Глава 3. Стили функционального программирования

3.1. Язык ЛИСП (John McCarthy, 1960)

Две формы представления данных:

- атомы: `A  123  B_12  +  T  NIL`
- списки: `(A)  (PLUS 12 25)  (LAMBDA (X Y) (PLUS X Y))  ()`

С помощью атомов представляются «атомарные» объекты – числа, символы и логические значения;

С помощью списков представляются составные объекты – структуры, выражения и функции;

Атомы могут обладать значением. Например, атом PLUS имеет значением функцию сложения, а атом 123 имеет значением самого себя. Списки тоже имеют значение – значение списка «вычисляется» по специальным правилам.

Вызов функции – применение функции к списку аргументов:

```
(PLUS 12 15)
(PLUS (MINUS 12 5) 15)
(COND ((LT X Y) (MINUS 0 1))
      ((EQ X Y) 0)
      (T 1))
(QUOTE (LAMBDA (X) (PLUS 1 X)))        ' (LAMBDA (X) (PLUS 1 X))
(LET (FACT 5)
     (FACT '(LAMBDA (N) (COND ((EQ N 0) 1)
                              (T (MULT N (FACT (MINUS N 1)))))))))
```

Основные примитивные функции в ЛИСПе

Арифметические и логические функции: PLUS, MULT, LE, EQ, AND

Специальные функции: COND, QUOTE, LET

Функции обработки списков: CAR, CDR, CONS

```
(CONS 'A '(B C))                    □   (A B C)
(CONS 'A (CONS 'B NIL))             □   (A B)
(CAR '(A B C))                      □   A
(CDR '(A B C))                      □   (B C)
(CDR '(A))                          □   NIL
(CONS '(A B) '(C D))                □   ((A B) C D)
(CAR (CDR '(A B C D)))              □   B
(CADDR '(A B C D)))                 □   C
(CONS 'LAMBDA (CONS '(X) '((PLUS X 1))))   □   (LAMBDA (X) (PLUS X 1))
```

Функции высших порядков в ЛИСПе:

```
(DEFINE MAP (LAMBDA (F L)
                (COND (L (CONS (F (CAR L)) (MAP F (CDR L))))
                      (T NIL)
            )))

(MAP '(LAMBDA (X) (PLUS X 1)) '(1 3 8))    □   (2 4 9)
```

Функции как значения

Функциональное значение – это либо встроенная функция, либо список, первым атомом которого является специальный атом LAMBDA. Например,

```
(LAMBDA (X) (MULT 2 X))
```

Если функция применяется к аргументу, то формальные параметры «связываются» со значением аргумента, поэтому, например, выражение

```
((LAMBDA (X) (MULT 2 X)) 3)
```

при вычислении выдает значение 6.

Как происходит вычисление, если в теле функции используются «глобальные» атомы?

```
(LAMBDA (X) (MULT Y X))
```

Два возможных подхода:

- статический: значения «глобальных» атомов фиксируются в момент определения функции (в момент «исполнения» функции LAMBDA).
- динамический: значения «глобальных» атомов определяются во время работы функции.

Разница может проявиться, если функция определена в одном контексте, а исполняется в другом.

В некоторых (старых) версиях ЛИСПа для «фиксации» контекста применялись специальные функции, например, если лямбда-выражение передавалось в качестве аргумента в другую функцию, то можно было использовать специальную функция FUNCTION вместо QUOTE.

Подведение итогов: основные черты и особенности языка ЛИСП

- Простой синтаксис – скобочная запись данных и программ.
- Энергичная схема вычислений (кроме специальных функций).
- Нет образцов и конструкторов – определение функций построено на суперпозиции примитивных и ранее определенных функций; построение сложных объектов также использует функцию `CONS`.
- Возможность определения функций высших порядков, в которых аргументами и/или результатом работы являются функции.
- Возможность динамического построения фрагментов программы непосредственно в ходе ее выполнения.
- Определение «контекста переменных» с помощью блочной структуры (`LET`).

Язык ЛИСП послужил прообразом и идейной основой большой группы языков. В той или иной степени он лежит в основе всех современных функциональных языков программирования и многих других языков.

3.2. Система комбинаторного программирования FP (John Backus, 1978)

Теоретически любую функцию можно получить из базовых с помощью комбинаторных преобразований. FP – система, реализующая этот принцип.

Набор констант не определен, но предполагается, что есть списки и логические значения.
Набор базовых функций не определен, но предполагается, что он достаточно богат.
Также предполагается, что принята энергичная схема вычислений (все функции – строгие).

Определим следующие комбинаторы:

- Композиция $f \circ g$

$$(f \circ g)\ x = f\ (g\ x)$$

- Условие $f \rightarrow g; h$

$$(f \rightarrow g; h)\ x = \begin{cases} g\ x, & \text{если } f\ x \text{ - истинно} \\ h\ x, & \text{если } f\ x \text{ - ложно} \\ \text{не опр.}, & \text{если } f\ x \text{ – не определено} \end{cases}$$

- Константа $\underline{k}$

$$\underline{k}\ x = \begin{cases} k, & \text{если } x \text{ – определено} \\ \text{не опр.}, & \text{если } x \text{ – не определено} \end{cases}$$

- Конструкция $[f_1, f_2, \ldots, f_n]$

$$[f_1, f_2, \ldots, f_n]\ x = \langle f_1\ x, f_2\ x, \ldots, f_n\ x \rangle$$

Еще несколько важных комбинаторов

- Отображение α f (map)

$$(\alpha\ f) : \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle = \langle f\ x_1, f\ x_2, \ldots, f\ x_n \rangle$$

- Правая вставка / f (foldr1)

$$(/\ f) : \langle x \rangle = x$$

$$(/\ f) : \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle = f : \langle x_1, (/\ f) : \langle x_2, \ldots, x_n \rangle \rangle$$

- Левая вставка \ f (foldl1)

$$(\backslash\ f) : \langle x \rangle = x$$

$$(\backslash\ f) : \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle = f : \langle (\backslash\ f) : \langle x_1, x_2, \ldots, x_{n-1} \rangle, x_n \rangle$$

- Вариант правой вставки с базовой константой $/_k$ f (foldr)

$$(/_k\ f) : \langle \rangle = k$$

$$(/_k\ f) : \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle = f : \langle x_1, (/_k\ f) : \langle x_2, \ldots, x_n \rangle \rangle$$

- Вариант левой вставки с базовой константой $\backslash_k$ f (foldl)

$$(\backslash_k\ f) : \langle \rangle = k$$

$$(\backslash_k\ f) : \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle = f : \langle (\backslash_k\ f) : \langle x_1, x_2, \ldots, x_{n-1} \rangle, x_n \rangle$$

Определим типичный язык программирования на основе FP-системы

Введем набор констант и базовых функций

Константы:

- целые числа (0, 1, 2,..., -1, -2,...);
- логические значения (T и F);
- символы ('s', '*',...);
- гетерогенные списки (<>, <1, <1, 2>, T>,...)

в программах в явном виде не присутствуют!

Функции:

Арифметические функции: `+, -, *, add1, mul5, sub3:`

```
+ : <2,5>  =  7
add1 : 3   =  4
```

Логические функции: `=, /=, <, >,..., and, or, not,... eq0, neq5, lt2:`

```
=   : <2,5>  =  F
<   : <3,4>  =  T
lt2 : 5      =  T
or  : <T,F>  =  T
```

Функции-селекторы: `1, 2,..., 1r, 2r,...:`

```
2  : <2,5,7>  =  5
1r : <3,4,8>  =  8
```

Тождественная функция: `id:`

```
id  : <3,5>  =  <3,5>
```

Функции обработки списков

```
hd : <3,5,8>  =  3
tl : <3,5,8>  =  <5,8>

hr : <3,5,8>  =  8
tr : <3,5,8>  =  <3,5>

cons  : <3, <5,4>>  =  <3,5,4>
consr : <<5,4>, 3>  =  <5,4,3>

null : <>     = T
null : <3,5>  = F

distl : <3, <1,2,5>>  =  <<3,1>, <3,2>, <3,5>>
distr : <<1,2,5>, 3>  =  <<1,3>, <2,3>, <5,3>>

ι : 5  =  <1,2,3,4,5>
ι : 0  =  <>
```

Программа в *FP* – это определение функций:

```
def sqr  = * ∘ [id, id]        sqr  : 5  =  * : <5, 5>  =  25
def pow4 = * ∘ [sqr, sqr]      pow4 : 3  =  * : <sqr : 3, sqr : 3>  =  81
```

Примеры программ в языке программирования на базе *FP*

```
Haskell: fact n  =  if n = 0 then 1 else n * fact (n-1)

FP: def fact  =  eq0 → 1; (* ∘ [id, fact ∘ (- ∘ [id, 1])])
    def fact  =  (/1 *) ∘ ι
Haskell: fact n =  foldr (*) 1 [1..n]

Haskell: test elem []                    =  False
         test elem (x:lst)  | x == elem  =  True
                            | otherwise  =  test elem lst

FP: def test  =  null ∘ 2 → F; eq ∘ [1, hd ∘ 2] → T; test ∘ [1, tl ∘ 2]
    def test  =  (/F or) ∘ (α eq) ∘ distl

test : <5, <1,7,5,2>>
(/F or) : ((α eq) : (distl : <5, <1,7,5,2>>))
(/F or) : ((α eq) : <<5,1>,<5,7>,<5,5>,<5,2>>)
(/F or) : <F,F,T,F>
T

Haskell: test elem  =  (foldr (||) False) . (map (== elem))
```

Глава 4. Основы лямбда-исчисления.

4.1. Основные понятия

Будем задавать функции с помощью «лямбда-выражений», которые будем преобразовывать по определенным правилам (правила «вычислений»).

Основные типы лямбда-выражений:

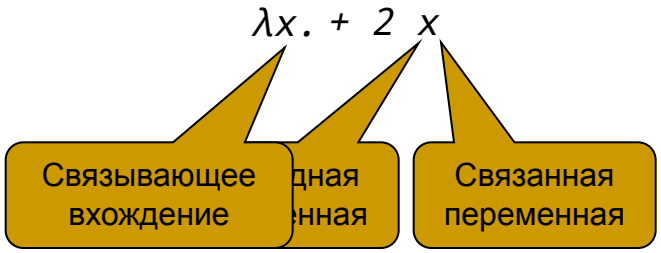
- переменная — *x*
- константа — *c*
- применение функции — *(e1 e2)*
- определение функции — *(λx.e)*

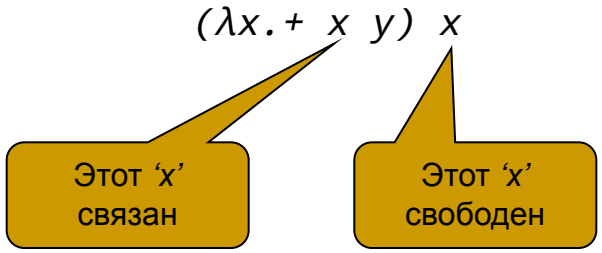
+ *3* *nil*

((+ 2) 3)

(λx.((+ 2) x))

(λx.(x x)) (λx.(x x))





Замкнутое выражение – выражение, не содержащее свободных переменных.

Правила преобразований выражений.

1. δ-редукция

$f\ e1\ e2 \ldots ek \rightarrow result$

$+\ 3\ 5 \rightarrow 8$

$or\ T\ F \rightarrow T$

2. β-редукция

$(\lambda x.e1)\ e2 \rightarrow e1\{x|e2\}$

$(\lambda x.+\ 1\ x)\ 5 \rightarrow +\ 1\ 5$

$(\lambda x.x\ x)(\lambda x.x\ x) \rightarrow (\lambda x.x\ x)(\lambda x.x\ x)$

3. α-преобразование

$\lambda x.e1 \leftrightarrow \lambda z.e1\{x_{св.}|z\}$

$\lambda x.((\lambda y.\lambda x.+\ x\ y)\ x) \rightarrow \lambda z.((\lambda y.\lambda x.+\ x\ y)\ z)$

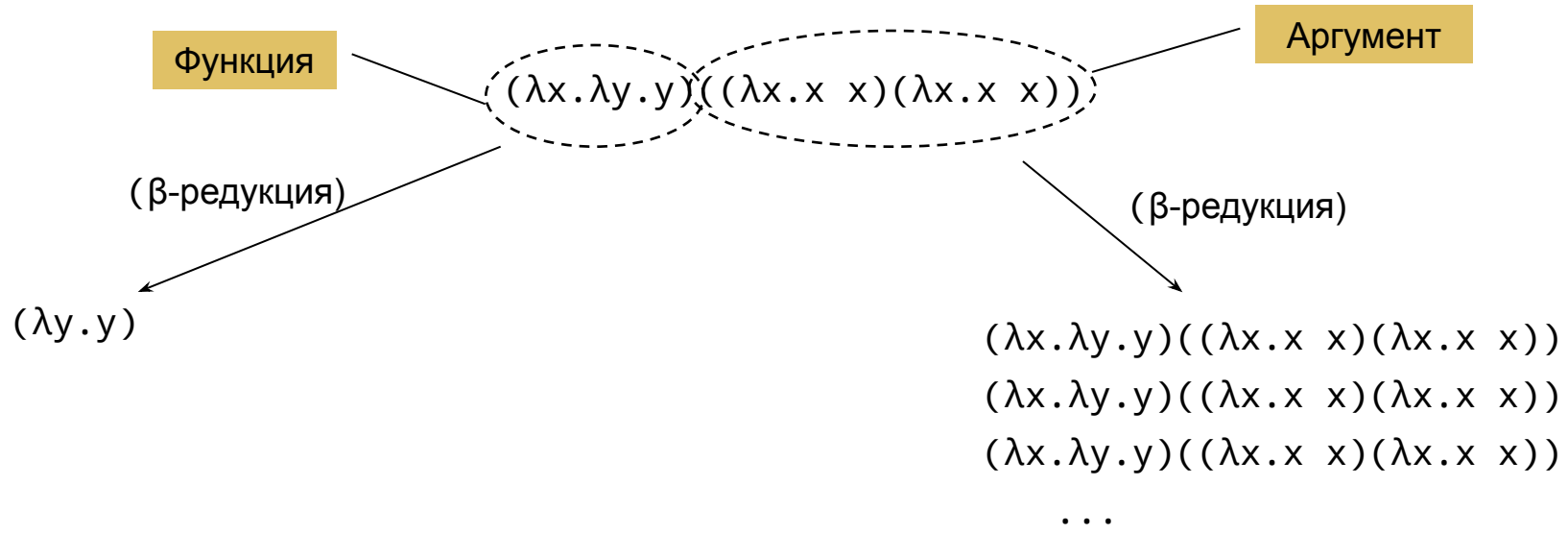
4. η-преобразование

$\lambda x.E\ x \leftrightarrow E$

$\lambda x.((\lambda y.\lambda x.+\ x\ y)\ x) \rightarrow (\lambda y.\lambda x.+\ x\ y)$

Примеры преобразования выражений

```
(λx.λy.+ x y) 2 5
(λy.+ 2 y) 5          (β-редукция)
+ 2 5                 (β-редукция)
7                     (δ-редукция)
```



От порядка применения редукций может зависеть результат!

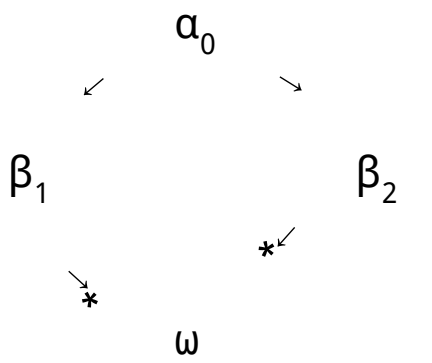
Ромбическое свойство системы редукций

Нормальная форма: лямбда-выражение, к которому не применимы β- и δ-редукции

$\alpha_0 \rightarrow \alpha_1 \rightarrow \ldots \rightarrow \alpha_k$

$\alpha_0 \rightarrow^* \alpha_k$

Отношение $\rightarrow^*$ это рефлексивное транзитивное замыкание отношения $\rightarrow$



существует (?) форма ω

Теорема (Черча – Россела): система преобразований, основанная на применении β-редукций обладает ромбическим свойством.

Следствие: лямбда-выражение не может иметь более одной нормальной формы.

Замечание: в некоторых случаях применение редукций может, в зависимости от порядка, либо приводить к нормальной форме, либо не приводить к ней.

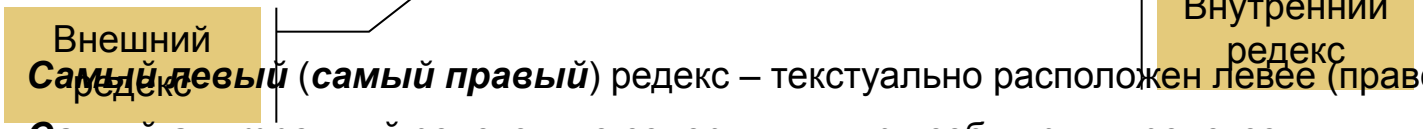
Стандартные порядки редукций.

Редекс (redex) – выражение, к которому применима одна из редукций.

Reducible ***Ex***pression – редуцируемое выражение. β-редекс; δ-редекс…

Выражение может содержать (или не содержать) один или несколько редексов.

Выражение $(\lambda x.\lambda y.y)((\lambda x.x\ x)(\lambda x.x\ x))$ содержит два редекса.



Самый левый (***самый правый***) редекс – текстуально расположен левее (правее) других.

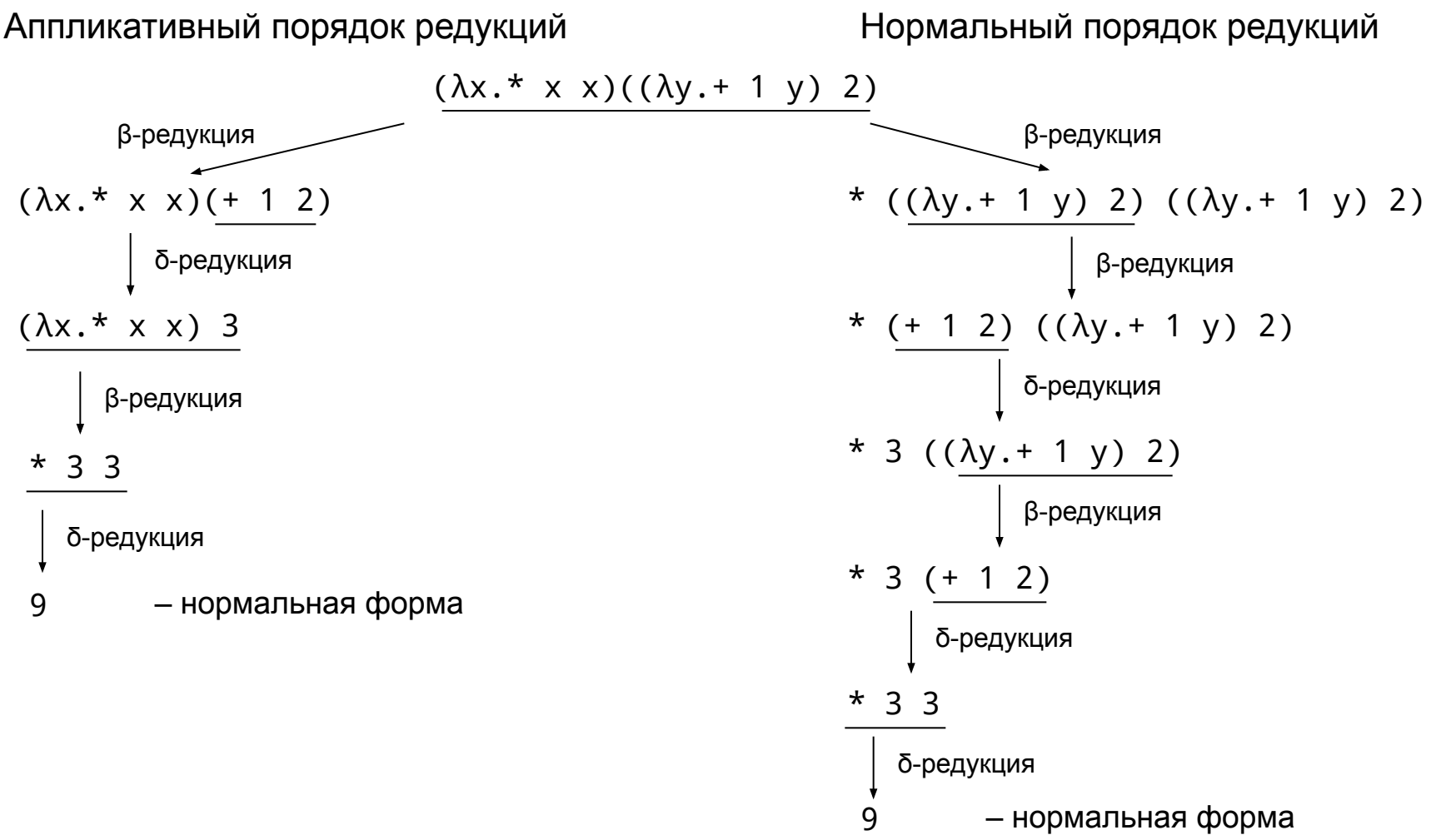
Самый внутренний редекс – не содержит внутри себя других редексов.

Самый внешний редекс – не содержится внутри никакого другого редекса.

Аппликативный порядок редукций – редукция всегда применяется к самому левому из ***самых внутренних*** редексов

Нормальный порядок редукций – редукция всегда применяется к самому левому из ***самых внешних*** редексов

Еще пример редукции выражения



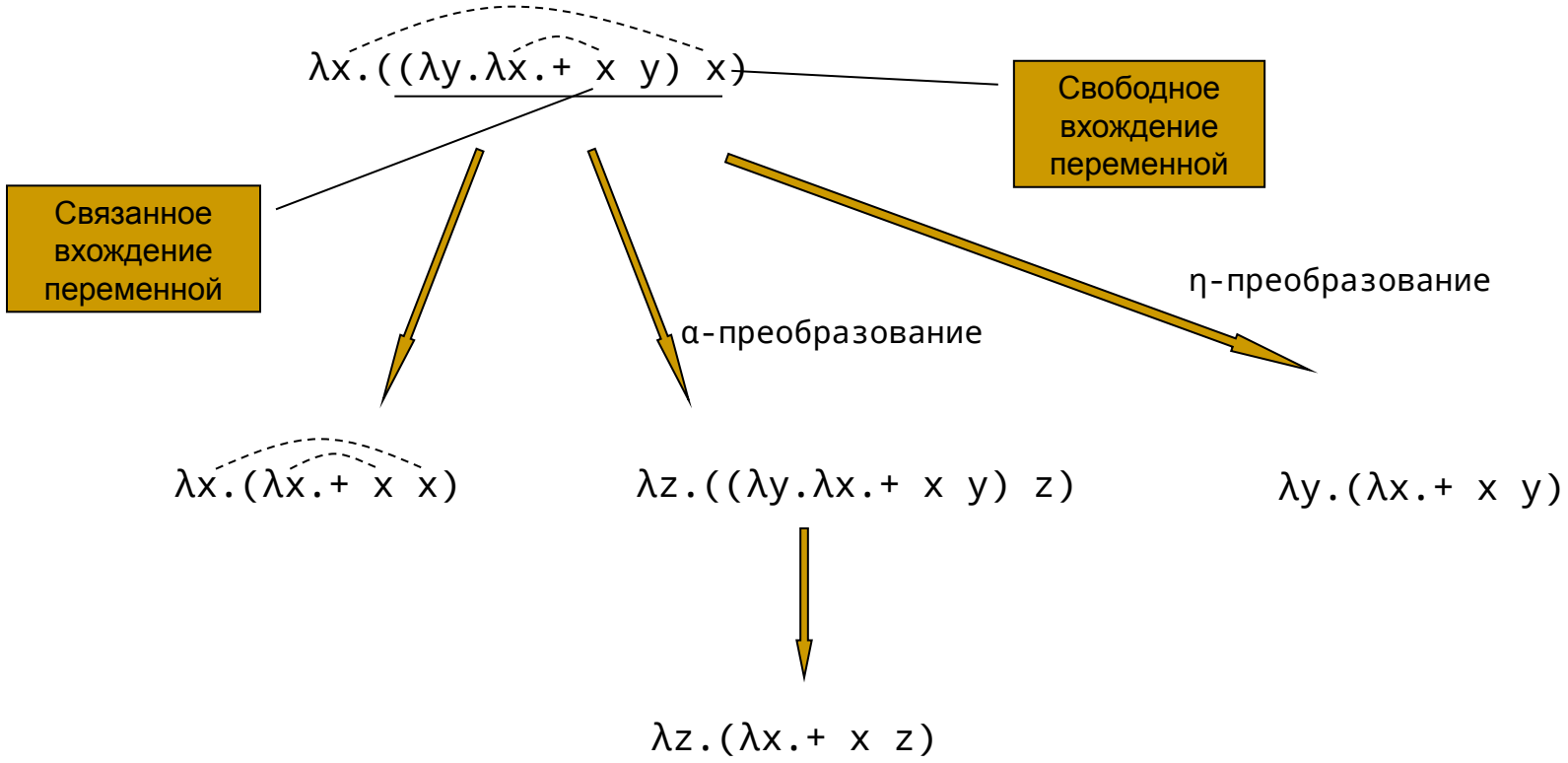
Сравнение различных порядков редукций.

Аппликативный порядок (АПР)	**Нормальный порядок (НПР)**
Не приводит к копированию одних и тех же выражений, если они не находятся в нормальной форме.	Одни и те же выражения аргументов могут многократно копироваться при подстановке в тело лямбда-выражения.
Выполняет редукцию даже тех выражений, которые в дальнейшем могут быть отброшены.	Никогда не редуцирует выражение, если это может оказаться впоследствии ненужным.
Может не приводить к нормальной форме, даже если она существует.	Всегда приводит выражение к нормальной форме, если только она вообще существует.

Преобразование выражения к нормальной форме в АПР соответствует энергичному порядку вычислений выражений в языках программирования.

Преобразование выражения к нормальной форме в НПР соответствует вычислениям выражений с подстановкой аргументов «по наименованию».

Проблема конфликта имен.



Слабая заголовочная нормальная форма (СЗНФ)

Выражение, не имеющее свободных переменных (замкнутое) находится в СЗНФ, если оно имеет один из следующих видов:

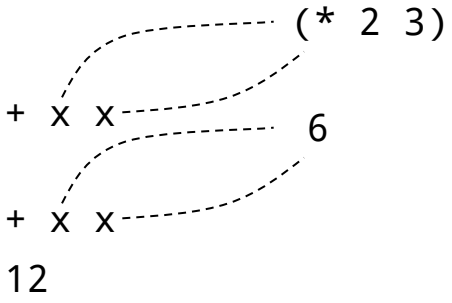
- Константа c
- Определение функции $\lambda x.E$
- Частичное применение функции $P\ E_1\ E_2\ \ldots\ E_k$

Выражение `λx.((λy.λx.+ x y) x)` находится в СЗНФ.

Вычисления, происходящие при исполнении программы в «ленивых» вычислениях, соответствуют редукции выражения в НПР до приведения к СЗНФ, дополненной эффектом «разделения» значений переменных при подстановке аргумента, еще не находящегося в СЗНФ.

```
(λx.+ x x)(* 2 3)
```

```
+ (* 2 3) (* 2 3)
+ 6 (* 2 3)
+ 6 6
12
```



Итоги: механизмы редукций в лямбда-исчислении

1. От способа применения редукций может зависеть окончательный вид выражения, но не его функциональный смысл.
2. Если выражение может быть приведено к нормальной форме, то это может быть сделано с помощью редукций в НПР, возможно, с переименованиями переменных.
3. Аппликативный порядок редукций, приводящий выражение к СЗНФ соответствует энергичной схеме вычислений, принятой в некоторых функциональных языках.
4. «Ленивая» схема вычислений может быть смоделирована приведением выражений к СЗНФ при применении НПР + разделение переменных.