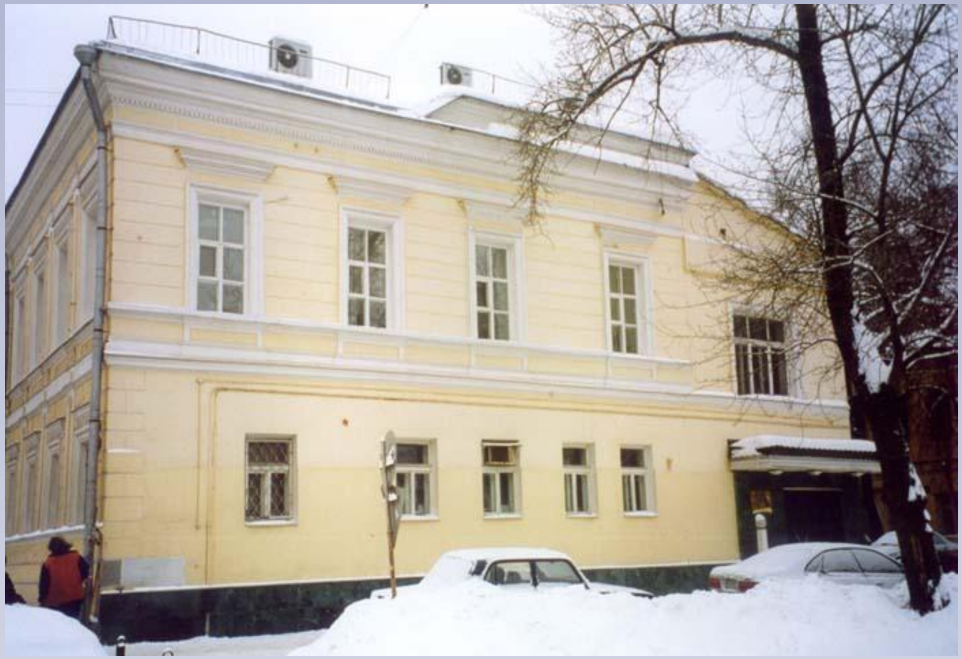

Московский государственный гуманитарный университет им. М. А. Шолохова

M. A. Sholokhov Moscow State University for the Humanities

- И. А. Шилин
- А. А. Александров
- В. В. Китюков

- Ilya Shilin
- Alexander Alexandrov
- Vyatcheslav Kitukov

- Второй этап исследования посвящен вычислению (с точностью до изоморфности) групп гомоморфизмо $\mathrm{Hom}(G,H)$ для любой пары групп *G* и *H*, где *H* — абелева группа и порядки групп *G* и *H* не выше 2 $\mathrm{Hom}(G,H)$ а состоит из гомом $G \longrightarrow H$ змов , а ее групповой операцией является о $\circ : \mathrm{Hom}^2(G,H) \longrightarrow \mathrm{Hom}(G,H)$, $(\phi \circ \psi)(a) = \phi(a)\psi(a)$

.

- На этом этапе
- составлены файлы в формате txt, содержащие описания таблиц Кэли для всех групп, удовлетворяющих указанным выше условиям,
- составлена достаточно эффективная программа на языке Турбо Паскаль, позволяющая максимально уменьшить число переборов отображений вида $G \to H$, для которых выполняются необходимые условия гомоморфизмов, и отобрать те из отображений, которые являются гомоморфизмами,
- для пар групп *G* и *H* вычислены периоды всех полученных гомоморфизмов, что, в свою очередь, позволяет определить, к какому классу изоморфных групп относится группа $\mathrm{Hom}(G, H)$.

- В качестве примера того, как проходили вычисления, анализ результатов и формулирование итогов, рассмотрим решенную нами задачу о гр $\mathrm{Hom}(\mathbf{D}_8, H)$, где

$$\mathbf{D}_8 = \langle s, t \mid s^4 = t^2 = e,\ ts = s^3 t \rangle \simeq \mathbb{Z}_4 \leftthreetimes \mathbb{Z}_2$$

- —диэдральная группа, состоящая из 8 элементов.
- На первом этапе решения для каждой группы *H*, занумеровав ее элементы, мы получили описание групповой операции в виде массива $n \times n$ ера n , где —порядок группы. Некоторые такие массивы были получены с помощью специально написанных программ на Турбо Паскале.

- В частности, для группы D_8 массив, найденный с помощью такой программы, имеет вид

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 7 & 8 & 6 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 6 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 8 & 7 & 5 & 6 \\ 5 & 8 & 6 & 7 & 1 & 3 & 4 & 2 \\ 6 & 7 & 5 & 8 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 7 & 5 & 8 & 6 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ 8 & 6 & 7 & 5 & 4 & 2 & 3 & 1. \end{matrix}$$

- Указанные массивы были оформлены в виде txt-файлов и записаны в директорию c:/homo/group.

- Далее была создана программа, перебирающая те из n^8 отображений $\phi : D_8 \longrightarrow H$, которые удовлетворяют необходимым условиям гомоморфизма $\phi(e) = e,\ \phi(a) = [\phi(a^{-1})]^{-1}$. Для каждого такого отображения проверяется выполнимость условия, заложенного в определение гомоморфизма. Программа спрашивает пользователя названия групп *G* и *H*, по этим названиям находит в директории c:/homo/group нужный txt-файл, проводит вычисления, а результат, то есть список гомоморфизмов, записывает для каждой группы *H* в специально созданный программой txt-файл в директории c:/homo/result.

- Например, для случая получаются гомоморфизмы (файл c:/homo/result/d8/z16-4^2)

1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	3	3	3	3
1	1	1	1	9	9	9	9
1	1	1	1	11	11	11	11
1	3	1	3	1	1	3	3
1	3	1	3	3	3	1	1
1	3	1	3	9	9	11	11
1	3	1	3	11	11	9	9
1	9	1	9	1	1	9	9
1	9	1	9	3	3	11	11
1	9	1	9	9	9	1	1
1	9	1	9	11	11	3	3
1	11	1	11	1	1	11	11
1	11	1	11	3	3	9	9
1	11	1	11	9	9	3	3
1	11	1	11	11	11	1	1

- Учитывая число получившихся гомоморфизмов и вычисляя в некоторых случаях их периоды, мы определили, к какому классу по изоморфности относится получившаяся группа гомоморфизмов.
- Так, приведенный выше пример означает, что группа $\mathrm{Hom}(\mathbf{D}_8, \mathbb{Z}_4^2)$ состоит из 16 элементов.

- В то же время из таблицы Кэли для группы $\mathbb{Z}_4^2$

- видно, что период любого гомоморфизма, кроме единичного $\epsilon : a \longmapsto e$ равен 2. Следовательно, $\mathrm{Hom}(\mathbf{D}_8, \mathbb{Z}_4^2) = \mathbb{Z}_2^4$.

- Результаты вычислений представлены в виде компактных и наглядных таблиц вида

H	$\dots$	$\dots$
$\mathrm{Hom}(G,H)$	$\dots$	$\dots$

- В частности, для группы $G = \mathbf{D}_8$ эти таблицы выглядят так:

H	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_5$	$\mathbb{Z}_6$	$\mathbb{Z}_7$	$\mathbb{Z}_8$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_9$	$\mathbb{Z}_3^2$
$\mathrm{Hom}(\mathbf{D}_8,H)$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\{\epsilon\}$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^4$	$\{\epsilon\}$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\{\epsilon\}$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^6$	$\mathbb{Z}_2^4$	$\{\epsilon\}$	$\{\epsilon\}$

H	$\mathbb{Z}_{10}$	$\mathbb{Z}_{11}$	$\mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_6$	$\mathbb{Z}_{13}$	$\mathbb{Z}_{14}$	$\mathbb{Z}_{15}$	$\mathbb{Z}_{16}$	$\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_8$	$\mathbb{Z}_4^2$
$\mathrm{Hom}(\mathbf{D}_8,H)$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\{\epsilon\}$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\{\epsilon\}$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\{\epsilon\}$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^4$	$\mathbb{Z}_2^4$

H	$\mathbb{Z}_2^4$	$\mathbb{Z}_4K$	$\mathbb{Z}_{17}$	$\mathbb{Z}_{18}$	$\mathbb{Z}_3\mathbb{Z}_6$	$\mathbb{Z}_{19}$	$\mathbb{Z}_{20}$	$\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_{10}$
$\mathrm{Hom}(\mathbf{D}_8,H)$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^8$	$\{\epsilon\}$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\{\epsilon\}$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^2$