

**Научно-исследовательская
работа по теме:**

***«Уравнения с двумя
неизвестными
в целых числах»***



Содержание

- 1. Введение.
- 2. Диофант и история диофантовых уравнений.
- 3. Теоремы о числе решений уравнений с двумя переменными.
- 4. Нахождение решений для некоторых частных случаев.
- 5. Примеры решений уравнений С6 из ЕГЭ -2010.
- 6. Заключение.
- 7. Литература.



Анализ ситуации

- В этом учебном году одиннадцатиклассникам предстоит сдавать Единый государственный экзамен по математике, где КИМы составлены по новой структуре. Нет части «А», но добавлены задания в часть «В» и часть «С». Составители объясняют добавление С6 тем, что для поступления в технический ВУЗ нужно уметь решать задания такого высокого уровня сложности.



Проблема

- Решая примерные варианты заданий ЕГЭ, мы заметили, что чаще всего встречаются в С6 задания на решение уравнений первой и второй степени в целых числах. Но мы не знаем способы решения таких уравнений. В связи с этим возникла необходимость изучить теорию таких уравнений и алгоритм их решения.



Цель

- Уметь решать уравнения с двумя неизвестными первой и второй степени в целых числах.



Задачи

- 1) Изучить учебную и справочную литературу;
- 2) Собрать теоретический материал по способам решения уравнений;
- 3) Разобрать алгоритм решения уравнений данного вида;
- 4) Решить уравнения с двумя переменными в целых числах из материалов ЕГЭ-2010 С6.



1. Диофант и история диофантовых уравнений



- Решение уравнений в целых числах является одной из древнейших математических задач. Наибольшего расцвета эта область математики достигла в Древней Греции. Основным источником, дошедшим до нашего времени, является произведение Диофанта – «Арифметика». Диофант суммировал и расширил накопленный до него опыт решения неопределенных уравнений в целых числах.
- В истории сохранилось мало фактов биографии замечательного александрийского ученого-алгебраиста Диофанта. По некоторым данным Диофант жил до 364 года н.э.



- Он специализировался на решении задач в целых числах. Такие задачи в настоящее время известны под названием диофантовых.
- Жизнь и деятельность Диофанта протекала в Александрии, он собирал и решал известные и придумывал новые задачи. Позднее он объединил их в большом труде под названием «Арифметика». Из тринадцати книг, входивших в состав «Арифметики», только шесть сохранились до Средних веков и стали источником вдохновения для математиков эпохи Возрождения



2. Теоремы о числе решений линейного диофантового уравнения



Теорема 1

- Если в уравнении $ax+by=1$, $(a,b)=1$, то уравнение имеет, по крайней мере, одно решение.



Теорема 2

- Если в уравнении $ax+by=c$, $(a,b)=d>1$ и c не делится на d , то уравнение целых решений не имеет.



Теорема 3

- Если в уравнении $ax+by=c$, $(a,b)=d>1$ и $c \nmid d$, то оно равносильно уравнению $a_1x+b_1y=c_1$, в котором $(a_1,b_1)=1$.



Теорема 4

- Если в уравнении $ax+by=c$, $(a,b)=1$, то все целые решения этого уравнения заключены в формулах:

$$x=x_0c+bt$$

$$y=y_0c-at$$

где x_0, y_0 – целое решение уравнения $ax+by=1$, t – любое целое число.



3. Алгоритм решения уравнения в целых числах

- Сформулированные теоремы позволяют составить следующий **алгоритм** решения в целых числах уравнения вида $ax+by=c$.
- 1. Найти наибольший общий делитель чисел a и b , если $(a,b)=d>1$ и c не делится на d , то уравнение целых решений не имеет;
если $(a,b)=d>1$ и $c \div d$, то



- 2. Разделить почленно уравнение $ax+by=c$ на d , получив при этом уравнение $a_1x+b_1y=c_1$, в котором $(a_1, b_1)=1$;
- 3. Найти целое решение (x_0, y_0) уравнения $a_1x+b_1y=1$ путем представления 1 как линейной комбинации чисел a и b ;
- 4. Составить общую формулу целых решений данного уравнения

$$x = x_0c + bt$$

$$y = y_0c - at$$

где x_0, y_0 – целое решение уравнения , t – любое целое число.



***4 .Примеры решений
уравнений первой степени
двумя переменными (С6 из
ЕГЭ -2010)***



Пример №1

- Решить в натуральных числах уравнение:

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{m} = \frac{1}{25}, \text{ где } m > n$$

- Решение: $\frac{1}{n} + \frac{1}{m} = \frac{1}{25}$

Выразим переменную n через переменную m :

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{25} - \frac{1}{m}$$

$$\frac{1}{n} = \frac{m - 25}{25m}$$

$$n = \frac{25m}{m - 25} = 25 + \frac{625}{m - 25}$$



- Найдем делители числа 625: $m-25 \in \{1; 5; 25; 125; 625\}$
- 1) если $m-25 = 1$, то $m=26$, $n=25+625=650$
- 2) $m-25 = 5$, то $m=30$, $n=150$
- 3) $m-25 = 25$, то $m=50$, $n=50$
- 4) $m-25 = 125$, то $m=150$, $n=30$
- 5) $m-25 = 625$, то $m=650$, $n=26$

Ответ: $m=150$, $n=30$
 $m=650$, $n=26$



Пример №2

- Решить уравнение в натуральных числах: $mn + 25 = 4m$
- Решение: $mn + 25 = 4m$
- 1) выразим переменную m через n :

$$4m - mn = 25$$

$$m(4-n) = 25$$

$$m = \frac{25}{4-n}$$



найдем натуральные делители числа 25: $(4-n) \in \{1; 5; 25\}$

если $4-n = 1$, то $n=3$, $m=25$

$4-n = 5$, то $n=-1$, $m=5$ (посторонние корни)

$4-n = 25$, то $n=-21$, $m=1$ (посторонние корни)

● Ответ: $(25;3)$



5. Уравнения второй степени с двумя неизвестными



Пример №1

- 1. Решить уравнение: $x^2 - y^2 = 3$ в целых числах.

Решение:

- 1) Применим формулу сокращенного умножения

$$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) = 3$$

- 2) Найдем делители числа 3 = $\{-1; -3; 1; 3\}$

- 3) Данное уравнение равносильно совокупности 4 систем:



$$\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=3 \end{cases} \longrightarrow 2x=4 \quad x=2, y=1$$

$$\begin{cases} x-y=3 \\ x+y=1 \end{cases} \longrightarrow x=2, y=-1$$

$$\begin{cases} x-y=-3 \\ x+y=-1 \end{cases} \longrightarrow x=-2, y=1$$

$$\begin{cases} x-y=-1 \\ x+y=-3 \end{cases} \longrightarrow x=-2, y=-1$$

Ответ: (2;1), (2;-1), (-2;1), (-2;-1)



● 2. Решить уравнение: $x^2+xy=10$

● Решение:

● 1) Выразим переменную y через x : $y = \frac{10 - x^2}{x}$

● 2) Дробь $\frac{10}{x}$ будет целой, если $x \in \{\pm 1; \pm 2; \pm 5; \pm 10\}$

● 3) Найдем x 8 значений y .

Если $x=-1$, то $y= -9$

$x=1$, то $y=9$

$x=-2$, то $y=-3$

$x=2$, то $y=3$

$x=-5$, то $y=3$

$x=5$, то $y=-3$

$x=-10$, то $y=9$

$x=10$, то $y=-9$



● 3. Решить уравнение : $x^3 - y^3 = 91$

● Решение: найдем делители числа 91: $\{\pm 1; \pm 7; \pm 13; \pm 91\}$

Значит, уравнение равносильно совокупности 8 систем.

● 4. Решить уравнение в целых числах:

$$2x^2 - 2xy + 9x + y = 2$$

Решение: выразим из уравнения то неизвестное, которое входит в него только в первой степени - в данном случае y : $2x^2 + 9x - 2 = 2xy - y$

$$y = \frac{2x^2 + 9x - 2}{2x - 1}$$



выделим у дроби целую часть с помощью правила деления многочлена на многочлен «углом».

Получим:

$$y = x + 5 + \frac{3}{2x-1}$$

- Следовательно, разность $2x-1$ может принимать только значения $-3, -1, 1, 3$.
- Осталось перебрать эти четыре случая.

Ответ: $(1;9), (2;8), (0;2), (-1;3)$



чисел, удовлетворяющие системе неравенств:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 < 18x - 20y - 166, \\ 32x - y^2 > x^2 + 12y + 271 \end{cases}$$

- Решение: Выделяя полные квадраты, получим:

$$\begin{cases} (x-9)^2 + (y+10)^2 < 15 \\ (x-16)^2 + (y+6)^2 < 21 \end{cases}$$

- Из первого и второго неравенства системы :

$$\begin{cases} (x-9)^2 < 15 \\ (x-16)^2 < 21, \end{cases} \quad \begin{cases} 6 \leq x \leq 12 \\ 12 \leq x \leq 20, \end{cases} \quad x=12.$$

- Подставляя $x = 12$ в систему, получим:

$$\begin{cases} (y+10)^2 < 6 \\ (y+6)^2 < 5 \end{cases} \quad \begin{cases} -2 \leq y+10 \leq 2 \\ -2 \leq y+6 \leq 2 \end{cases} \quad \begin{cases} -12 \leq y \leq -8 \\ -8 \leq y \leq -4 \end{cases} \quad y=-8$$

Ответ: (12; -8)



Заключение.

- Решение различного вида уравнений является одной из содержательных линий школьного курса математики, но при этом методы решения уравнений с несколькими неизвестными практически не рассматриваются. Вместе с тем, решение уравнений от нескольких неизвестных в целых числах является одной из древнейших математических задач. Большинство методов решения таких уравнений основаны на теории делимости целых чисел, интерес к которой в настоящее время определяется бурным развитием информационных технологий. В связи с этим, учащимся старших классов будет небезынтересно познакомиться с методами решения некоторых уравнений в целых числах, тем более что на олимпиадах разного уровня очень часто предлагаются задания, предполагающие решение какого-либо уравнения в целых числах, а в этом году такие уравнения включены еще и в материалы ЕГЭ.



Литература.

- 1) Галкин Е.Г. Нестандартные задачи по математике.
- 2) Галкин Е.Г. Задачи с целыми числами.
- 3) Мордкович А.Г. Алгебра и начала анализа 10-11 класс.
- 4) Математика. ЕГЭ 2010. Федеральный институт педагогических измерений.
- 5) Глейзер Е.И. История математики в школе.
- 6) Шарыгин И. Ф. Факультативный курс по математике. Решение задач.

