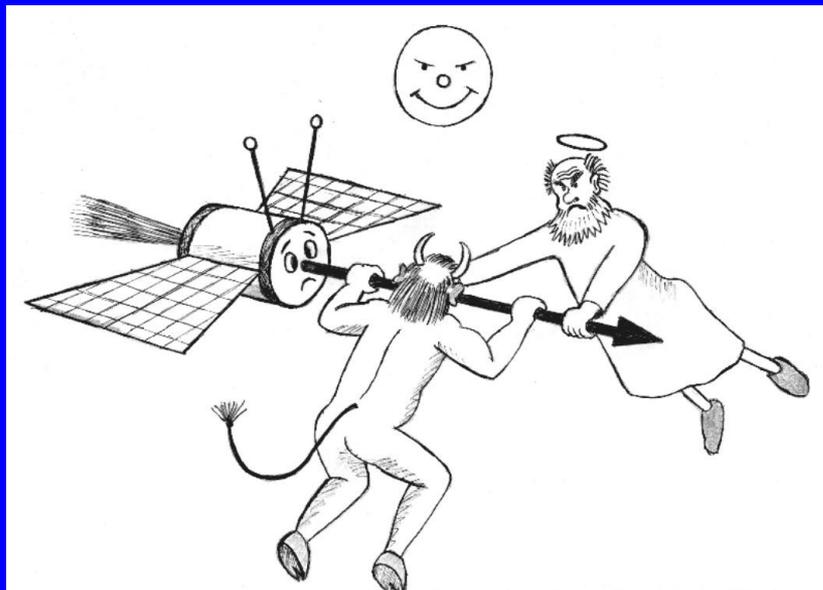


# ОПТИМИЗАЦИЯ ПЕРЕЛЕТОВ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА НАПРАВЛЕНИЕ ТЯГИ



А. Суханов

ИКИ

[sukhanov@iki.rssi.ru](mailto:sukhanov@iki.rssi.ru)

# Отсутствие ограничений на направление тяги

Уравнения движения:  $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}, \quad \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{f} + \boldsymbol{\alpha}, \quad \mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$

$\boldsymbol{\alpha}$  – вектор тяги

Минимизируемый функционал:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f_0 dt$$

Возможно ограничение:

$$\boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{\alpha} = \alpha^2, \quad \alpha = -\frac{\dot{m}c}{m}$$

Функция Гамильтона:

$$H = p_0 f_0 + \mathbf{p}_r^T \mathbf{v} + \mathbf{p}_v^T \mathbf{f} + \mathbf{p}_v^T \boldsymbol{\alpha} + \frac{\lambda_\alpha}{2} (\boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{\alpha} - \alpha)$$

$p_0, \mathbf{p}_r, \mathbf{p}_v, \lambda_\alpha$  – сопряженные переменные

$\mathbf{p}_v$  – базис-вектор Лоудена

Оптимальная тяга при  $\max_{\boldsymbol{\alpha}} H \Rightarrow \max_{\boldsymbol{\alpha}} \mathbf{p}_v^T \boldsymbol{\alpha} \Rightarrow \boldsymbol{\alpha} \uparrow \uparrow \mathbf{p}_v$

# Отсутствие ограничений на направление тяги

1. Идеально регулируемая тяга ограниченной мощности (ИРТОМ)
2. Постоянная скорость истечения с ограниченным расходом рабочего тела (ПСИОР) или импульсная тяга

	ИРТОМ	ПСИОР
Оптимальная тяга	$p_0 = -1, \quad f_0 = \frac{\alpha^2}{2N}$ $\alpha = N p_v$	$f_0 = -\dot{m}$ $\alpha = \alpha \frac{p_v}{c}, \quad \alpha = -\frac{\dot{m} c}{m}$
Функция переключения		$\kappa = \frac{\dot{m} c}{p_v}$

$m = m(t)$  – масса КА

$N = N(r, t)$  – мощность тяги

$c$  – скорость истечения

# Проекция вектора на множество

Проекция (абсолютная) вектора  $\mathbf{b}$  на вектор  $\mathbf{a}$ :  $\mathbf{b}_a = (\mathbf{b}^T \mathbf{a}^0) \mathbf{a}^0 = \mathbf{a}^0 \mathbf{a}^{0T} \mathbf{b}$

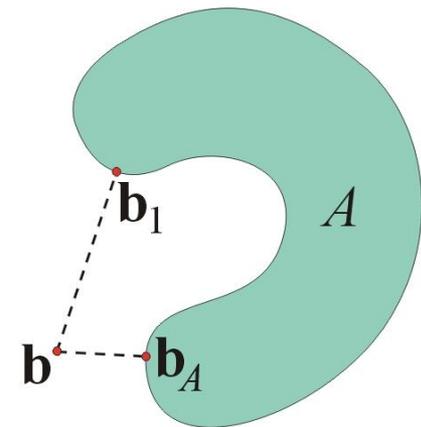
$\mathbf{P} = \mathbf{a}^0 \mathbf{a}^{0T}$  – проективная матрица

$$\mathbf{P}^T = \mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$$

Проекция  $\mathbf{b}_A$  вектора  $\mathbf{b}$  на некоторое замкнутое множество векторов  $A$  есть проекция на вектор  $\mathbf{a} \in A$ , на котором достигается  $\max \mathbf{b}^T \mathbf{a}^0$ .

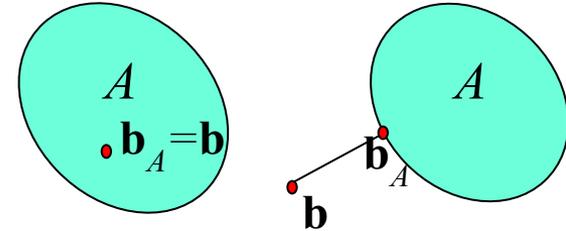
Матрица  $\mathbf{P}$  проектирует  $\mathbf{b}$  на множество  $A$ .

Проекцию  $\mathbf{b}_i$  вектора  $\mathbf{b}$  на вектор  $\mathbf{a}_i \in A$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) назовем локальной проекцией на множество  $A$ , если существует такая окрестность вектора  $\mathbf{a}_i$ , что для любого вектора  $\mathbf{a}_\varepsilon$  из этой окрестности  $\mathbf{b}^T \mathbf{a}_\varepsilon^0 \leq \mathbf{b}^T \mathbf{a}_i^0$

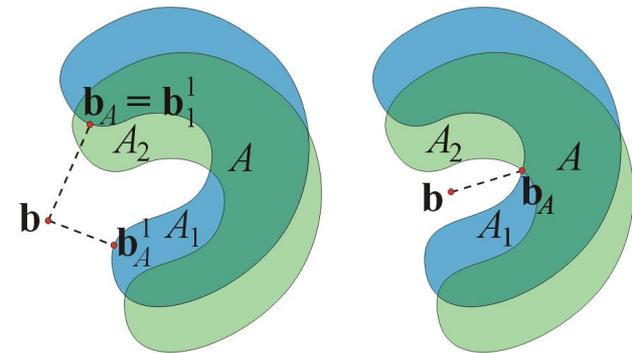


# Свойства проекций вектора на множество

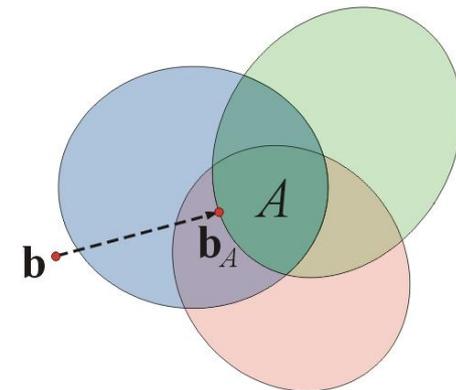
1. Проекция вектора  $\mathbf{b}$  на множество  $A$  достигается при  $\mathbf{a}^0 = \mathbf{b}^0$ , если  $\mathbf{b} \in A$  (при этом  $\mathbf{b}_A = \mathbf{b}$ ) и на границе множества  $A$ , если  $\mathbf{b} \notin A$



2. Абсолютная проекция на пересечение нескольких подмножеств достигается либо на абсолютной или локальной проекции на одно из подмножеств, либо на пересечении границ по крайней мере двух подмножеств.



3. Если существует единственная проекция  $\mathbf{b}_A$  вектора  $\mathbf{b}$  на одно из подмножеств и вектор  $\mathbf{a}$ , на котором достигается эта проекция, принадлежит пересечению  $A$  этих подмножеств, то  $\mathbf{b}_A$  является абсолютной проекцией вектора  $\mathbf{b}$  на множество  $A$ .



# Общий случай ограничений на направление тяги

Ограничения на единичный вектор  $\alpha^0$  направления тяги:

$$\alpha^0 \in G, \quad G: \quad \mathbf{g} = \mathbf{0} \quad \text{или} \quad \mathbf{g} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{g} = \mathbf{g}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t, \alpha^0)$$

Максимум функции Гамильтона достигается при  $\max_{\alpha^0 \in G} \mathbf{p}_v^T \alpha^0$

$$\Rightarrow \alpha_m^0 = \arg \max_{\alpha^0 \in G} \mathbf{p}_v^T \alpha^0$$

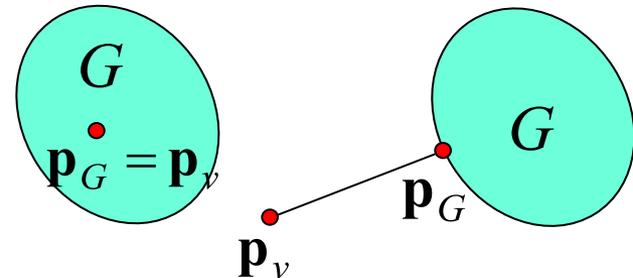
Матрица  $\mathbf{P} = \alpha_m^0 \alpha_m^{0T}$  проецирует вектор  $\mathbf{p}_v$  на множество  $G$

$\mathbf{p}_G = \mathbf{P} \mathbf{p}_v$  – проекция  $\mathbf{p}_v$  на  $G$

$$\mathbf{p}_v^0 \in G \Rightarrow \mathbf{p}_G = \mathbf{p}_v$$

$$\mathbf{p}_v^0 \notin G \Rightarrow \mathbf{p}_G \text{ лежит на границе } G$$

$$\Rightarrow \text{достаточно проверить } \mathbf{g}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t, \mathbf{p}_v^0)$$



При ограничении  $\mathbf{g} = \mathbf{0}$  граница множества совпадает с самим множеством.

# Оптимальная тяга

	Ограничения на направление тяги	Отсутствие ограничений	
<b>ИРТОМ</b>	$\alpha = N p_G$	$\alpha = N p_v$	
<b>ПСИОР</b>	$\alpha = \alpha \frac{p_G}{p_G}$	$\alpha = \alpha \frac{p_v}{p_v}$	$\left( \alpha = -\frac{m c}{m} \right)$
	$\kappa = \frac{P_G c}{m}$	$\kappa = \frac{P_v c}{m}$	

# Ограничение типа равенства

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t, \boldsymbol{\alpha}^0) = \mathbf{0}$$

$\dot{\mathbf{x}} = 1$  — делает систему автономной

$$H = p_0 f_0 + \mathbf{p}_r^T \mathbf{v} + \mathbf{p}_v^T \mathbf{f} + \mathbf{p}_v^T \boldsymbol{\alpha} + \frac{\lambda_\alpha}{2} (\boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{\alpha} - \alpha^2) + \boldsymbol{\lambda}_g^T \mathbf{g} + p_t$$

# Ограничение типа неравенства

$$G: \mathbf{g} = \mathbf{g}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t, \boldsymbol{\alpha}^0) \geq \mathbf{0}$$

Двусторонние ограничения разбиваются на два неравенства

Если  $\mathbf{g}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t, \mathbf{p}_v^0) \geq \mathbf{0}$ , то  $\mathbf{p}_G = \mathbf{p}_v \Rightarrow \boldsymbol{\alpha}^0 = \mathbf{p}_v^0$

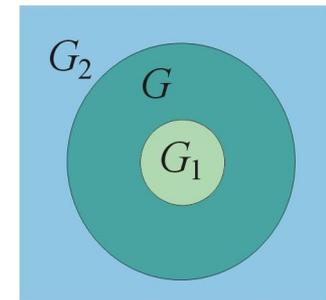
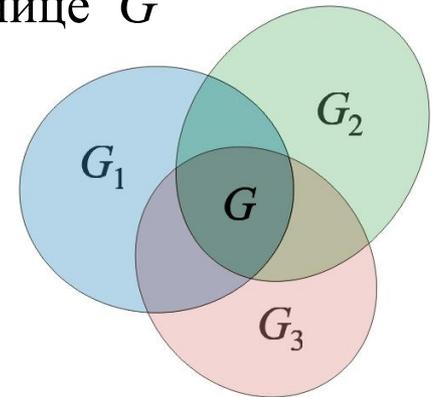
Рассмотрим случай  $\mathbf{g}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t, \mathbf{p}_v^0) < \mathbf{0}$ , когда  $\mathbf{p}_G$  на границе  $G$

$$\mathbf{g} = \{g_1, \dots, g_n\}, \quad G_i: g_i \geq 0$$

$$G = G_1 \cap G_2 \cap \dots \cap G_n$$

Граница множества  $G$ :  $k$  компонент вектора  $\mathbf{g}$  равны нулю, а остальные  $n - k$  компонент строго больше нуля ( $1 \leq k \leq n$ )

Границы подмножеств  $G_i$  могут пересекаться либо не пересекаться (например, в случае двусторонних ограничений)



# Ограничение типа неравенства

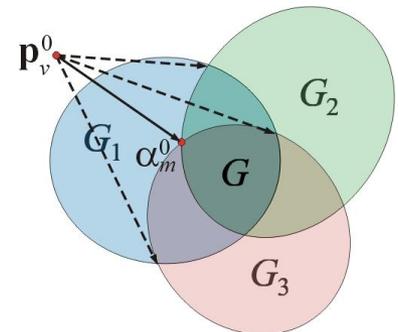
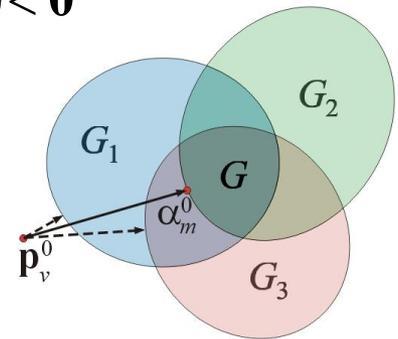
Пусть для каждой пары  $g_i, g_j$  одновременное выполнение равенств

$$g_i = 0, \quad g_j = 0$$

либо возможно лишь для конечного числа значений  $\alpha^0$ , либо невозможно.

Способ нахождения оптимального  $\alpha^0$  при  $\mathbf{g}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t, \mathbf{p}_v^0) < \mathbf{0}$ .

- Вычисляются все проекции вектора  $\mathbf{p}_v$  на подмножества  $G_i$
- Находятся точки пересечения границ каждой пары подмножеств  $G_i, G_j$
- Из всех найденных векторов  $\alpha^0$  выбираются принадлежащие пересечению  $G$  и среди них находится  $\alpha_m^0 = \arg \max_{\alpha^0 \in G} \mathbf{p}_v^T \alpha^0$



# Линейные ограничения типа равенства

$$G: \mathbf{B}\alpha^0 = \mathbf{c} \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t), \quad \mathbf{c} = \mathbf{c}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$$

$$\mathbf{P}_0 = \mathbf{I} - \mathbf{B}^T (\mathbf{B}\mathbf{B}^T)^{-1} \mathbf{B} \quad - \text{проективная матрица (проектирует } \perp \mathbf{B}),$$

$\mathbf{I}$  – единичная матрица

$$\alpha^0 = \sqrt{1 - \mathbf{c}^T (\mathbf{B}\mathbf{B}^T)^{-1} \mathbf{c}} \frac{\mathbf{P}_0 \mathbf{p}_v}{|\mathbf{P}_0 \mathbf{p}_v|} + \mathbf{B}^T (\mathbf{B}\mathbf{B}^T)^{-1} \mathbf{c} \quad - \text{оптимальное направление тяги}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^T \\ \boxtimes \\ \mathbf{b}_n^T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \boxtimes \\ c_n \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{b}_i^T \alpha^0 = c_i$$

⇒ ограничение типа равенства дает поверхность конуса при  $n = 1$  или линии пересечения поверхностей круговых конусов при  $n = 2$ ; матрица  $\mathbf{B}\mathbf{B}^T$  невырождена если конусы пересекаются

Ограничение выполнимо лишь при  $|c_i| \leq |\mathbf{b}_i|$

# Линейные ограничения типа неравенства

$$G: \mathbf{B}\alpha^0 \geq \mathbf{c} \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t), \quad \mathbf{c} = \mathbf{c}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$$

– пересечение круговых конусов.

$$G_i: \mathbf{b}_i^T \alpha^0 \geq c_i \Rightarrow \alpha^0 \text{ внутри } (c_i > 0) \text{ или вне } (c_i < 0) \text{ кругового конуса, } \cos \varphi_i = c_i / |\mathbf{b}_i|$$

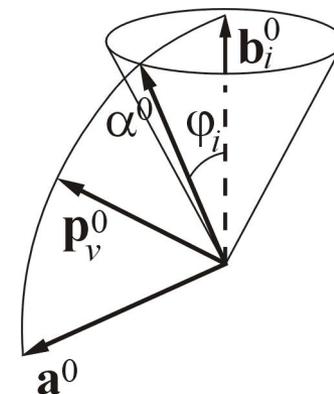
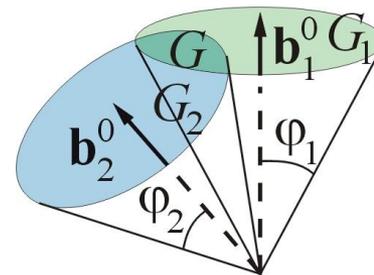
$$\mathbf{B}\mathbf{p}_v^0 \geq \mathbf{c} \Rightarrow \alpha^0 = \mathbf{p}_v^0$$

$\mathbf{B}\mathbf{p}_v^0 < \mathbf{c} \Rightarrow$  оптимальное направление тяги достигается либо на поверхности  $i$ -го конуса, либо на линии пересечения двух конусов

$$\text{Пусть } \mathbf{a}^0 = \frac{\mathbf{P}_0 \mathbf{p}_v}{|\mathbf{P}_0 \mathbf{p}_v|}, \quad \mathbf{b}_i^0 = \frac{\mathbf{b}_i}{|\mathbf{b}_i|}, \quad \mathbf{B}_{ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_i \\ \mathbf{b}_j \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_{ij} = \begin{bmatrix} c_i \\ c_j \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \alpha^0 = \mathbf{a}^0 \sin \varphi_i + \mathbf{b}_i^0 \cos \varphi_i$$

$$\text{или } \alpha^0 = \sqrt{1 - \mathbf{c}_{ij}^T (\mathbf{B}_{ij} \mathbf{B}_{ij}^T)^{-1} \mathbf{c}_{ij}} \mathbf{a}^0 + \mathbf{B}_{ij}^T (\mathbf{B}_{ij} \mathbf{B}_{ij}^T)^{-1} \mathbf{c}_{ij}$$



# Линейные однородные ограничения

**$\mathbf{V}\alpha^0 = \mathbf{0}$**   $\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  – матрица ранга 1 (плоскость) или 2 (прямая)

$\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{V}^T (\mathbf{V}\mathbf{V}^T)^{-1} \mathbf{V}$  – проективная матрица

$$\text{rank}\mathbf{V} = 1 \Rightarrow \mathbf{V} = \mathbf{b}^T, \quad \mathbf{P} = \mathbf{I} - \frac{\mathbf{b}\mathbf{b}^T}{b^2} \quad (b = |\mathbf{b}|)$$

$$\text{rank}\mathbf{V} = 2 \Rightarrow \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^T \\ \mathbf{b}_2^T \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha^0 \uparrow\uparrow \mathbf{b} = \mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2$$

$$\Rightarrow \mathbf{V} = \mathbf{I} - \frac{\mathbf{b}\mathbf{b}^T}{b^2}, \quad \mathbf{P} = \frac{\mathbf{b}\mathbf{b}^T}{b^2}$$

$\Rightarrow$  Оптимальная тяга либо направлена вдоль заданного вектора, либо ортогональна заданному вектору

# Линейные однородные ограничения типа неравенства

$$\mathbf{V}\alpha^0 \geq \mathbf{0}$$

– телесный угол, ограниченный  
плоскостями (полупространство,  
если  $\mathbf{V}$  строка)

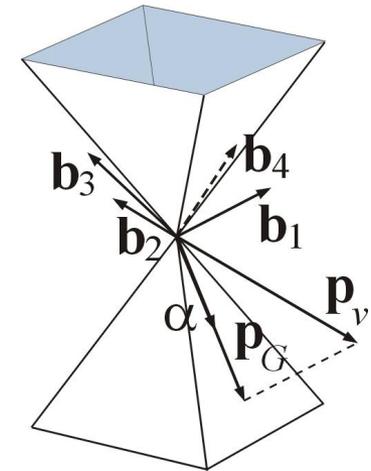
$$\mathbf{V}\mathbf{p}_v^0 \geq \mathbf{0} \Rightarrow \alpha^0 = \mathbf{p}_v^0$$

$\mathbf{V}\mathbf{p}_v^0 < \mathbf{0} \Rightarrow$  оптимальное направление тяги  
достигается либо на  $i$ -й плоскости, либо  
на линии пересечения двух плоскостей

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^T \\ \boxtimes \\ \mathbf{b}_n^T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}_{ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_i^T \\ \mathbf{b}_j^T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_G = \mathbf{P}\mathbf{p}_v, \quad \mathbf{p}_G^0 = \mathbf{p}_G / |\mathbf{p}_G|$$

$$\alpha^0 = \mathbf{p}_G^0, \quad \mathbf{P} = \mathbf{I} - \frac{\mathbf{b}_i \mathbf{b}_i^T}{b_i^2} \quad (b_i = |\mathbf{b}_i|)$$

$$\text{или} \quad \mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{V}_{ij}^T (\mathbf{V}_{ij} \mathbf{V}_{ij}^T)^{-1} \mathbf{V}_{ij}$$



# Примеры линейных однородных ограничений

- Тяга ИСЗ ортогональна местной вертикали

$$\mathbf{B} = \mathbf{r}^T, \quad \mathbf{P} = \mathbf{I} - \frac{\mathbf{r}\mathbf{r}^T}{r^2}$$

- Ось вращения стабилизированного вращением ИСЗ направлена на Солнце и тяга направлена вдоль этой оси («Прогноз»)

$$\mathbf{B} = \mathbf{I} - \frac{\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\rho}^T}{\rho^2}, \quad \mathbf{P} = \frac{\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\rho}^T}{\rho^2}$$

где  $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}_S(t) - \mathbf{r} \approx \mathbf{r}_S(t)$ ,  $\mathbf{r}_S(t)$  – геоцентрический радиус-вектор Солнца

- То же, что в предыдущем случае, но во вращающейся системе координат с осью  $x$ , направленной вдоль линии Солнце-Земля (например, в задаче трех тел)

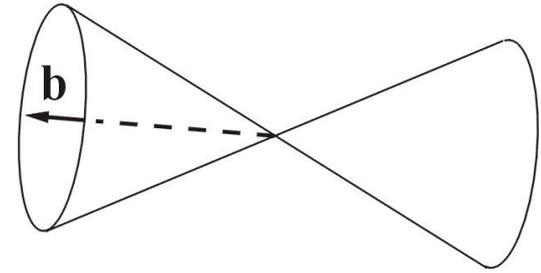
$$\mathbf{B} \approx \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{или} \quad \mathbf{B} \approx \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

# Объединение множеств и смешанные ограничения

Приведенные результаты легко обобщаются на:

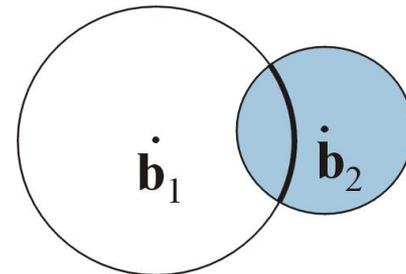
- Объединение ограничивающих множеств  $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_n$

Пример:  $\mathbf{b}^T \boldsymbol{\alpha}^0 \geq c > 0$  или  $\mathbf{b}^T \boldsymbol{\alpha}^0 \leq -c$



- Смешанные ограничения  $\mathbf{g}_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t, \boldsymbol{\alpha}^0) = \mathbf{0}$  и  $\mathbf{g}_2(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t, \boldsymbol{\alpha}^0) \geq \mathbf{0}$

Пример:  $\mathbf{b}_1^T \boldsymbol{\alpha}^0 = c_1$  и  $\mathbf{b}_2^T \boldsymbol{\alpha}^0 \geq c_2$



# Уравнения для базис-вектора Лоудена

$$\mathbb{R} = \mathbf{v}, \quad \mathbb{V} = \mathbf{f} + \boldsymbol{\alpha}, \quad \mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$$

- Ограничения на направление тяги отсутствуют:

$$\mathbb{p}_r^T = -\mathbf{p}_v^T \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{r}}, \quad \mathbb{p}_v^T = -\mathbf{p}_r^T - \mathbf{p}_v^T \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{v}} \quad \text{— сопряженные уравнения в вариациях}$$

Решение:  $\mathbf{p}^{(0)} = \{\mathbf{p}_r^{(0)}, \mathbf{p}_v^{(0)}\} = \mathbf{A}^T \boldsymbol{\beta}_0$ ,  $\mathbf{A}$  — общее решение,  $\boldsymbol{\beta}_0 = \text{const}$

$$\mathbf{p}_v^{(0)} = \mathbf{Q}^T \boldsymbol{\beta}_0$$

- Имеется ограничение  $\mathbf{Q}$  — подматрица  $\mathbf{A}$ :  $\mathbf{g}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t, \boldsymbol{\alpha}^0) = \mathbf{0}$ :

$$\mathbb{p}_r^T = -\mathbf{p}_v^T \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{r}} + \boldsymbol{\psi}_r^T, \quad \mathbb{p}_v^T = -\mathbf{p}_r^T - \mathbf{p}_v^T \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{v}} + \boldsymbol{\psi}_v^T$$

$$\boldsymbol{\psi}_r = \left( \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{r}} \right)^T \boldsymbol{\lambda}_g, \quad \boldsymbol{\psi}_v = \left( \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{v}} \right)^T \boldsymbol{\lambda}_g, \quad \boldsymbol{\lambda}_g \text{ — неопределенный множитель}$$

$$\mathbf{B}\boldsymbol{\alpha}^0 = \mathbf{c}: \quad \boldsymbol{\lambda}_g = -(\mathbf{B}\mathbf{B}^T)^{-1} \left( \mathbf{B}\mathbf{p}_v - \sqrt{\frac{\mathbf{p}_v^T \mathbf{P}_0 \mathbf{p}_v}{1 - \mathbf{c}^T (\mathbf{B}\mathbf{B}^T)^{-1} \mathbf{c}}} \mathbf{c} \right), \quad \mathbf{P}_0 = \mathbf{I} - \mathbf{B}^T (\mathbf{B}\mathbf{B}^T)^{-1} \mathbf{B}$$

# Способы вычисления базис-вектора Лоудена

- Численное интегрирование совместно с уравнениями движения

- В случае малой тяги метод вариации произвольной постоянной

$$\mathbf{p}^{(0)} = \{\mathbf{p}_r^{(0)}, \mathbf{p}_v^{(0)}\} = \mathbf{A}^T \boldsymbol{\beta}_0 \quad - \text{решение однородного уравнения}$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{A}^T \boldsymbol{\beta} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}^T \dot{\boldsymbol{\beta}} \approx -\boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}^{(0)}, \mathbf{p}^{(0)}, t) = \{\boldsymbol{\psi}_r, \boldsymbol{\psi}_v\}$$

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}_1 - \int_{t_0}^t \mathbf{A}^{-1T} \boldsymbol{\psi} dt = \boldsymbol{\beta}_1 - \boldsymbol{\chi}(t)$$

$$\mathbf{p}_v \approx \mathbf{Q}^T \boldsymbol{\beta} = \mathbf{Q}^T \boldsymbol{\beta}_1 - \mathbf{Q}^T \boldsymbol{\chi}(t)$$

- Если тяга очень маленькая, то  $\mathbf{p}_v \approx \mathbf{p}_v^{(0)}$

На больших интервалах времени приближенные методы могут расходиться

# Метод транспортирующей траектории

Метод транспортирующей траектории (МТТ) – метод приближенного решения задачи оптимального перелета с ИРТМ, основанный на линеаризации траектории перелета около некоторой близкой кеплеровской орбиты (транспортирующей траектории – ТТ)

Модифицированный МТТ:

$\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  – векторы состояния КА и транспортирующей траектории,

$$\xi = \mathbf{x} - \mathbf{y}, \quad \dot{\xi} = \mathbf{F}\xi + \eta, \quad \eta = \{0, \alpha\}$$

$\xi_0$ ,  $\xi_1$  – граничные условия,

$\mathbf{A}$  – общее решение сопряженного уравнения в вариациях для ТТ  
(найдено аналитически в явном виде)

$\mathbf{Q}$  – подматрица матрицы  $\mathbf{A}$

$$\Delta = \mathbf{A}_1 \xi_1 - \mathbf{A}_0 \xi_0, \quad \mathbf{A}_0 = \mathbf{A}(t_0), \mathbf{A}_1 = \mathbf{A}(t_1)$$

# Метод транспортирующей траектории

$$\alpha = Np_v = NQ^T \beta$$

$$\Delta = \int_{t_0}^{t_1} Q \alpha dt = S_1 \beta, \quad \beta = \text{const} \text{ — неизвестный вектор}$$

$$S = S(t) = \int_{t_0}^t N Q Q^T dt, \quad S_1 = S(t_1)$$

Матрица  $Q Q^T$  вырождена, однако матрица  $S$  является невырожденной на любом интервале времени

$$\Rightarrow \beta = S_1^{-1} \Delta$$

$$\alpha(t) = N Q^T S_1^{-1} \Delta \quad \text{оптимальная тяга}$$

$$x(t) = y(t) + A^{-1} (A_0 \xi_0 + S S_1^{-1} \Delta) \quad \text{вектор состояния КА}$$

$$J = \frac{1}{2} \Delta^T S_1^{-1} \Delta \quad \text{минимизируемый функционал}$$

$$m_{\text{пр}} = \frac{J}{J + N_0/m_0} m_0 \quad \text{масса рабочего тела}$$

Любая требуемая точность достигается путем разбиения интервала времени перелета на подынтервалы.

# Применение МТТ при ограничениях на направление тяги

$$\alpha = N P p_v = N P Q^T \beta$$

$$\Delta = \int_{t_0}^{t_1} Q \alpha dt = S_1 \beta$$

$$S_1 = \int_{t_0}^{t_1} N Q P Q^T dt$$

В общем случае  $P$  зависит от  $p_v = Q^T \beta \Rightarrow \beta$  находится из уравнения

$$\int_{t_0}^{t_1} N Q P(\beta) Q^T dt \beta = \Delta \quad \text{и} \quad \alpha(t) = N P Q^T S_1 \beta$$

В случае линейных однородных ограничений  $B \alpha^0 = 0$  матрица  $P$  не зависит от  $\beta \Rightarrow \beta = S_1^{-1} \Delta$

$\Rightarrow$  Невырожденность матрицы  $S_1$  является достаточным условием осуществимости перелета при данных ограничениях

# Применение МТТ при ограничениях на направление тяги

Пример: радиальная тяга

$$\mathbf{P} = \mathbf{r}\mathbf{r}^T / r^2 \Rightarrow \mathbf{S}_1 = \int_{t_0}^{t_1} N\mathbf{q}\mathbf{q}^T dt \quad \text{где } \mathbf{q} = \{q_1, \dots, q_6\} = \mathbf{Q}\mathbf{r}/r$$

$$q_1 = q_2 = 0 \Rightarrow \text{rank } \mathbf{S}_1 \leq 4$$

Плоский перелет:  $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$  (полагая  $\Delta = \{\Delta_1, \dots, \Delta_6\}$ )

Уменьшение размерности:

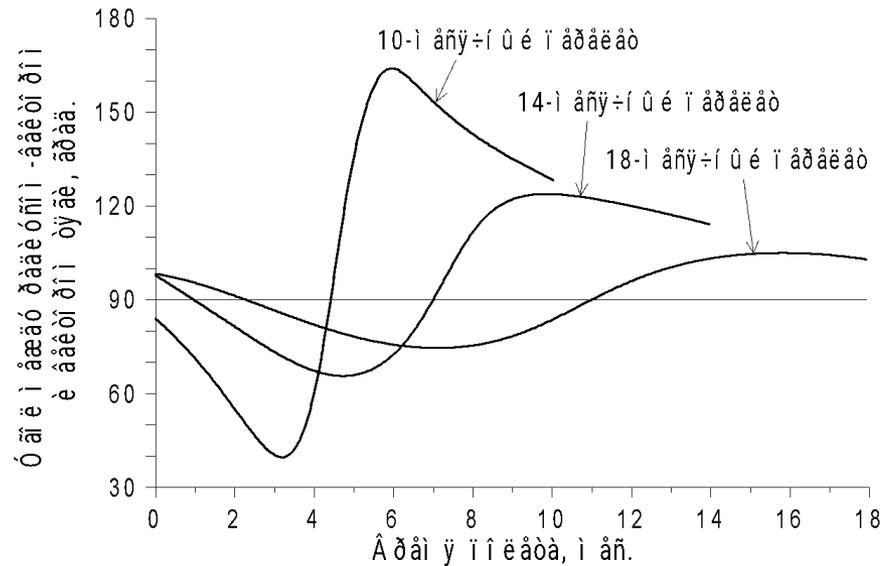
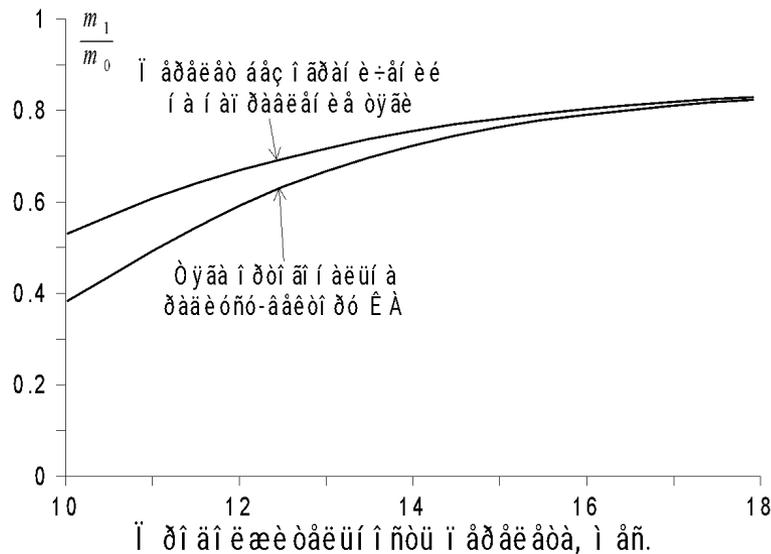
$$\Delta' = \{\Delta_3, \dots, \Delta_6\}, \mathbf{q}' = \{q_3, \dots, q_6\}, \boldsymbol{\beta}' = \{\beta_3, \dots, \beta_6\}$$

Матрица  $\mathbf{S}'_1 = \int_{t_0}^{t_1} N\mathbf{q}'\mathbf{q}'^T dt$  может быть невырожденной

$\Rightarrow$  условие невырожденности матрицы  $\mathbf{S}_1$  может не быть необходимым для осуществимости перелета

# Численный пример

Рассматривается перелет к Марсу в 2007 г. с тягой ортогональной направлению на Солнце



Наличие ограничения на направление тяги приводит к плохой обусловленности матрицы  $S_1$  при большом числе подынтервалов (более 30–35), т.е. на коротких интервалах времени интегрирования

# Выводы

- При наличии ограничений на направление тяги оптимальная тяга направлена вдоль проекции базис-вектора на ограничивающее множество
- Оптимальная тяга найдена в явном виде для линейных ограничений типа равенства или неравенства
- Для нахождения оптимального перелета при ограничениях на направление тяги может использоваться метод транспортирующей траектории после небольшой модификации.
- Метод транспортирующей траектории дает также достаточное условие осуществимости перелета при данных ограничениях