



*Московский государственный  
гуманитарный университет  
им. М. А. Шолохова*

*M. A. Sholokhov Moscow  
State University  
for the Humanities*

- И. А. Шилин
- А. А. Александров
- В. В. КИТЮКОВ

- Ilya Shilin
- Alexander Alexandrov
- Vyatcheslav Kitukov



- 
- Второй этап исследования посвящен вычислению (с точностью до изоморфности) групп гомоморфизмов  $\text{Hom}(G, H)$  для любой пары групп  $G$  и  $H$ , где  $H$  — абелева группа и порядки групп  $G$  и  $H$  не выше  $\aleph_1$ . Множество  $\text{Hom}(G, H)$  состоит из гомоморфизмов  $G \rightarrow H$ , а ее групповой операцией является  $\circ : \text{Hom}^2(G, H) \rightarrow \text{Hom}(G, H)$ ,  $(\phi \circ \psi)(a) = \phi(a)\psi(a)$ .



---


□ На этом этапе

- составлены файлы в формате txt, содержащие описания таблиц Кэли для всех групп, удовлетворяющих указанным выше условиям,
- составлена достаточно эффективная программа на языке Турбо Паскаль, позволяющая максимально уменьшить число переборов отображений вида  $G \rightarrow H$ , для которых выполняются необходимые условия гомоморфизмов, и отобрать те из отображений, которые являются гомоморфизмами,
- для пар групп  $G$  и  $H$  вычислены периоды всех полученных гомоморфизмов, что, в свою очередь, позволяет определить, к какому классу изоморфных групп относится группа  $\langle G, H \rangle$ .



- 
- В качестве примера того, как проходили вычисления, анализ результатов и формулирование итогов, рассмотрим решенную нами задачу о группе  $\text{Hom}(\mathbf{D}_8, H)$ , где

$$\mathbf{D}_8 = \langle s, t \mid s^4 = t^2 = e, ts = s^3t \rangle \simeq \mathbb{Z}_4 \rtimes \mathbb{Z}_2$$


- —диэдральная группа, состоящая из 8 элементов.
  - На первом этапе решения для каждой группы  $H$ , занумеровав ее элементы, мы получили описание групповой операции в виде массива  $n \times n$  размера  $n$ , где  $n$  —порядок группы. Некоторые такие массивы были получены с помощью специально написанных программ на Турбо Паскале.
- 
- 

- 
- В частности, для группы  $D_8$  массив, найденный с помощью такой программы, имеет вид

1	2	3	4	5	6	7	8
2	3	4	1	7	8	6	5
3	4	1	2	6	5	8	7
4	1	2	3	8	7	5	6
5	8	6	7	1	3	4	2
6	7	5	8	3	1	2	4
7	5	8	6	2	4	1	3
8	6	7	5	4	2	3	1.

- Указанные массивы были оформлены в виде txt-файлов и записаны в директорию `c:/homo/group`.



- 
- Далее была создана программа, перебирающая  $n^8$  из  $\phi : D_8 \rightarrow H$  ний, которые удовлетворяют необходимым условиям гомоморфизма  $\phi(e) = e, \phi(a) = [\phi(a^{-1})]^{-1}$ . Для каждого такого отображения проверяется выполнимость условия, заложенного в определение гомоморфизма. Программа спрашивает пользователя названия групп  $G$  и  $H$ , по этим названиям находит в директории `c:/homo/group` нужный txt-файл, проводит вычисления, а результат, то есть список гомоморфизмов, записывает для каждой группы  $H$  в специально созданный программой txt-файл в директории `c:/homo/result`.
- 
- 

- 
- Например, для случая получаются гомоморфизмы (файл `c:/homo/result/d8/z16-4^2`)

```
1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 3 3 3 3
1 1 1 1 9 9 9 9
1 1 1 1 11 11 11 11
1 3 1 3 1 1 3 3
1 3 1 3 3 3 1 1
1 3 1 3 9 9 11 11
1 3 1 3 11 11 9 9
1 9 1 9 1 1 9 9
1 9 1 9 3 3 11 11
1 9 1 9 9 9 1 1
1 9 1 9 11 11 3 3
1 11 1 11 1 1 11 11
1 11 1 11 3 3 9 9
1 11 1 11 9 9 3 3
1 11 1 11 11 11 1 1
```



- 
- Учитывая число получившихся гомоморфизмов и вычисляя в некоторых случаях их периоды, мы определили, к какому классу по изоморфности относится получившаяся группа гомоморфизмов.

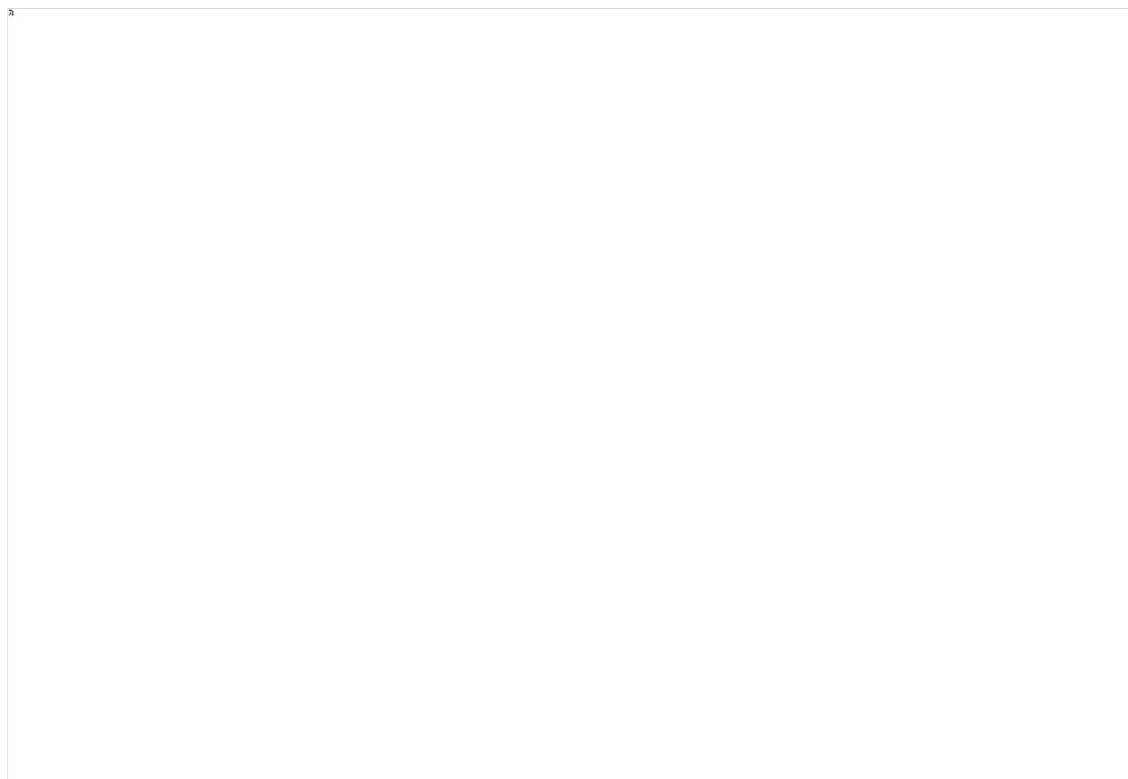
$$\text{Hom}(\mathbf{D}_8, \mathbb{Z}_4^2)$$

- Так, приведенный выше пример означает, что группа состоит из 16 элементов.





- 
- В то же время из таблицы Кэли для групп  $\mathbb{Z}_4^2$



- видно, что период любого гомоморфизма, кроме единичного  $\epsilon: a \mapsto e$  равен 2. Следовательно  $\text{Hom}(\mathbf{D}_8, \mathbb{Z}_4^2) = \mathbb{Z}_2^4$ .



- Результаты вычислений представлены в виде компактных и наглядных таблиц вида

$H$	$\dots$	$\dots$
$\text{Hom}(G, H)$	$\dots$	$\dots$

- В частности, для групп  $G = \mathbf{D}_8$  эти таблицы выглядят так:

$H$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_5$	$\mathbb{Z}_6$	$\mathbb{Z}_7$	$\mathbb{Z}_8$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_9$	$\mathbb{Z}_3^2$
$\text{Hom}(\mathbf{D}_8, H)$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\{\epsilon\}$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^4$	$\{\epsilon\}$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\{\epsilon\}$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^6$	$\mathbb{Z}_2^4$	$\{\epsilon\}$	$\{\epsilon\}$

$H$	$\mathbb{Z}_{10}$	$\mathbb{Z}_{11}$	$\mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_6$	$\mathbb{Z}_{13}$	$\mathbb{Z}_{14}$	$\mathbb{Z}_{15}$	$\mathbb{Z}_{16}$	$\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_8$	$\mathbb{Z}_4^2$
$\text{Hom}(\mathbf{D}_8, H)$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\{\epsilon\}$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\{\epsilon\}$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\{\epsilon\}$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^4$	$\mathbb{Z}_2^4$

$H$	$\mathbb{Z}_2^4$	$\mathbb{Z}_4K$	$\mathbb{Z}_{17}$	$\mathbb{Z}_{18}$	$\mathbb{Z}_3\mathbb{Z}_6$	$\mathbb{Z}_{19}$	$\mathbb{Z}_{20}$	$\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_{10}$
$\text{Hom}(\mathbf{D}_8, H)$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^8$	$\{\epsilon\}$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\{\epsilon\}$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^2$

