm{B}_1(\mathrm{t})$ - **придельный и желаемый фертильности;**

W_A - **ст-ть ввода в эксплуатацию гектара земли;**

I_X - **доли с/х инвестиций;**

M_Z - **скорость деградации плодородия почвы;**

T_W - **время регенерации плодородия почвы;**

Z_{LA} - **скорость генерации загрязнения;**

$T_Z^0 = c_Z T_Z$ - **характерное время абсорбции загрязнения;**

$D_{Li},\ i = 1,\ldots,4$ - **смертность в различных диапазонах возрастов;**

Система обозначений (продолжение)

u_1, u_2 - **доли инвестиций в промышл. и пр-во услуг;**

T_1 - **фиксированное время износа основных фондов промышл. предприятий;**

T_S - **время износа фондов сервисных предприятий;**

u_3 - **доля инвестиций в производство пищи;**

u_4 - **доля инвестиций на восстановление почвы, разрушенной эрозией;**

$q_E = const$ - **стоимость восстановления одного гектара земли;**

u_5 - **доля инвестиций на восстановление ресурсов;**

u_6 - **доля инвестиций на борьбу с загрязнениями;**

$q_R = const$ - **стоимость восстановления единицы ресурса;**

$q_Z = const$ - **стоимость очистки единицы загрязнения;**

Система обозначений (продолжение)

$q_R = const$ - **максим. кол-во средств, выделяемых на контроль за рождаемостью;**

D_{L1} - **вероятность смерти индивидуума в первом диапазоне возрастов;**

$\frac{1}{q_P} U_P \in [0,1]$ - **множитель эффект. контроля над рожд.;**

c_Y - **показатель плодородия целинной земли;**

$\mu_j(t)$ - **минимально возможная доля продукта для сектора.**

Математическая модель экон-го региона

$$x_1(t) = x_1(t-1)\left(1 - \frac{1}{T_I}\right) + I(t)u_1(t), \qquad (1)$$

$$x_2(t) = x_2(t-1)\left(1 - \frac{1}{T_S}\right) + I(t)u_2(t), \qquad (2)$$

$$x_3(t) = x_3(t-1) - \frac{I(t)u_3(t)I_X}{W_A}, \qquad (3)$$

$$x_4(t) = x_4(t-1)(1+\alpha) - \frac{u_4(t)I(t)}{q_E}, \qquad (4)$$

$$x_5(t) = x_5(t-1)(1-\beta) + \frac{I(t)u_5(t)}{q_R}, \qquad (5)$$

$$x_6(t) = x_6(t-1)\left(1 - \frac{1}{T_Z^0}\right) + Z_{IA} - \frac{I(t)u_6(t)}{q_Z}, \qquad (6)$$

Математическая модель экон-го региона (продолжение)

$$x_7(t) = x_7(t-1)\left(1 - D_{L1} - \frac{1}{15}\right) + \frac{p_2(t)}{2 \cdot 30}\left(B_2(t) + \frac{I(t)}{q_P} u_7(t)\big(B_1(t) - B_2(t)\big)\right), \qquad (7)$$

$$y(t) = y(t-1)\left(1 - \frac{1}{T_W} - M_Z\right) + \frac{c_Y}{T_W}, \qquad (8)$$

$$a_U(t) = a_U(t-1)(1-\gamma), \qquad (9)$$

$$a(t) = a(t-1) - a_U(t-1) - x_3(t-1) - x_4(t-1), \qquad (10)$$

$$p_3(t) = p_3(t-1)\left(1 - D_{L3} - \frac{1}{20}\right) + \frac{p_2(t-1)}{30}, \qquad (11)$$

$$p(t) = x_7(t) + \sum_{i=2}^{4} p_i(t), \qquad (12)$$

Математическая модель экон-го региона (продолжение)

$$\sum_{j=1}^{7} u_j(t) + G_C \le 1, \qquad (13)$$

$$u_j(t) \ge \mu_j(t),\ j = 1,\dots,7, \qquad (14)$$

$$x_j(t) \ge 0,\ j = 3,4,6,7,\ x_5(t+1) - x_5(t) \le 0,\ t = 0,\dots,T-1. \qquad (15)$$

$$\begin{cases} F_1 = \sum_{t=1}^{T} x_6(t) \to \min, \\ F_2 = \sum_{t=1}^{T} I(t)\left(1 - \sum_{j=1}^{7} u_j(t) - G_C\right) \to \min, \\ F_3 = \sum_{t=1}^{T} \dfrac{x_2(t)}{p(t)} \to \max. \end{cases} \qquad (16)$$

Математическая модель экон-го региона (продолжение)

$$x_j(0) = x_j^0,\ j = 1,\ldots,7,$$

$$a_U(0) = a_U^0,\ a(0) = a^0,\ y(0) = y^0, \qquad (17)$$

$$p_i(0) = p_i^0,\ i = 2,3,4.$$

$$x_j(T) = x_j^T,\ j = 1,\ldots,7. \qquad (18)$$

Элементы модели (1)-(18) у. р. региона

(1) – (7) – уравнения движения,

(8) – (12) – вспомогательные соотношения,

(13) – (15) – ограничения на фазовые переменные и управляющие параметры,

(16) – функционалы, характеризующие качество достижения цели управления,

(17) – состояние системы в начальный момент времени,

(18) – планируемое конечное состояние системы,

$x = (x_1, \ldots, x_7)$ - вектор фазового состояния,

$u = (u_1, \ldots, u_7)$ - управляющие параметры.