Кружок

"Занимательная математика"

Учитель: **Сухих Н.Н.**

Цель данного кружка:

Дать учащимся, проявляющим повышенный интерес к математике, возможность углубленного изучения основного курса путем рассмотрения задач, требующих нестандартного подхода при своем решении.

Формирование мировоззрения учащихся, развитие их логического и творческого мышления.

7 класс

Основные темы:

1. **Решение текстовых задач.**
   1) задачи « на бассейны »
   2) задачи « на пропорции»
   3) задачи « на проценты »
2. **Решение уравнений с модулем.**
3. **Решение различных заданий с параметрами. Пропедевтика.**

Цель: подвести учащихся к данной теме, используя материал 5-6 класса.

Н-р: 1) запишите число, в котором

а) 8 десятков и x единиц ($\overline{8x} = 80+x$)

б) x десятков и y единиц ($\overline{xy} = 10x+y$)

в) 5 сотен, x десятков и 4 единицы ($\overline{5x4} = 504+ 10x$)

2) при каких значениях a число 5 явл-ся корнем уравнения: $(8-a)x = 5x$

3) Зная, что $a>b$, сравните числа:

а) $-a$ и $8-b$; б) $-(a-4)$ и $-b$

4. Решение уравнений, содержащих параметры.

Цель: формировать умение решать линейные уравнения с параметрами; развивать исследовательскую деятельность учащихся; использовать полученные навыки при решении нестандартных задач.

5. Решение систем линейных уравнений с параметрами.

При каких значениях параметра а система $\begin{cases} 2x-3y=7 \\ ax-6y=14 \end{cases}$

а) имеет бесконечное множество решений;

б) имеет единственное решение?

При каком значении параметра а система $\begin{cases} 3x+y=-4 \\ x-ay=8 \end{cases}$

решений не имеет?

8 класс

Основные темы:

1. **Преобразование рациональных выражений**.
2. **Уравнения с параметрами, приводимые к линейным.**

Цель: научиться решать уравнения, где требуется дополнительная проверка, связанная с ограничением их области определения

Алгоритм решения уравнения с параметрами, сводящегося к линейному

1. Найти область допустимых значений неизвестного и параметров, входящих в уравнение.
2. Умножить обе части уравнения на общий знаменатель, преобразовать к виду линейного.
3. Найти недопустимые значения параметра.
4. Решить линейное уравнение с параметром.
5. Выписать ответ с учётом пунктов 3, 4.

$$\frac{x}{x+1}=a.$$

Решение:

1) ОДЗ: $x \neq -1$;

2) Умножим обе части уравнения на $x + 1 \neq 0$, получим:

$$x = a(x+1),$$
$$x = ax + a,$$
$$x - ax = a,$$
$$(1-a)\,x = a.$$

3) Найдём недопустимые значения a:

Если $x = -1$, то $(1-a)\cdot(-1) = a$, $a - 1 = a$, $0 \cdot a = 1$, корней нет.

Не существует значений a, при которых $x = -1$.

4) $(1-a)\,x = a$.

1°. Если $1 - a \neq 0$, $a \neq 1$, то $x = \dfrac{a}{1-a}$;

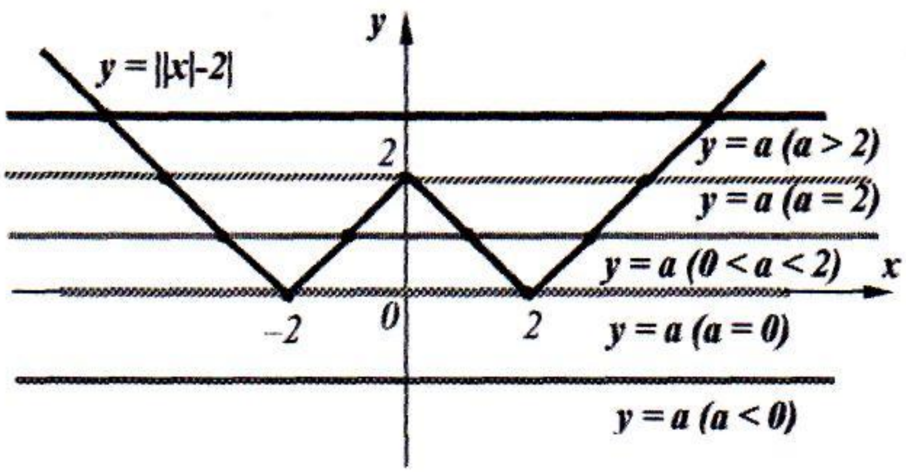
2°. Если $1 - a = 0$, $a = 1$, то $0 \cdot a = 1$, корней нет.

Ответ: при $a \neq 1$ $x = \dfrac{a}{1-a}$; при $a = 1$ корней нет.

3. Графический способ решения уравнений с параметром

Сколько корней имеет уравнение $||x| - 2| = a$ при различных значениях параметра a?

Решение: Построим график функции $y = ||x| - 2|$, проведя ряд последовательных преобразований: $y = x - 2 \rightarrow y = |x| - 2 \rightarrow y = ||x| - 2|$, и график функции $y = a$ (см. рис. 5)



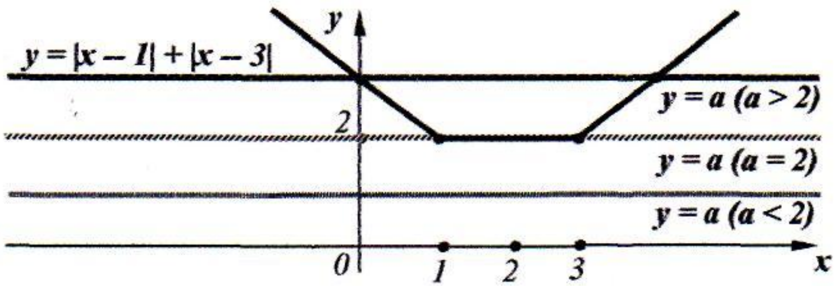
Ответ: при $a < 0$ корней нет; при $a = 0$ два корня; при $0 < a < 2$ четыре корня; при $a = 2$ три корня; при $a > 0$ два корня.

Решить уравнение $|x-1|+|x-3|=a$.

Решение:

Построим графики функций $y=|x-1|+|x-3|$ и $y=a$

$$y=|x-1|+|x-3|=\begin{cases}4-2x & \text{при } x<1,\\ 2 & \text{при } 1\le x\le 3,\\ 2x-4 & \text{при } x\ge 3.\end{cases}$$



1. Если $a<2$, то ломаная и прямая $y=a$ не пересекаются. Уравнение корней не имеет.

2. Если $a=2$, то ломаная и прямая совпадают при $1\le x\le 3$. Уравнение имеет бесконечно много корней.

3. Если $a>2$, то ломаная и прямая пересекаются в двух точках.

Уравнение имеет два корня: $4-2x=a$ или $2-4x=a$; $x=\dfrac{4-a}{2}$ $x=\dfrac{a+4}{2}$.

Ответ: при $a<0$ корней нет; при $a=2$, $1\le x\le 3$;

при $a>2$, $x_1=\dfrac{4-a}{2}$; $x_2=\dfrac{a+4}{2}$.

Сколько решений в зависимости от a имеет уравнение $|x + 2| = ax + 1$?

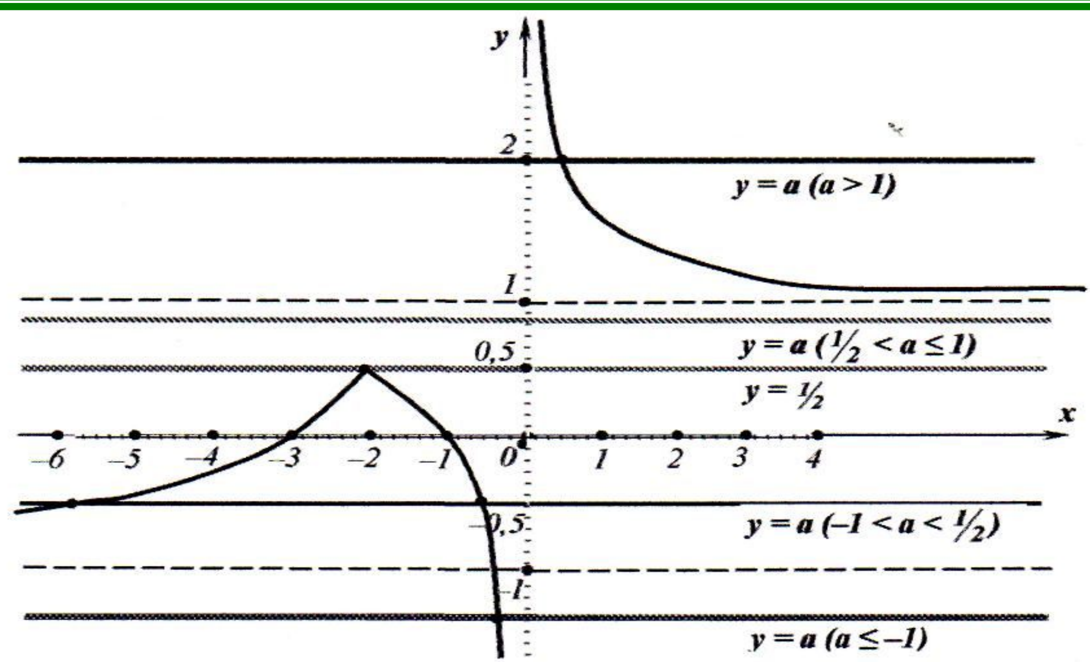
Решение:

При $x = 0$ получаем $|0 + 2| = a \cdot 0 + 1$, т.е. $x = 0$ не является корнем уравнения ни при каких значениях параметра a.

Преобразуем уравнения с учётом, что $x \neq 0$, $\dfrac{|x+2|-1}{x} = a$.

Построим графики функций $y = \dfrac{|x+2|-1}{x}$ и $y = a$ (см. рис. 7)

$$y = \frac{|x+2|-1}{x} = \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{x} & \text{при } x \geq -2, \\ -1 - \dfrac{3}{x} & \text{при } x < -2. \end{cases}$$



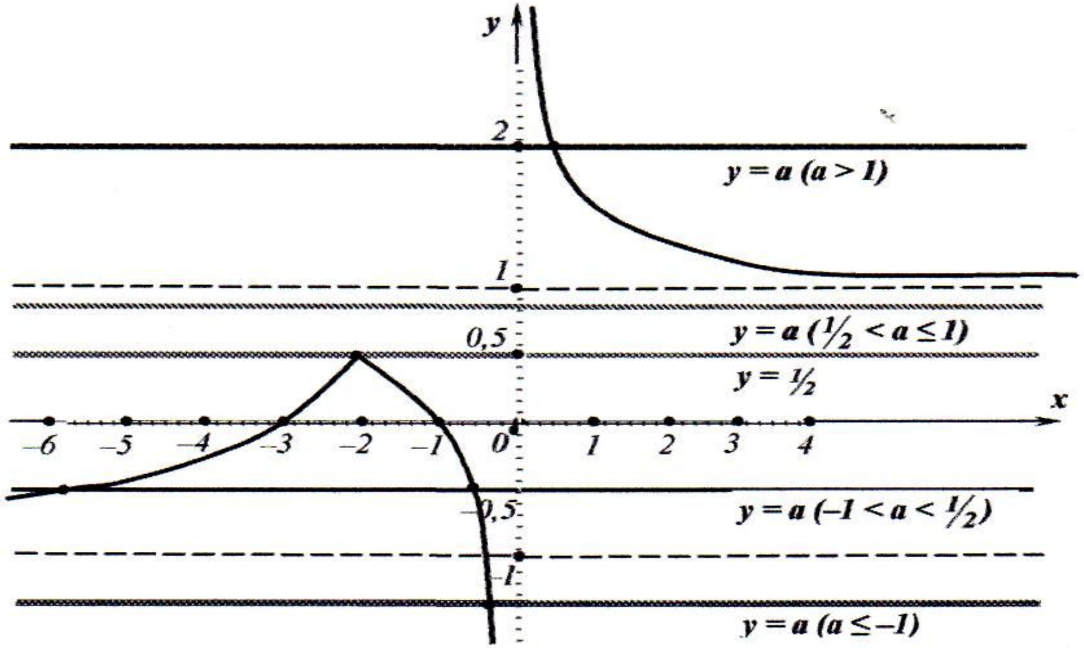


График функции $y = 1 + \frac{1}{x}$ - гипербола $y = \frac{1}{x}$, сдвинутая на 1 вверх по $OУ$.

График функции $y = -\frac{3}{x} - 1$ - гипербола $y = -\frac{3}{x}$, сдвинута на 1 вниз по $OУ$.

При различных значениях параметра a графиками функций $y = a$ являются прямые, параллельные оси абсцисс.

При $a \le -1$ и $a > 1$ графики имеют одну общую точку пересечения, уравнение имеет один корень;

при $-1 < a < \frac{1}{2}$ точек пересечения две, уравнение имеет два корня;

при $a = \frac{1}{2}$ один корень;

при $\frac{1}{2} < a \le 1$ точек пересечения нет, уравнение корней не имеет;

Ответ: при $a \le -1$ один корень; при $-1 < a < \frac{1}{2}$ один корень;
при $a = \frac{4-a}{2}$ один корень; при $\frac{1}{2} < a \le 1$ корней нет;
при $a > 1$ один корень.

4. Линейные неравенства с параметрами.

Основная цель: сформировать умение решать элементарные линейные неравенства с параметрами.

Решить неравенство: $ax < 1$.

Невнимательный ученик быстро даёт ответ $x < \frac{1}{a}$.

Тогда следует попросить его подставить вместо a различные значения и проверить, всегда ли совпадает решение с общим видом. Сделав соответствующие замечания, вызвать ученика к доске с просьбой составить блок-схему решения этого неравенства

$$\boxed{\underline{ax < 1}}$$

$\underline{a < 0}$	$\underline{a = 0}$	$\underline{a > 0}$
$ax < 1$	$0 \cdot x < 1$	$ax < 1$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
$x > 1/a$	x – любое число	$x < 1/a$

Алгоритм решения линейных неравенств с параметрами

На примере неравенства $ax > b$, где x – неизвестное, a, b – выражения, зависящие только от параметров.

1. Если $a < 0$, то $x < \frac{b}{a}$.

   Решением неравенства являются все числа из промежутка $(-\infty; \frac{b}{a})$.

2. а) Если $a = 0$, $b < 0$

   $0 \cdot x > b$. x – любое число.

   Решением неравенства является промежуток $(-\infty; +\infty)$.

   б) Если $a = 0$, $b = 0$

   $0 \cdot x > 0$, решений нет.

   в) Если $a = 0$, $b > 0$

   $0 \cdot x > b$, решений нет.

3. Если $a > 0$, то $x > \frac{b}{a}$.

   Решением неравенства является промежуток $(\frac{b}{a}; +\infty)$.

Решить неравенство $(m-1)x < 5m$.

Ответ: при $m < 1$, $x > \frac{5m}{m-1}$; при $m = 1$, x – любое число; при $m > 1$, $x < \frac{5m}{m-1}$.

Несущественно, будут ли значения m и x записаны в форме неравенства или промежутка.

$2ax + 5 > a + 10x$

Решение:

$$2ax - 10x > a - 5,$$

$$(2a - 10)x > a - 5,$$

$$2(a - 5)\,x > a - 5.$$

1. Если $2(a-5) < 0$, $a - 5 < 0$, $a < 5$, то $x < \frac{a-5}{2(a-5)}$; $x < 1/2$.
2. Если $2(a-5) = 0$, $a - 5 = 0$, $a = 5$, то $0 \cdot x > 0$, решений нет.
3. Если $2(a-5) > 0$, $a - 5 > 0$, $a > 5$, то $x > \frac{a-5}{2(a-5)}$; $x > 1/2$.

Ответ: при $a < 5$, $x < 1/2$; при $a = 5$, решений нет; при $a > 5$, $x > 1/2$.

$mx - 6 \le 2m - 3x$

Решение:

$$mx + 3x \le 2m + 6$$

$$(m + 3)x \le 2(m + 3).$$

1. Если $m + 3 < 0$, $m < -3$, то $x \ge \frac{2(m+3)}{m+3}$; $x \ge 2$.
2. Если $m + 3 = 0$, $m = -3$, то $0 \cdot x \le 0$, x – любое число.
3. Если $m + 3 > 0$, $m > -3$, то $x \le \frac{2(m+3)}{m+3}$; $x \le 2$.

Ответ: при $m < -3$, $x \ge 2$; при $m = -3$, x – любое число; при $m > -3$, $x \le 2$.

5. Квадратные уравнения с параметрами.

Цель: научить учащихся исследовать квадратные уравнения; уметь применять теорему Виета, и обратную ей.

6. Решение квадратных неравенств.