Научно-исследовательская работа по теме:

«Уравнения с двумя неизвестными в целых числах »

Содержание

Анализ ситуации

- В этом учебном году одиннадцатиклассникам предстоит сдавать Единый государственный экзамен по математике, где КИМы составлены по новой структуре. Нет части «А», но добавлены задания в часть «В» и часть «С». Составители объясняют добавление С6 тем, что для поступления в технический ВУЗ нужно уметь решать задания такого высокого уровня сложности.

Проблема

- Решая примерные варианты заданий ЕГЭ, мы заметили, что чаще всего встречаются в С6 задания на решение уравнений первой и второй степени в целых числах. Но мы не знаем способы решения таких уравнений. В связи с этим возникла необходимость изучить теорию таких уравнений и алгоритм их решения.

Цель

- Уметь решать уравнения с двумя неизвестными первой и второй степени в целых числах.

Задачи

- 1)Изучить учебную и справочную литературу;
- 2)Собрать теоретический материал по способам решения уравнений;
- 3)Разобрать алгоритм решения уравнений данного вида;
- 4)Решить уравнения с двумя переменными в целых числах из материалов ЕГЭ-2010 С6.

1. Диофант и история диофантовых уравнен

- Решение уравнений в целых числах является одной из древнейших математических задач. Наибольшего расцвета эта область математики достигла в Древней Греции. Основным источником, дошедшим до нашего времени, является произведение Диофанта – «Арифметика». Диофант суммировал и расширил накопленный до него опыт решения неопределенных уравнений в целых числах.
- В истории сохранилось мало фактов биографии замечательного александрийского ученого-алгебраиста Диофанта. По некоторым данным Диофант жил до 364 года н.э.

- Он специализировался на решении задач в целых числах. Такие задачи в настоящее время известны под названием диофантовых.
- Жизнь и деятельность Диофанта протекала в Александрии, он собирал и решал известные и придумывал новые задачи. Позднее он объединил их в большом труде под названием «Арифметика». Из тринадцати книг, входивших в состав «Арифметики», только шесть сохранились до Средних веков и стали источником вдохновения для математиков эпохи Возрождения

2. Теоремы о числе решений линейного диофантового уравнения

Теорема 1

- Если в уравнении $ax+by=1$, $(a,b)=1$, то уравнение имеет, по крайней мере, одно решение.

Теорема 2

- Если в уравнении $ax+by=c$, $(a,b)=d>1$ и c не делится на d, то уравнение целых решений не имеет.

Теорема 3

- Если в уравнении $ax+by=c$, $(a,b)=d>1$ и $c \vdots d$, то оно равносильно уравнению $a_1x+b_1y=c_1$, в котором $(a_1,b_1)=1$.

Теорема 4

- Если в уравнении $ax+by=c$, $(a,b)=1$, то все целые решения этого уравнения заключены в формулах:

$$x=x_o c+bt$$

$$y=y_o c-at$$

где x_o, y_o – целое решение уравнения $ax+by=1$, t- любое целое число.

3. Алгоритм решения уравнения в целых числах

- Сформулированные теоремы позволяют составить следующий ***алгоритм*** решения в целых числах уравнения вида $ax+by=c$.
- 1. Найти наибольший общий делитель чисел a и b,

  если $(a,b)=d>1$ и c не делится на d , то уравнение целых решений не имеет;

  если $(a,b)=d>1$ и $c \vdots d$, то

- 2. Разделить почленно уравнение $ax+by=c$ на d, получив при этом уравнение $a_1x+b_1y=c_1$, в котором $(a,b)=1$;
- 3. Найти целое решение (x_0, y_0) уравнения $a_1x+b_1y=1$ путем представления 1 как линейной комбинации чисел a и b;
- 4. Составить общую формулу целых решений данного уравнения

$$x = x_0c + bt$$

$$y = y_0c - at$$

где x_0, y_0 – целое решение уравнения , - любое целое число.

4 .Примеры решений уравнений первой степени двумя переменными (С6 из ЕГЭ -2010)

Пример №1

- ***Решить в натуральных числах уравнение:***

$\frac{1}{n}+\frac{1}{m}=\frac{1}{25}$ ***, где m>n***

- **Решение:** $\frac{1}{n}+\frac{1}{m}=\frac{1}{25}$

Выразим переменную n через переменную m:

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{25}-\frac{1}{m}$$

$$\frac{1}{n}=\frac{m-25}{25m}$$

$$n=\frac{25m}{m-25}=25+\frac{625}{m-25}$$

- Найдем делители числа 625: $m-25 \in \{1;\ 5;\ 25;\ 125;\ 625\}$

- 1) если $m-25=1$, то $m=26$, $n=25+625=650$
- 2) $m-25=5$, то $m=30$, $n=150$
- 3) $m-25=25$, то $m=50$, $n=50$
- 4) $m-25=125$, то $m=150$, $n=30$
- 5) $m-25=625$, то $m=650$, $n=26$

Ответ: $m=150$, $n=30$

$m=650$, $n=26$

Пример №2

- ***Решить уравнение в натуральных числах: $mn+25=4m$***
- Решение: $\boldsymbol{mn+25=4m}$
- 1) выразим переменную m через n:

$4m - mn = 25$

$m(4-n) = 25$

$$m = \frac{25}{4-n}$$

найдем натуральные делители числа 25: $(4-n) \in \{1; 5; 25\}$

если $4-n=1$, то $n=3$, $m=25$

$4-n=5$, то $n=-1$, $m=5$ (посторонние корни)

$4-n=25$, то $n=-21$, $m=1$ (посторонние корни)

- Ответ: (25;3)

5.Уравнения второй степени с двумя неизвестными

Пример №1

- ***1. Решить уравнение:*** $x^2 - y^2 = 3$ ***в целых числах.***

  Решение:
- 1) Применим формулу сокращенного умножения

  $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) = 3$
- 2) Найдем делители числа 3 = $\{-1;-3;1;3\}$
- 3) Данное уравнение равносильно совокупности 4 систем:

$$
\left[
\begin{array}{l}
\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=3 \end{cases} \Rightarrow \quad 2x=4 \quad x=2,\ y=1 \\[2em]
\begin{cases} x-y=3 \\ x+y=1 \end{cases} \Rightarrow \quad x=2,\ \ y=-1 \\[2em]
\begin{cases} x-y=-3 \\ x+y=-1 \end{cases} \Rightarrow \quad x=-2,\ \ \ y=1 \\[2em]
\begin{cases} x-y=-1 \\ x+y=-3 \end{cases} \Rightarrow \quad x=-2,\ \ y=-1
\end{array}
\right.
$$

Ответ: (2;1), (2;-1), (-2;1), (-2;-1)

- **2. *Решить уравнение:*** $x^2+xy=10$
- *Решение:*

- 1) Выразим переменную у через х: $y=\dfrac{10-x^2}{x}$
- 2) Дробь $\dfrac{10}{x}$ будет целой, если х Є {±1;±2; ±5;±10}
- 3) Найдем 8 значений **у.**

Если х=-1, то у= -9 х=-5, то у=3

х=1, то у=9 х=5, то у=-3

х=-2 ,то у=-3 х=-10, то у=9

х=2, то у=3 х=10, то у=-9

- ***3. Решить уравнение :*** $x^3 - y^3 = 91$
- *Решение:* найдем делители числа 91: {±1; ±7; ±13; ±91}

 Значит, уравнение равносильно совокупности 8 систем.

- ***4.Решить уравнение в целых числах:***

 $2x^2 - 2xy + 9x + y = 2$

 Решение: выразим из уравнения то неизвестное, которое входит в него только в первой степени- в данном случае ***y:*** $2x^2 + 9x - 2 = 2xy - y$

$$y = \frac{2x^2 + 9x - 2}{2x - 1}$$

выделим у дроби целую часть с помощью правила деления многочлена на многочлен «углом». Получим:

$$y = x + 5 + \frac{3}{2x - 1}$$

- Следовательно, разность 2x-1 может принимать только значения -3,-1,1,3.
- Осталось перебрать эти четыре случая.

Ответ: (1;9), (2;8), (0;2), (-1;3)

чисел, удовлетворяющие системе неравенств:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 < 18x - 20y - 166, \\ 32x - y^2 > x^2 + 12y + 271 \end{cases}$$

- Решение: Выделяя полные квадраты, получим:

$$\begin{cases} (x-9)^2 + (y+10)^2 < 15 \\ (x-16)^2 + (y+6)^2 < 21 \end{cases}$$

- Из первого и второго неравенства системы :

$$\begin{cases} (x-9)^2 < 15 \\ (x-16)^2 < 21, \end{cases} \qquad \begin{cases} 6 \le x \le 12 \\ 12 \le x \le 20 \end{cases}, \qquad x=12.$$

- Подставляя $x = 12$ в систему, получим:

$$\begin{cases} (y+10)^2 < 6 \\ (y+6)^2 < 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} -2 \le y+10 \le 2 \\ -2 \le y+6 \le 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} -12 \le y \le -8 \\ -8 \le y \le -4 \end{cases} \qquad y=-8$$

Ответ: (12; -8)

Заключение.

- Решение различного вида уравнений является одной из содержательных линий школьного курса математики, но при этом методы решения уравнений с несколькими неизвестными практически не рассматриваются. Вместе с тем, решение уравнений от нескольких неизвестных в целых числах является одной из древнейших математических задач. Большинство методов решения таких уравнений основаны на теории делимости целых чисел, интерес к которой в настоящее время определяется бурным развитием информационных технологий. В связи с этим, учащимся старших классов будет небезынтересно познакомиться с методами решения некоторых уравнений в целых числах, тем более что на олимпиадах разного уровня очень часто предлагаются задания, предполагающие решение какого-либо уравнения в целых числах, а в этом году такие уравнения включены еще и в материалы ЕГЭ.

Литература.

- 1)Галкин Е.Г. Нестандартные задачи по математике.
- 2)Галкин Е.Г. Задачи с целыми числами.
- 3)Мордкович А.Г. Алгебра и начала анализа 10-11 класс.
- 4)Математика. ЕГЭ 2010. Федеральный институт педагогических измерений.
- 5)Глейзер Е.И. История математики в школе.
- 6)Шарыгин И. Ф. Факультативный курс по математике. Решение задач.