

*Кружок*

"Занимательная

математика"

Учитель: **Сухих Н.Н.**

# Цель данного кружка:

Дать учащимся, проявляющим повышенный интерес к математике, возможность углубленного изучения основного курса путем рассмотрения задач, требующих нестандартного подхода при своем решении.

Формирование мировоззрения учащихся, развитие их логического и творческого мышления.



# 7 класс

## Основные темы:

### 1. Решение текстовых задач.

- 1) задачи « на бассейны »
- 2) задачи « на пропорции»
- 3) задачи « на проценты »

### 2. Решение уравнений с модулем.

### 3. Решение различных заданий с параметрами.

#### Пропедевтика.

**Цель:** подвести учащихся к данной теме, используя материал 5-6 класса.

Н-р: 1) запишите число, в котором

а) 8 десятков и  $x$  единиц ( $\overline{8x} = 80+x$  )

б)  $x$  десятков и  $y$  единиц ( $\overline{xy} = 10x+y$  )\_\_

в) 5 сотен,  $x$  десятков и 4 единицы ( $\overline{5x4} = 504+ 10x$  )

2) при каких значениях  $a$  число 5 явл-ся корнем уравнения:  $(8-a)x = 5x$

3) Зная, что  $a > b$ , сравните числа:

а)  $-a$  и  $8-b$ ; б)  $-(a-4)$  и  $-b$

4. Решение уравнений, содержащих параметры.

Цель: формировать умение решать линейные уравнения с параметрами; развивать исследовательскую деятельность учащихся; использовать полученные навыки при решении нестандартных задач.

5. Решение систем линейных уравнений с параметрами.

При каких значениях параметра  $a$  система 
$$\begin{cases} 2x-3y=7 \\ ax-6y=14 \end{cases}$$

- а) имеет бесконечное множество решений;
- б) имеет единственное решение?

При каком значении параметра  $a$  система 
$$\begin{cases} 3x+y = -4 \\ x-ay = 8 \end{cases}$$

решений не имеет?

# 8 класс

## Основные темы:

1. Преобразование рациональных выражений.
2. Уравнения с параметрами, приводимые к линейным.

**Цель:** научиться решать уравнения, где требуется дополнительная проверка, связанная с ограничением их области определения

### Алгоритм решения уравнения с параметрами, сводящегося к линейному

1. Найти область допустимых значений неизвестного и параметров, входящих в уравнение.
2. Умножить обе части уравнения на общий знаменатель, преобразовать к виду линейного.
3. Найти недопустимые значения параметра.
4. Решить линейное уравнение с параметром.
5. Выписать ответ с учётом пунктов 3, 4.

$$\frac{x}{x+1} = a.$$

Решение:

1) ОДЗ:  $x \neq -1$ ;

2) Умножим обе части уравнения на  $x + 1 \neq 0$ , получим:

$$x = a(x + 1),$$

$$x = ax + a,$$

$$x - ax = a,$$

$$(1 - a)x = a.$$

3) Найдём недопустимые значения  $a$ :

Если  $x = -1$ , то  $(1 - a) \cdot (-1) = a$ ,  $a - 1 = a$ ,  $0 \cdot a = 1$ , корней нет.

Не существует значений  $a$ , при которых  $x = -1$ .

4)  $(1 - a)x = a$ .

1°. Если  $1 - a \neq 0$ ,  $a \neq 1$ , то  $x = \frac{a}{1 - a}$ ;

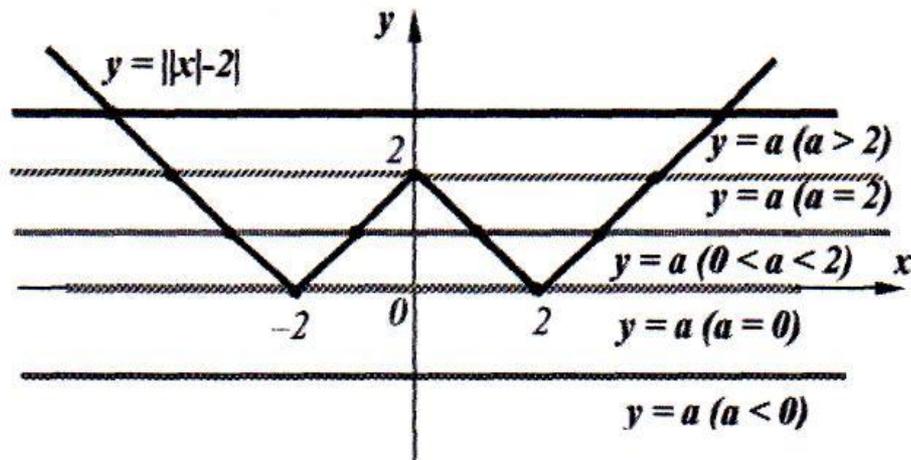
2°. Если  $1 - a = 0$ ,  $a = 1$ , то  $0 \cdot a = 1$ , корней нет.

Ответ: при  $a \neq 1$   $x = \frac{a}{1 - a}$ ; при  $a = 1$  корней нет.

### 3. Графический способ решения уравнений с параметром

Сколько корней имеет уравнение  $||x| - 2| = a$  при различных значениях параметра  $a$ ?

Решение: Построим график функции  $y = ||x| - 2|$ , проведя ряд последовательных преобразований:  $y = x - 2 \rightarrow y = |x| - 2 \rightarrow y = ||x| - 2|$ , и график функции  $y = a$  (см. рис. 5)



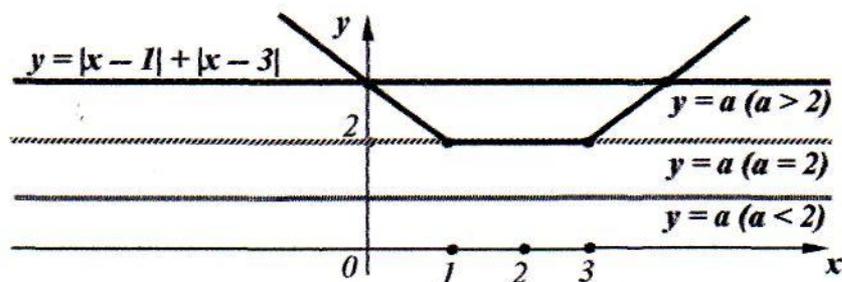
Ответ: при  $a < 0$  корней нет; при  $a = 0$  два корня; при  $0 < a < 2$  четыре корня; при  $a = 2$  три корня; при  $a > 0$  два корня.

Решить уравнение  $|x - 1| + |x - 3| = a$ .

Решение:

Построим графики функций  $y = |x - 1| + |x - 3|$  и  $y = a$

$$y = |x - 1| + |x - 3| = \begin{cases} 4 - 2x & \text{при } x < 1, \\ 2 & \text{при } 1 \leq x \leq 3, \\ 2x - 4 & \text{при } x \geq 3. \end{cases}$$



1. Если  $a < 2$ , то ломаная и прямая  $y = a$  не пересекаются. Уравнение корней не имеет.

2. Если  $a = 2$ , то ломаная и прямая совпадают при  $1 \leq x \leq 3$ . Уравнение имеет бесконечно много корней.

3. Если  $a > 2$ , то ломаная и прямая пересекаются в двух точках.

Уравнение имеет два корня:  $4 - 2x = a$  или  $2 - 4x = a$ ;  $x = \frac{4-a}{2}$   $x = \frac{a+4}{2}$ .

Ответ: при  $a < 0$  корней нет; при  $a = 2$ ,  $1 \leq x \leq 3$ ;

при  $a > 2$ ,  $x_1 = \frac{4-a}{2}$ ;  $x_2 = \frac{a+4}{2}$ .

Сколько решений в зависимости от  $a$  имеет уравнение  $|x + 2| = ax + 1$ ?

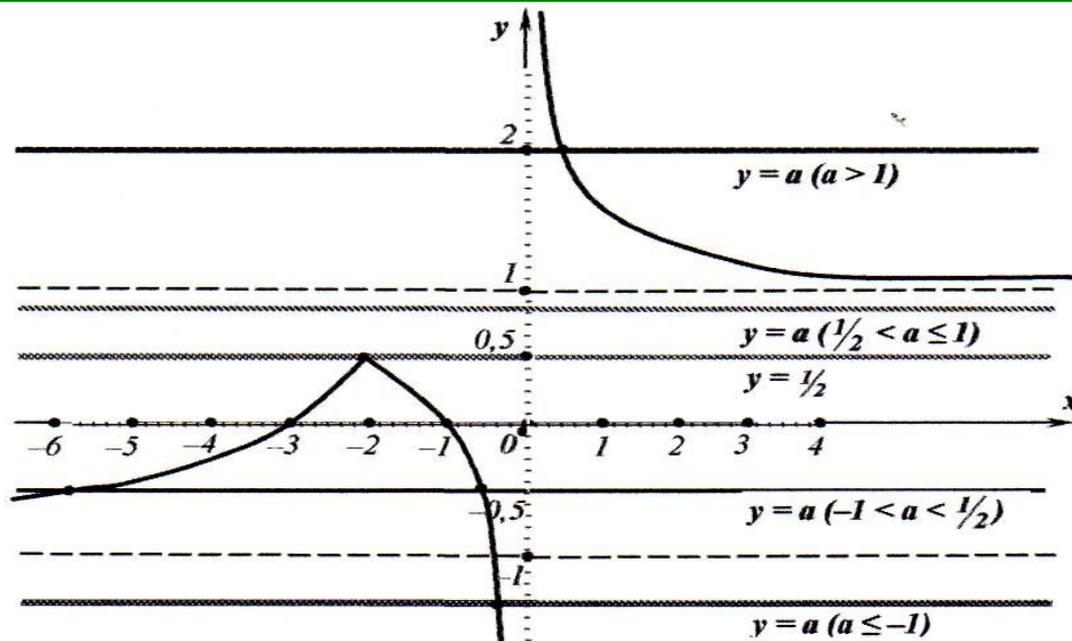
Решение:

При  $x = 0$  получаем  $|0 + 2| = a \cdot 0 + 1$ , т.е.  $x = 0$  не является корнем уравнения ни при каких значениях параметра  $a$ .

Преобразуем уравнения с учётом, что  $x \neq 0$ ,  $\frac{|x+2|-1}{x} = a$ .

Построим графики функций  $y = \frac{|x+2|-1}{x}$  и  $y = a$  (см. рис. 7)

$$y = \frac{|x+2|-1}{x} = \begin{cases} 1 + \frac{1}{x} & \text{при } x \geq -2, \\ -1 - \frac{3}{x} & \text{при } x < -2. \end{cases}$$



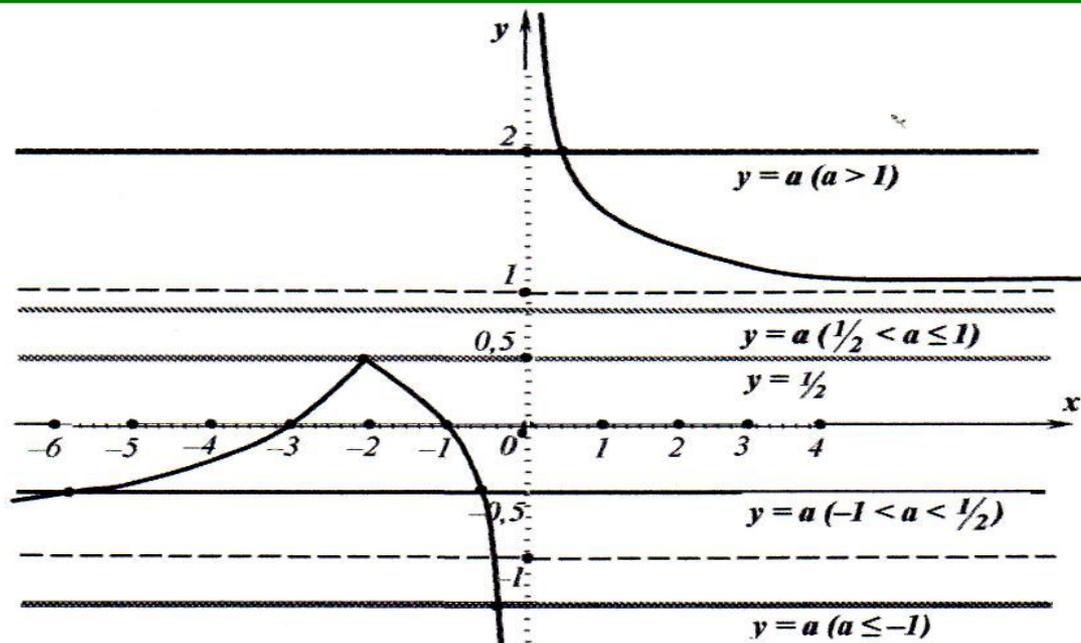


График функции  $y = 1 + \frac{1}{x}$  - гипербола  $y = \frac{1}{x}$ , сдвинутая на 1 вверх по ОУ.

График функции  $y = -\frac{3}{x} - 1$  - гипербола  $y = -\frac{3}{x}$ , сдвинута на 1 вниз по ОУ.

При различных значениях параметра  $a$  графиками функций  $y = a$  являются прямые, параллельные оси абсцисс.

При  $a \leq -1$  и  $a > 1$  графики имеют одну общую точку пересечения, уравнение имеет один корень;

при  $-1 < a < \frac{1}{2}$  точек пересечения две, уравнение имеет два корня;

при  $a = \frac{1}{2}$  один корень;

при  $\frac{1}{2} < a \leq 1$  точек пересечения нет, уравнение корней не имеет;

Ответ: при  $a \leq -1$  один корень; при  $-1 < a < \frac{1}{2}$  один корень;

при  $a = \frac{1}{2}$  один корень; при  $\frac{1}{2} < a \leq 1$  корней нет;

при  $a > 1$  один корень.

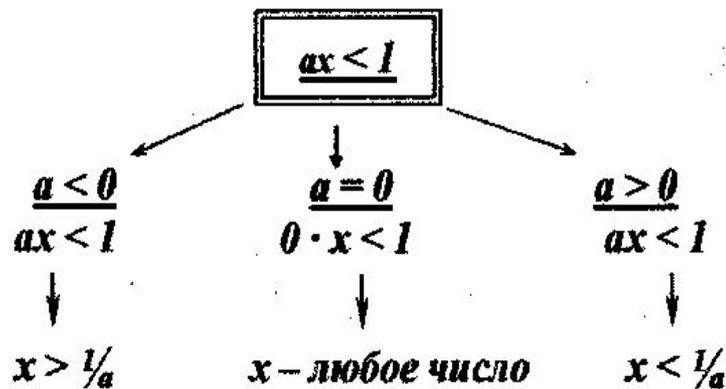
#### 4. Линейные неравенства с параметрами.

**Основная цель:** сформировать умение решать элементарные линейные неравенства с параметрами.

Решить неравенство:  $ax < 1$ .

Невнимательный ученик быстро даёт ответ  $x < \frac{1}{a}$ .

Тогда следует попросить его подставить вместо  $a$  различные значения и проверить, всегда ли совпадает решение с общим видом. Сделав соответствующие замечания, вызвать ученика к доске с просьбой составить блок-схему решения этого неравенства



## Алгоритм решения линейных неравенств с параметрами

На примере неравенства  $ax > b$ , где  $x$  – неизвестное,  $a, b$  – выражения, зависящие только от параметров.

1. Если  $a < 0$ , то  $x < \frac{b}{a}$ .

Решением неравенства являются все числа из промежутка  $(-\infty; \frac{b}{a})$ .

2. а) Если  $a = 0, b < 0$

$$0 \cdot x > b, x \text{ – любое число.}$$

Решением неравенства является промежуток  $(-\infty; +\infty)$ .

б) Если  $a = 0, b = 0$

$$0 \cdot x > 0, \text{ решений нет.}$$

в) Если  $a = 0, b > 0$

$$0 \cdot x > b, \text{ решений нет.}$$

3. Если  $a > 0$ , то  $x > \frac{b}{a}$ .

Решением неравенства является промежуток  $(\frac{b}{a}; +\infty)$ .

Решить неравенство  $(m - 1)x < 5m$ .

Ответ: при  $m < 1$ ,  $x > \frac{5m}{m-1}$ ; при  $m = 1$ ,  $x$  – любое число; при  $m > 1$ ,  $x < \frac{5m}{m-1}$ .

Несущественно, будут ли значения  $m$  и  $x$  записаны в форме неравенства или промежутка.

$$2ax + 5 > a + 10x$$

Решение:

$$2ax - 10x > a - 5,$$

$$(2a - 10)x > a - 5,$$

$$2(a - 5)x > a - 5.$$

1. Если  $2(a - 5) < 0$ ,  $a - 5 < 0$ ,  $a < 5$ , то  $x < \frac{a-5}{2(a-5)}$ ;  $x < 1/2$ .
2. Если  $2(a - 5) = 0$ ,  $a - 5 = 0$ ,  $a = 5$ , то  $0 \cdot x > 0$ , решений нет.
3. Если  $2(a - 5) > 0$ ,  $a - 5 > 0$ ,  $a > 5$ , то  $x > \frac{a-5}{2(a-5)}$ ;  $x > 1/2$ .

Ответ: при  $a < 5$ ,  $x < 1/2$ ; при  $a = 5$ , решений нет; при  $a > 5$ ,  $x > 1/2$ .

$mx - 6 \leq 2m - 3x$

Решение:

$$mx + 3x \leq 2m + 6$$

$$(m + 3)x \leq 2(m + 3).$$

1. Если  $m + 3 < 0$ ,  $m < -3$ , то  $x \geq \frac{2(m+3)}{m+3}$ ;  $x \geq 2$ .
2. Если  $m + 3 = 0$ ,  $m = -3$ , то  $0 \cdot x \leq 0$ ,  $x$  – любое число.
3. Если  $m + 3 > 0$ ,  $m > -3$ , то  $x \leq \frac{2(m+3)}{m+3}$ ;  $x \leq 2$ .

Ответ: при  $m < -3$ ,  $x \geq 2$ ; при  $m = -3$ ,  $x$  – любое число; при  $m > -3$ ,  $x \leq 2$ .

## 5. Квадратные уравнения с параметрами.

Цель: научить учащихся исследовать квадратные уравнения; уметь применять теорему Виета, и обратную ей.

## 6. Решение квадратных неравенств.

