Показательная функция и её свойства

Муниципальное общеобразовательное учреждение гимназия № 33 г. Костромы
учитель математики Степанова О.Ю.

Применение показательной функции в природе и технике

Показательные функции часто используются при описании различных физических процессов:

- **Температура остывания чайника;**
- **Скорость падения в безвоздушном пространстве;**
- **При изучении падения парашютиста, капли дождевой воды, пушинки и т.д.**
- **Амплитуда колебания маятника, гири, качающейся на пружине;**
- **Давление воздуха в зависимости от высоты подъема;**
- **Ток самоиндукции в катушке после включения постоянного напряжения;**
- **Сила резания металлов;**
- **Когда радиоактивное вещество распадается, его количество или масса определяются с помощью показательной функции;**
- **Явление радиоактивного распада используется для определения возраста археологических находок, например, определен примерный возраст Земли, около 5,5 млрд. лет,**
- **Для поддержания эталона времени;**
- **Задача по заготовке древесины на участке через определенный промежуток времени;**
- **Прибыль предприятия за n-ый год работы находится по формуле сложных процентов с помощью показательной функции;**
- **В теории межпланетных путешествий одной из задач является задача об определении массы топлива, необходимого для того, чтобы придать ракете нужную скорость (формула К.Э. Циолковского);**
- **В теории вероятностей биномиальный закон (повторение опытов), закон Пуассона (редких событий), закон Релея (длина случайного вектора)**
- **Показательная функция также используется при решении некоторых задач судовождения.**

Показательная функция в физике

Барометрическая формула

$$p = p_0 e^{-h/H}$$

Движение тела в сопротивляющейся среде

$$V = v_0 e^{-kt/m}$$

Радиоактивный распад

$$m(t) = C e^{-kt} = m_0 2^{-t/T}$$

Охлаждение тел

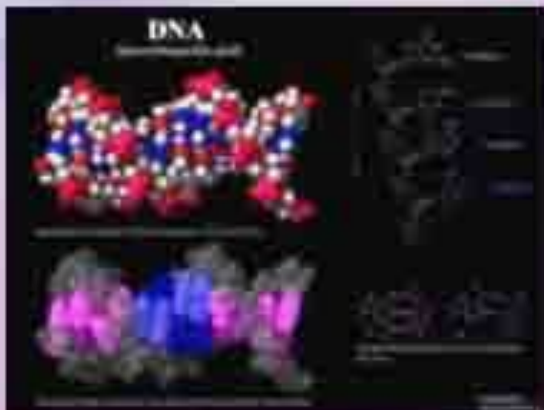
$$T = T_1 - C e^{-kt}$$

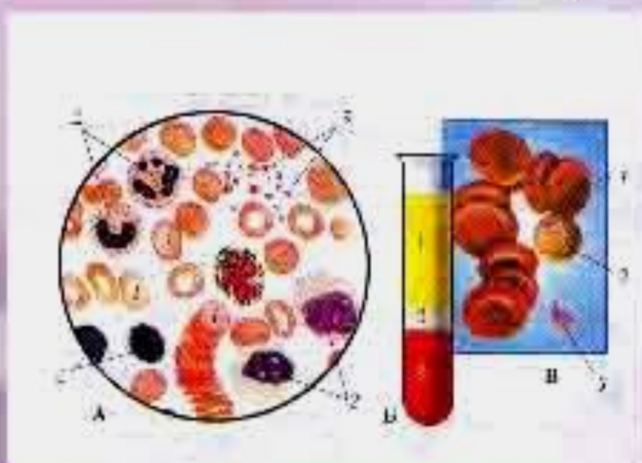
География

РОСТ
НАРОДОНАСЕЛЕНИЯ

$$N = N_0 e^{at}$$

Показательная функция в биологии





Рост различных видов микроорганизмов и бактерий, дрожжей и ферментов подчиняются одному закону: $N=N_0e^{kt}$

По этому закону возрастает количество клеток гемоглобина в организме человека, который потерял много крови

Задача. Примером быстрого размножения бактерий является процесс изготовления дрожжей, при котором по мере их роста производится соответствующая добавка перерабатываемой сахаристой массы. Увеличение массы дрожжей выражается показательной функцией: $m = m_0 1{,}2^t$,
где m_0 – первоначальная масса дрожжей,
t – время дрожжевания в часах,
m – масса дрожжей в процессе дрожжевания.
Вычислим m, если $m_0 =$ 10 кг и t = 9 ч.

Решение. Вычислим массу дрожжей в процессе дрожжевания:

$$m = 10 \cdot 1{,}2^9 \approx 51{,}6 \text{ кг.}$$

Ответ: масса полученных дрожжей $m \approx 51{,}6$ кг.

Задача :Численность популяции составляет 5 тыс. особей. За последнее время в силу разных причин (браконьерство, сокращение ареалов обитания) она ежегодно сокращалась на 8%. Через сколько лет (если не будут предприняты меры по спасению данного вида и сохранятся темпы его сокращения) численность животных достигнет предела – 2 тыс. особей, за которым начнётся вымирание этого вида?

Решение. Применим для вычисления времени формулу сложных процентов:

$$S_{\text{кон}} = S_{\text{нач}}\left(1+\frac{p}{100}\right)^x,$$ где

$S_{\text{кон}} =$ 2 тыс. – численность животных по истечению искомого времени;

$S_{\text{нач}} =$ 5 тыс. – численность животных в начальный момент времени;

p = 8 - % сокращения численности животных.

Предварительно разделив обе части уравнения на 1000, получим:

$$2 = 5\cdot\left(1+\frac{8}{100}\right)^x$$

$$\frac{2}{5} = \left(1+\frac{8}{100}\right)^x, \quad \frac{2}{5} = 1{,}08^x$$

$$x = \log_{1{,}08} 0{,}4 = \frac{\lg 0{,}4}{\lg 1{,}08} \approx 11$$ лет.

Ответ: приблизительно через 11 лет.

ФОРМУЛА СЛОЖНОГО ПРОЦЕНТНОГО РОСТА

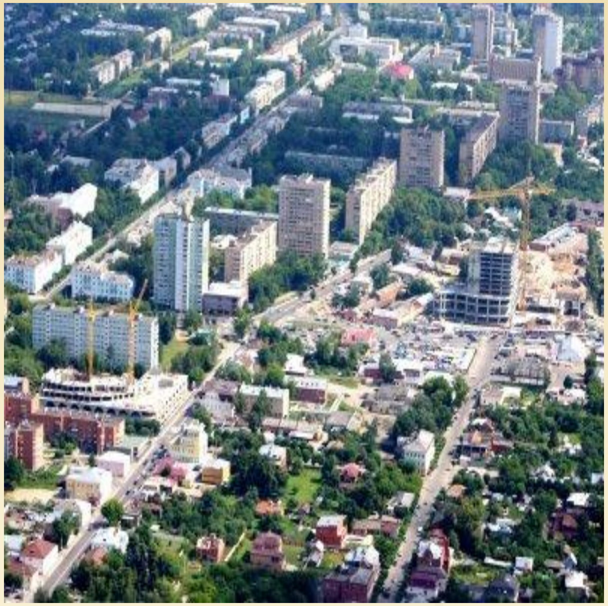
$$S_n = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \cdot S$$

p - % годовых

S - внесенная сумма

S_n - сумма, которая будет на счёте через *n* лет

Население города возрастает ежегодно на 3%. Через сколько лет население этого города увеличиться в 1,5 раза?



$$A = a\left(1+\frac{p}{100}\right)^x$$

а - население города

А = 1,5а

р = 3

х – неизвестно

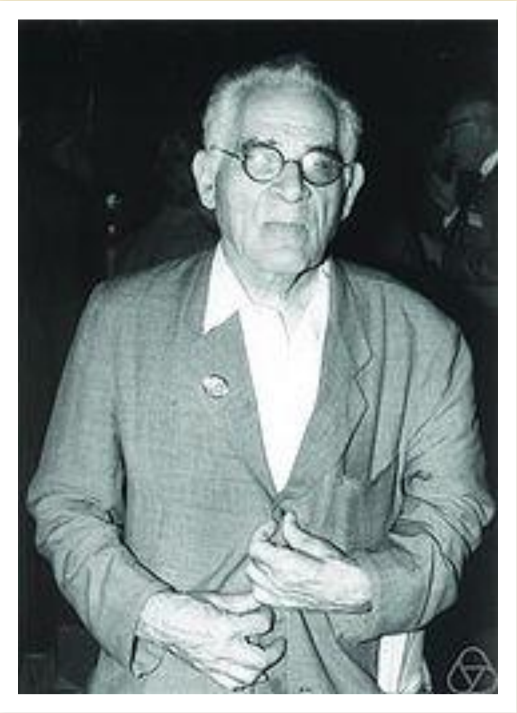
Решение:

$$1{,}5 = \left(1+\frac{3}{100}\right)^x$$ *или* $$1{,}03^x = 1{,}5$$

x·lg1,03 = lg1,5 , откуда x = $\dfrac{\lg 1{,}5}{\lg 1{,}03}$

$\boxed{x \approx}$ 14

Практическое применение показательной функции



«Вряд ли мне следует объяснять, что одна из важнейших задач математики – помощь другим наукам.

Стало уже общепринятым утверждение, что быстрее всего развиваются науки, фундаментальные результаты которых могут быть сформулированы математически. Используя математические методы, выводят важнейшие следствия, которые иным способом вряд ли можно было бы получить.

Одно это, не говоря уже о других аспектах, оправдывает претензии математики на титул Королевы Наук».

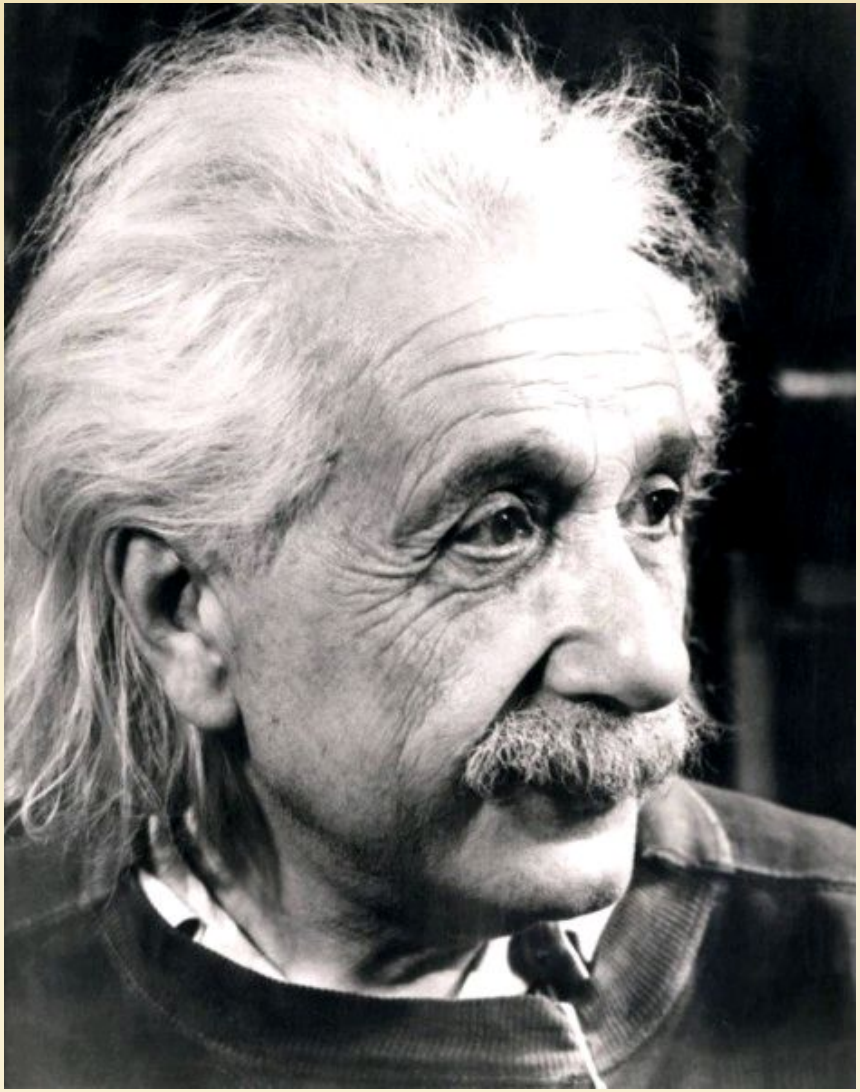
Морделл Л.

Свойства показательной функции

Свойства функции	$y=a^x$, при $a>0$	$y=a^x$,при $0<a<1$
Область определения	$D(y)=R$	$D(y)=R$
Четность	общего вида	общего вида
Точки пересечения с осями	с осью ОУ (0;1)	с осью ОУ (0;1)
Монотонность	возрастает	Убывает
Ограниченность	огр. снизу числом 0	огр. снизу числом 0
$y_{наиб}$ и $y_{наим}$	нет	нет
Непрерывность	непрерывна	Непрерывна
Наличие асимптот	горизонтальная: $y=0$	горизонтальная: $y=0$
Выпуклость	выпукла вниз на R	выпукла вниз на R

Множество значений $E(y) = (0; +\infty)$ $E(y) = (0; +\infty)$

Показательная функция $y = a^x$				
Область определения, непрерывность $x \in (-\infty; +\infty)$	**Множество значений**		**Монотонность**	
	Нет наибольшего значения	**Ограниченность снизу** **Горизонтальная асимптота $y = 0$**	**Возрастание** **основание** $a > 1$	**Убывание** **основание** $0 < a < 1$
• *Не нами свет начался, не нами и кончится* • *Век живи, век учись* • *Жизнь идёт как по маслу*	*Высоко летает, да низко садится*		*У медали две стороны*	
	Попал пальцем в небо	*Близок локоть, да не укусишь* *Видит око, да зуб неймёт*	*Живи не под гору, а в гору* *Хорошему человеку везде хорошо, а худому везде худо*	*Дальше кумы – меньше греха* *Горяч на почине, да скоро остыл*



«Мне приходится делить своё время между политикой и уравнениями. Однако уравнения, по-моему, гораздо важнее, потому что политика существует только для данного момента, а уравнения будут существовать вечно.

А. Эйнштейн

«Посредством уравнений, теорем
он уйму всяких разрешил проблем:
И засуху предсказывал, и ливни.
Поистине его познанья дивны»

Чосер, английский поэт, средние века

«Уравнения – это золотой ключ, открывающий все математические сезамы»

С. Коваль

Нобелевские лауреаты

Фамилии ученых - Нобелевских лауреатов, которые в разные годы 20-го столетия получили премию за исследования в области физики с использованием показательной функции.

- ***Пьер Кюри из Франции, 1903 г.***
- ***Ричардсон Оуэн из Англии, 1928 г.***
- ***Игорь Тамм из России, 1958 г.***
- ***Альварес Луис из США, 1968 г.***
- ***Альфвен Ханнес из Швеции, 1970 г.***
- ***Вильсон Роберт Вудро из Англии, 1978 г.***
- ***Жорес Алферов из России, 2000 г.***

Успехов в изучении показательной функции!