Соколов А.П.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

(часть 1)

для студентов ЭНИН

направления 140100

ТЕПЛОЭНЕРГЕТИКА

ПОЛОЖЕНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ В СТРУКТУРЕ ООП

(Основная образовательная программа)

Дисциплины, предшествующие изучению теоретической механики (пререквизиты)	**Математика** **Физика**
Дисциплины, для которых основанием является теоретическая механика (кореквизиты)	Турбины тепловых и атомных электростанций, нагнетатели тепловых электростанций, нагнетатели и тепловые двигатели, основы инженерно-физического эксперимента

СТРУКТУРА ИЗУЧЕНИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ (ТМ)

Раздел	Подразделы	Семестр
Статика	Системы сил; системы тел; трение; центр тяжести.	3
Кинематика	Кинематика точки; движение тела: поступательное, вращательное, плоское, сферическое, пространственное, сложное.	3
Динамика	Динамика точки, колебание точки.	3
	Механические системы Общие теоремы динамики	4
	Аналитическая механика	4
	Колебания механических систем	4

ЦЕЛИ ИЗУЧЕНИЯ ТМ (по рабочей программе)

- В результате освоения данной дисциплины бакалавр приобретает знания, умения и навыки, обеспечивающие достижение целей основной образовательной программы «Теплоэнергетика и теплотехника».
- Дисциплина нацелена на подготовку бакалавров к решению следующих профессиональных задач:
- – сбор и анализ информационных исходных данных для проектирования тепловых электрических станций; систем теплоэнергоснабжения, топливоснабжения установок, цехов промышленных предприятий и объектов жилищно-коммунального хозяйства (ЖКХ); устройств и систем автоматизации и управления;
- – расчет и проектирование деталей и узлов в соответствии с техническим заданием с использованием стандартных средств автоматизации проектирования;
- – разработка проектной и рабочей технической документации, оформление законченных проектно-конструкторских работ;
- – изучение научно-технической информации, отечественного и зарубежного опыта по тематике исследования;
- – проведение экспериментов по заданной методике и анализ результатов;
- – проведение измерений и наблюдений, составление описания проводимых исследований, подготовка данных для составления обзоров, отчетов и научных публикаций;
- – составление отчета по выполненному заданию, участие во внедрении результатов исследований и разработок.

РАЗВИТИЕ МЕХАНИКИ СВЯЗАНО С РАСШИРЕНИЕМ КРУГА РЕШАЕМЫХ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ.

- До Аристотеля (384 – 322 гг. до Р.Х.) не существовало деления науки по отраслям знаний. Только после него начинается процесс выделения частных наук из общего естествознания.
- Становление механики как науки связывают с Архимедом (287-212 гг. до Р.Х.). Он дал точное решение задачи о равновесии сил, приложенных к рычагу, создал учение о центре тяжести тел и сформулировал закон о гидростатическом давлении жидкости на погружённое в него тело.
- Гениальный представитель эпохи Возрождения Леонардо да Винчи (1451-1519) изучил движение падающего тела, движение тела по наклонной плоскости, явление трения и ввёл понятие момента силы.
- В целом развитие механики шло от опыта работы с механизмами через обобщение выявляемых закономерностей к определению строгих законов, по чёткости близким к математическим законам. В виду такой строгости теоретическую механику вполне правомерно можно назвать математической механикой. Высокая степень абстрагирования от свойств реальных объектов позволила систематизировать правила анализа механических систем и произвела своеобразную стандартизацию этих правил. С другой стороны математический подход, к которому тяготеет теоретическая механика, требует оговаривать все упрощения, допускаемые в решении каждой конкретной задачи. Невыполнение данного требования порождает подозрение в ненаучном решении конкретной технической задачи.

- Общим во всех этих умениях является умение анализировать техническую задачу с позиций механики, т.е. умение разбивать реальную механическую систему на блоки, выявлять закономерности их взаимодействия и определять оптимальные условия функционирования всей системы

МОДЕЛИРОВАНИЕ – ГЛАВНОЕ НАПРАВЛЕНИЕ РАЗВИТИЯ ТМ

АБСТРАКТНЫЕ МОДЕЛИ РЕАЛЬНЫХ ТЕЛ

- В теоретической механике изучается движение одних тел относительно других тел, которые принимаются за системы отсчёта. Задача теоретической механики не только описывать, но и предсказывать движение тел, устанавливая причинные связи в определённом, весьма широком, круге явлений.
- В теоретической механике вводят абстрактные модели, которые приближённо отражают свойства реальных систем. Степень приближения, т.е. точность механической модели, обуславливается конкретной задачей.

ОСНОВНЫЕ АБСТРАКТНЫЕ МОДЕЛИ РЕАЛЬНЫХ ТЕЛ

- 1.Материальная точка – тело, размерами которого можно пренебречь в рамках конкретной задачи;
- 2.Абсолютно твёрдое тело – объём конечных размеров, сплошь заполненный веществом, , причём расстояния между любыми двумя точками среды, заполняющей объём, не изменяются во время движения;
- 3.Сплошная деформируемая среда – заполняет конечный объём или неограниченное пространство; расстояния между точками такой среды могут меняться.
- Сравнивая два последних определения, можно сказать, что сплошная деформируемая среда – это деформируемое твёрдое тело.
- Из абстрактных моделей реальных тел могут образовываться системы, например: система свободных тел; системы со связями; абсолютно твёрдое тело с полостью, заполненной жидкостью, и т.п. Исходя из определения системы тел, можно сказать, что абсолютно твёрдое тело – это система тел с такими связями, при которых, расстояние между двумя точками системы постоянно.

ВЫРОЖДЕННЫЕ МОДЕЛИ

- бесконечно тонкий стержень – стержень, который «работает» только на растяжение и сжатие, но не «работает» на изгиб;
- бесконечно тонкая пластина;
- невесомые стержни и нити, связывающие между собой материальные точки, и т.д.
- ВЫРОЖДЕННАЯ МОДЕЛЬ – ЭТО ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ ОБЩЕЙ МОДЕЛИ ПРИ УМЕНЬШЕНИИ ЕЁ СВОЙСТВ. Так общий случай – стержень, теряя толщину, перестаёт работать на изгиб как балка и превращается в бесконечно тонкий стержень.

СВОЙСТВА ПРОСТРАНСТВА (для идеальных условий)

Свойства пространства были постулированы при решении задач астрономии, т.е. для идеальных условий, когда нет трения. В этом случае полагают, что пространство однородно и изотропно. Однако, из опытов выявлено, что механические явления протекают неодинаково в разных местах физической системы отсчёта и неодинаково в различных направлениях. Это позволило сформулировать понятия: неоднородность и анизотропность

- *Неоднородность* – это зависимость характера протекания явления от места, в котором мы наблюдаем это явление.
- *Анизотропность (неизотропность)* – это зависимость характера движения от направления. Примеры: течение реки по меридиану (с севера на юг - Волга); полёт снаряда, маятник Фуко.

СВОЙСТВА ПРОСТРАНСТВА (для реальных условий)

При решении задач в реальных условиях учитывается не только неоднородность и неизотропность пространства. Гораздо в большей степени проявляется влияние трения. Приведение реальной, трудно рассчитываемой механической системы к идеальной по сути является идеологией. Идеализированные механические системы поддаются расчёту, а идеология облегчает изложение законов механики и упрощает поиск ошибок в анализе механических систем. Но идеология иногда формирует и тупиковые ситуации. Например, при малых колебаниях нелинейной системы её принимают за линейную, однако, условия устойчивости линейной и нелинейной систем не совпадают.

СИСТЕМЫ ОТСЧЁТА

- Свойства системы отсчёта (неоднородность и анизотропность) затрудняют наблюдение за движением тела.
- *Практически* свободна от этого – <u>геоцентрическая</u> система: центр системы в центре Земли и системы не вращается относительно «неподвижных» звёзд). Геоцентрическая система удобна для расчётов движений на Земле.
- Для *небесной механики* (для тел солнечной системы): гелиоцентрическая система отсчёта, которая движется с центром масс Солнечной системы и не вращается относительно «неподвижных» звёзд. Для этой системы *пока не обнаружены* неоднородность и анизотропность пространства по отношению к явлениям механики.
- Вводится абстрактная *инерциальная* система отсчёта, для которой пространство однородно и изотропно *по отношению к явлениям механики*

ИНЕРЦИАЛЬНАЯ СИСТЕМА ОТСЧЁТА

Инерциальная система отсчёта – такая, собственное движение которой не может быть обнаружено никаким механическим опытом.

Дополнение. Две системы отсчёта движутся относительно исходной прямолинейно, равномерно. *Нельзя обнаружить движение одной системы относительно другой механическим путём только в том случае, если системы не взаимосвязаны.*

Поиск не взаимосвязанных систем отсчёта – это идеология. На поверхности Земли все системы отсчёта взаимосвязаны.

Инерциальная система отсчёта – это модель, справедливая в рамках конкретной задачи.

Все системы отсчёта движущиеся относительно исходной прямолинейно, равномерно будут инерциальными. Это позволяет ввести единую декартовую систему координат. Такое пространство называется *евклидовым*.

Условное соглашение – берут правую систему координат (рис. 1).

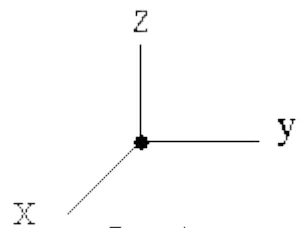


Рис. 1.

Время – в классической (нерелятивистской) механике *абсолютно*, единое для всех систем отсчёта то есть начальный момент – произволен. В отличие релятивистской механики, где применяется принцип относительности.

Состояние движения системы в момент времени t определяется координатами и скоростями точек в этот момент.

Реальные тела взаимодействуют.

Сила – мера механического взаимодействия тел.

При взаимодействии меняется состояние движения системы.

Теоретическая механика изучает как силы взаимодействия меняют состояние движения системы.

В соответствии с идеологией изучения теоретической механики её изложение разбито на разделы:

Статика.

Кинематика.

Динамика.

ИДЕОЛОГИЯ И ПРИНЦИПЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Идеология ТМ	**Принципы ТМ**
• От простого к сложному	• В основе – система аксиом (на основе опыта, наблюдений) • Законы внутренней логики (относительная независимость теории) • Практика – контролёр верности теории

статика

Статика (от греч. στατικε - неподвижное) – раздел теоретической механики, в котором изучается равновесие тела или системы тел.

- Аксиомы статики.
- Связи и реакции.
- Система сходящихся сил.
- Пара сил.
- Момент силы.
- Основная теорема статики.
- Плоская система сил.
- Пространственная система сил.
- Центр тяжести.
- Трение скольжения.
- Равновесие тел.

МОДЕЛИ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В СТАТИКЕ

1. Материальная точка – геометрическая точка с массой;
2. Абсолютно твёрдое тело – совокупность материальных точек, расстояния между которыми не меняемся
3. Сила – мера механического взаимодействия тел, в результате которого изменяется их движение.

Поскольку в теоретической механике рассматривают только абсолютно твёрдые тела, то деформацией взаимодействующих тел пренебрегают. Поэтому и при взаимодействии тел рассматривается только изменение их движения.

Из математики взято понятие вектор. Оно наиболее подходит для описания действия сил. В этом описании указывается: линия действия силы, точка приложения силы и собственно вектор силы.

Рис. 2

Следует обратить внимание, что если можно указать точку приложения силы, то говорят о **сосредоточенной силе**, в противном случае говорят **о распределённой нагрузке.** В реальных механических системах взаимодействие тел осуществляется по поверхности, и даже более точно – в участке объёма тела. Это очередной раз доказывает, что сила – это модель, но эта модель хорошо работает, если за точку приложения силы брать центр контактирующей поверхности тела.

- .

ОПЕРАЦИИ С ВЕКТОРАМИ

- 1.Сложение векторов.
- 2.Вычитание векторов.
- 3.Умножение вектора на скаляр.
- 4.Проецирование вектора на декартовые оси.
- 5.Выражение вектора через проекции и единичные векторы.
- 6.Скалярное произведение векторов.
- 7.Векторное произведение векторов.

ПЕРВАЯ АКСИОМА СТАТИКИ

Из повседневного опыта: силы имеют векторный характер, то есть величину, направление, линию действия, точку приложения. Условие равновесия сил, действующих на твёрдое тело, сводится к свойствам систем векторов. .

Обобщая опыт изучения физических законов природы, Галилей и Ньютон сформулировали основные законы механики, которые могут рассматриваться как аксиомы механики, так как имеют в *своей основе экспериментальные факты.*

***Аксиома 1.* Действие на точку твёрдого тела нескольких сил равносильно действию одной *равнодействующей силы,* строящейся по правилу сложения векторов (рис.3).**

***Следствие.* Силы, приложенные к точке твёрдого тела, складываются по правилу параллелограмма.**

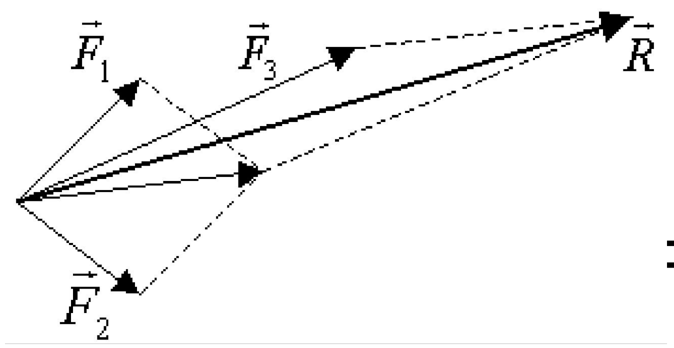


Рис. 3

Вторая и третья аксиомы

Аксиома 2. Две силы, приложенные к твёрдому телу, *взаимно уравновешиваются* тогда и только тогда, когда они равны по величине, направлены в противоположные стороны и лежат на одной прямой.

Аксиома 3. Действие на твёрдое тело системы сил не изменится, если *добавить к этой системе или отбросить от неё* две силы, равные по величине, направленные в противоположные стороны и лежащие на одной прямой.

- *Следствие.* Силу, действующую на точку твёрдого тела, можно переносить вдоль линии действия силы без изменения равновесия (то есть, сила является скользящим вектором, рис.4)

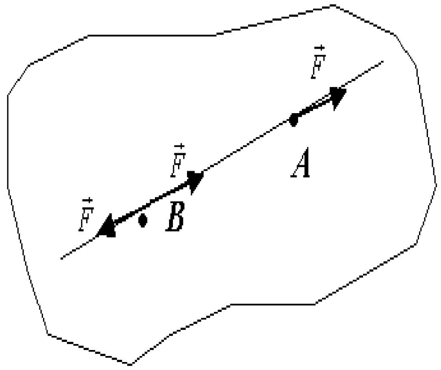
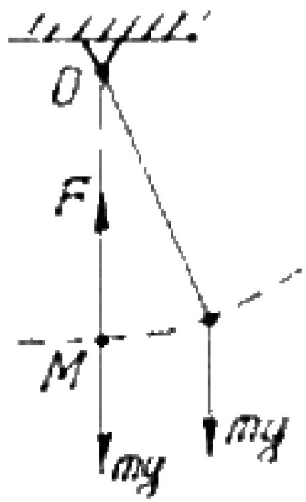


Рис. 4

.

Две категории сил



- Рис. 5.

1) **Активные – создают или способны создать движение твёрдого тела. Например, сила веса (рис. 5).**

2) **Пассивные – не создающие движения, но ограничивающие перемещения твёрдого тела, препятствующие перемещениям. Например, сила натяжения нерастяжимой нити (рис.5).**

.

АКСИОМЫ СТАТИКИ (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

Четвёртая аксиома

Действие одного тела на второе равно и противоположно действию этого второго тела на первое (*действие равно противодействию*).

Связи – тела, ограничивающие движение данного тела. Внутренние связи – взаимоограничение движения между телами внутри системы.

Пятая аксиома

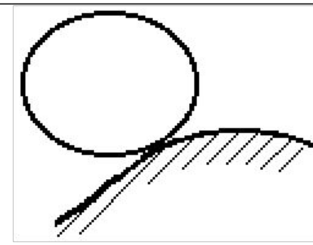
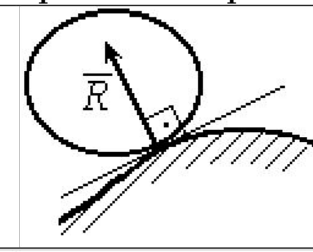
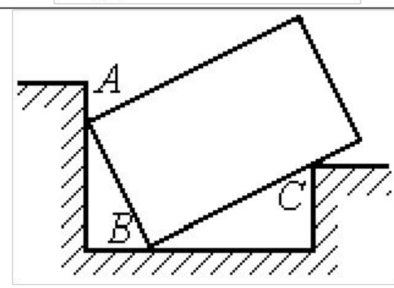
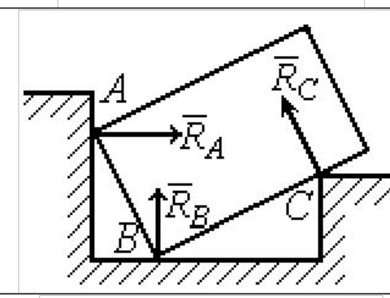
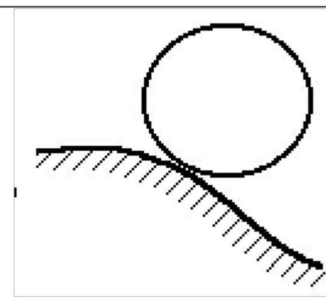
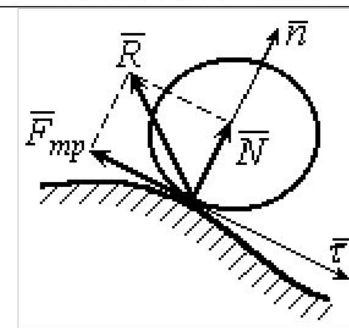
Связи, наложенные на систему материальных точек, можно заменить силами реакций, действие которых эквивалентно действию связей.

Когда пассивные силы не могут уравновесить действие активных сил, начинается движение.

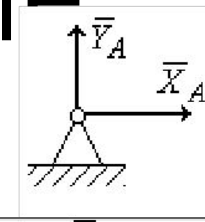
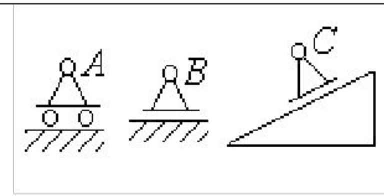
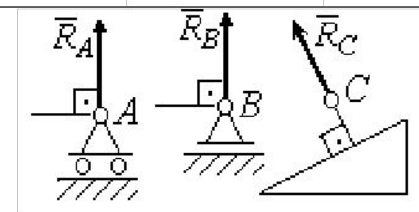
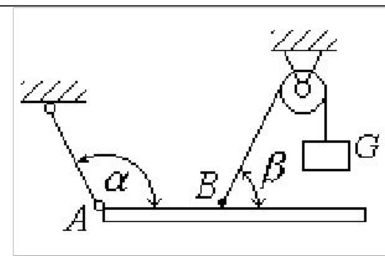
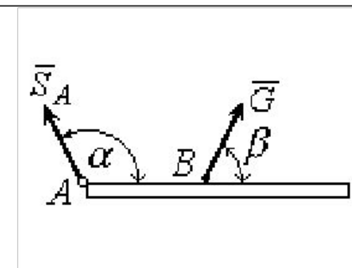
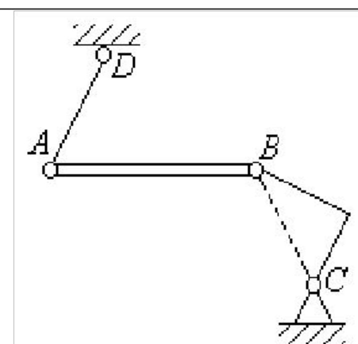
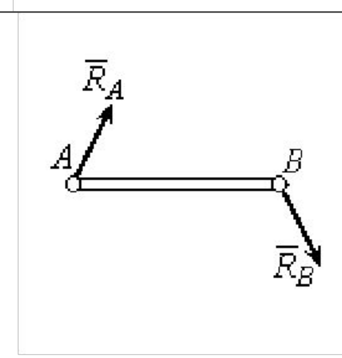
СВЯЗИ И РЕАКЦИИ

- *Связи – тела, ограничивающие движение данного тела.*
-
- Это определение сформулировано для случая одного тела. Если же рассматривается система тел, то практично ввести понятие *внутренние связи* – взаимоограничение движения между телами внутри системы.
- Связи указывают на схемах механизмов условными обозначениями, из которых видно ограничение движения тела. Затем применяют принцип освобождения от связей.
-
- *Принцип освобождения от связей* – связи мысленно отбрасывают, а их действие заменяют силами, направленными противоположно ограничению движения. Эти силы называют *силами реакций или реакциями.*

СХЕМЫ СВЯЗЕЙ

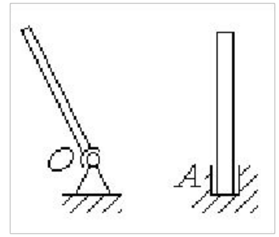
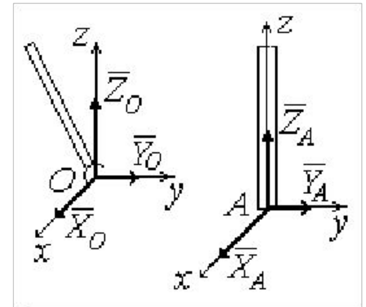
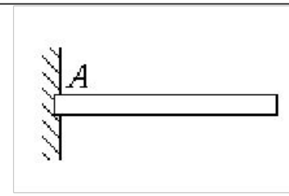
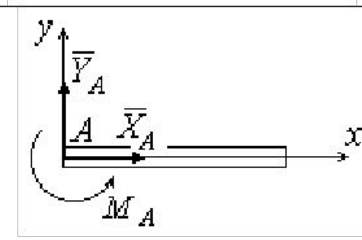
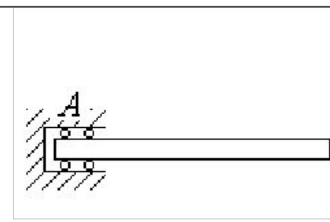
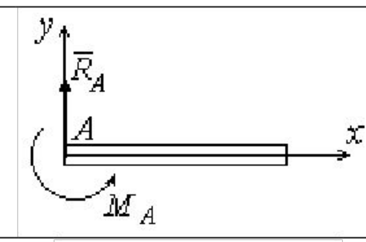
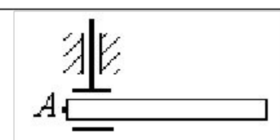
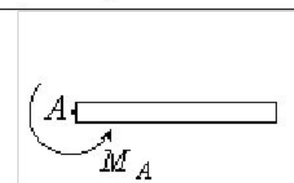
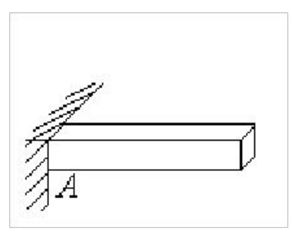
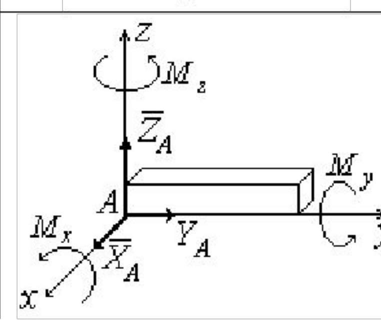
Тип связи	Схема связи	Направление реакции
1. Гладкая опорная поверхность.		
2. Точечная гладкая опора (одна опорная поверхность выродилась в точку).		
3. Шероховатая поверхность. Неидеальная связь.		

СХЕМЫ СВЯЗЕЙ ПРОДОЛЖЕНИЕ

4. Цилиндрический шарнир (изображение на плоскости).		
5. Цилиндрическая подвижная опора.		
6. Гибкая связь (нить, трос, цепь, ремень).		
7. Жёсткий стержень.		

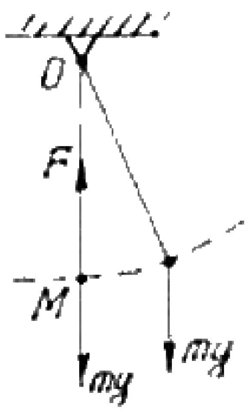
СХЕМЫ СВЯЗЕЙ (ОКОНЧАНИЕ)

- .

8. Сферический шарнир *O* и подпятник *A*.		
9. Жёсткая заделка в плоскости.		
10. Скользящая заделка.		
11. Свободная заделка.		
12. Жёсткая заделка в пространстве.		

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ВЫРАЖЕНИЕ СВЯЗИ

Схема связи



В теоретической механике часто связь рассматривают с геометрической точки зрения именно как ограничение движения.

В этом случае условие связи записывается аналитически в виде формулы. Например:

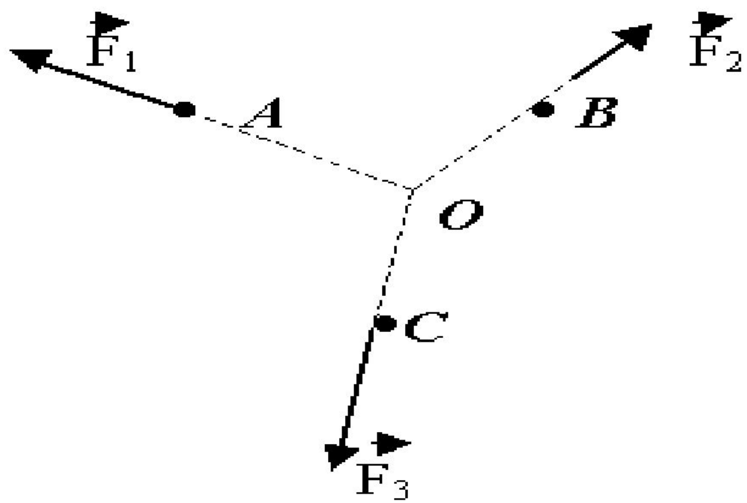
$x^2 + y^2 + z^2 = l^2$ - стержень непрямой длины *l*.

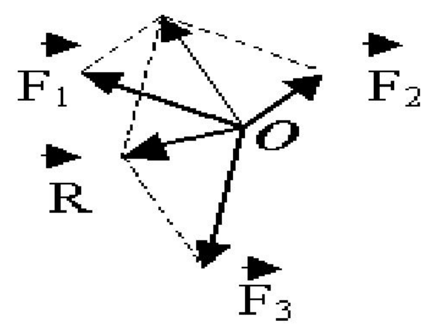
$x^2 + y^2 + z^2 \le l^2$ - гибкая нерастяжимая нить длиной *l*.

СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ (ССС)

- *Системой сходящихся сил* называется такая система сил, линии действия которых пересекаются в одной точке. Эту точку всегда можно принять за начало координат (рис.6).

Исходная система (рис. 6)	Преобразованная система (рис.7)





Приведение ССС к равнодействующей

- Исходную систему сходящихся сил (рис. 6) можно преобразовать. На основании следствия третьей аксиомы статики точку приложения каждой силы перемещаем в точку ***O*** (рис. 7). Затем на основании первой аксиомы статики делаем следующие операции: складываем силы F_1 и F_2; к получившейся силе прибавляем F_3; к получившейся силе прибавляем F_4, и т.д.
- В результате система сходящихся сил приводится к одной равнодействующей силе R (кратко, *равнодействующая*).

РАВНОДЕЙСТВУЮЩАЯ ССС

Проекции равнодействующей

.

$$R_x = \sum_\nu X_\nu;$$

$$R_y = \sum_\nu Y_\nu;$$

$$R_z = \sum_\nu Z_\nu.$$

Условия равновесия ССС

$$\vec{R} = 0$$

или

$\sum_\nu X_\nu = 0$
$\sum_\nu Y_\nu = 0$
$\sum_\nu X_\nu = 0$

ТЕОРЕМА О ТРЕХ СИЛАХ

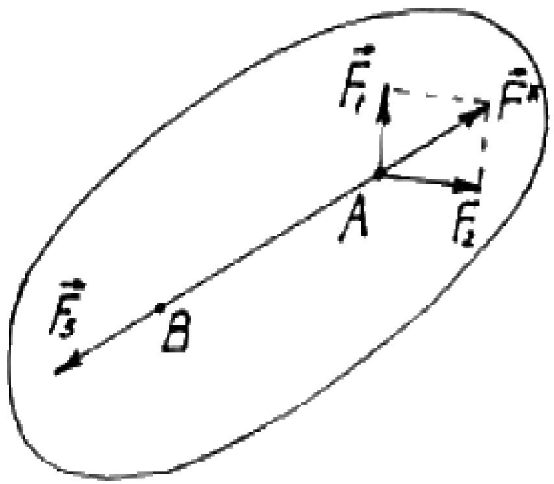


Рис. 8

Если на твёрдое тело действуют три силы, и линии действия двух сил пересекаются в некоторой точке А, равновесие возможно тогда и только тогда, когда линия действия третьей силы тоже проходит через точку А, а сама сила равна по величине и противоположно направлена сумме первых двух F^x (рис.8).

ПРИМЕРЫ НА ТЕОРЕМУ О ТРЁХ СИЛАХ

Задача 1. **Груз M_1 весом P (рис. 1.9) подвешен на гибком нерастяжимом тросе OM_1, отклонённом от вертикали на угол α, и удерживается в равновесии с помощью другого нерастяжимого троса M_1AM_2, охватывающего идеальный блок A и несущего на свободном конце груз M_2. Считая, что при равновесии участок троса M_1A горизонтален, определить вес Q груза M_1 и натяжение троса OM_1. Размерами груза M_1 и весом тросов пренебречь.**

Решение. **Рассмотрим равновесие груза M_1. Активными силами являются вертикально направленная сила P и горизонтально направленная сила T_2, равная по модулю весу груза Q, так как идеальны блок A изменяет только направление силы.**

На груз M_1 наложена связь, осуществляемая тросом OM_1. Освободим его от связи. Реакция связи T_1 направлена по тросу вверх. Таким образом, груз M_1 находится в равновесии под действием плоской сходящейся системы трёх сил: P, T_1 и T_2, причём $T_2=Q$ (рис. 10).

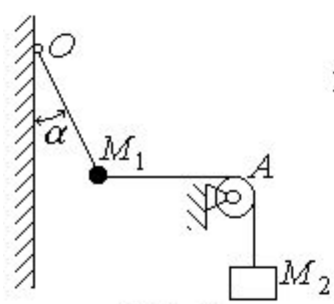


Рис. 9

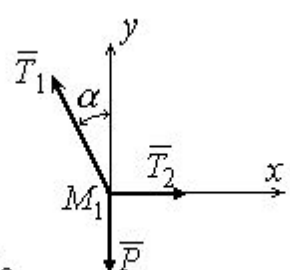


Рис. 10.

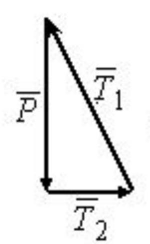


Рис. 11.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ 1

Решим эту задачу двумя способами: геометрическим и аналитическим.

Геометрический способ. Так как точка M_1 находится в равновесии под действием трёх сил, то силовой многоугольник, построенный на этих силах, должен быть замкнутым (рис. 11). Построение многоугольника следует начать с заданной силы *P*. Изобразив вектор *P*, проводим через его начало и конец прямые, параллельные направлением сил T_1 и T_2. Точка пересечения этих прямых определит третью вершину силового треугольника. Ориентация всех векторов должна быть такова, чтобы силовой треугольник был замкнутым. Это даст возможность проверить правильность направления неизвестных реакций.

Из силового треугольника находим

$$T_2 = P tg\alpha; \quad T_1 = \frac{P}{\cos\alpha}.$$

АНАЛИТИЧЕСКИЙ СПОСОБ

- **Выберем оси координат так, чтобы они совпадали с максимумом действующих сил, в этом случае уравнения равновесия будут иметь наипростейший вид.**
- Система приложенных сил *P*, T_1 и T_2 – плоская сходящаяся система, для которой существует два уравнения равновесия.

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = T_2 - T_1 \sin\alpha = 0; \\ \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = T_1 \cos\alpha - P = 0 \end{cases}$$

- В полученной системе уравнений две неизвестные величины: T_1 и T_2, т.е. задача статически определима. Из этой системы уравнений находим:

$$T_2 = P tg\alpha; \; T_1 = \frac{P}{\cos\alpha}.$$

Задача 2

Однородный цилиндр *A* весом *P* и радиусом *r* (рис. 12) опирается на гладкую поверхность цилиндра *B* радиусом *R* и удерживается в равновесии с помощью нити *CD* длиной *l*, расположенной в поперечной плоскости симметрии. Определить натяжение нити и реакцию цилиндрической поверхности.

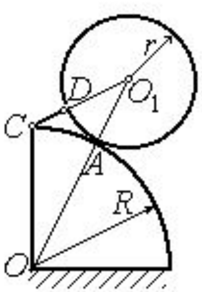


Рис. 12.

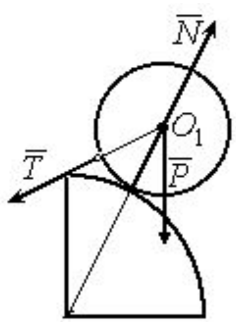


Рис.13

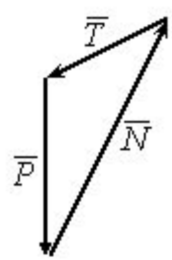


Рис. 14.

Решение. **Рассмотрим равновесие цилиндра *A*. На него действует сила *P*, направленная вертикально вниз. Связями являются гладкая цилиндрическая поверхность *B* и нить *CD*. Освободимся от связей. Реакция *N* цилиндрической поверхности направлена по общей нормали к цилиндрам и, следовательно, проходит через точку O_1 (рис. 13). Реакция *T* направлена по нити *CD*. Так как на цилиндр *A* действуют три силы, то на основании теоремы о трёх силах их линии действия должны пересекаться в точке O_1. Следовательно, цилиндр *A* при равновесии займёт такое положение, при котором нить *CD* будет продолжением его радиуса.**

Построим силовой треугольник (рис. 14). Этот треугольник подобен треугольнику OO_1C . Из подобия треугольников

$$\frac{T}{CO_1} = \frac{P}{CO} = \frac{N}{OO_1}$$

- Или $$\frac{T}{l+r} = \frac{P}{R} = \frac{N}{R+r}$$
- Откуда

$$T = \frac{l+r}{R}P\,;\; N = \frac{R+r}{R}P\,.$$

СЛОЖЕНИЕ ДВУХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ

Силы направлены в одну сторону (рис. 15)

$$R = F_1 + F_2$$

$$\frac{AC}{F_2} = \frac{BC}{F_1} = \frac{AB}{R}$$

.

Силы направлены в противоположные стороны (рис. 16)

$$R = F_1 - F_2$$

$$AC = \frac{AB \cdot F_2}{F_1 - F_2}$$

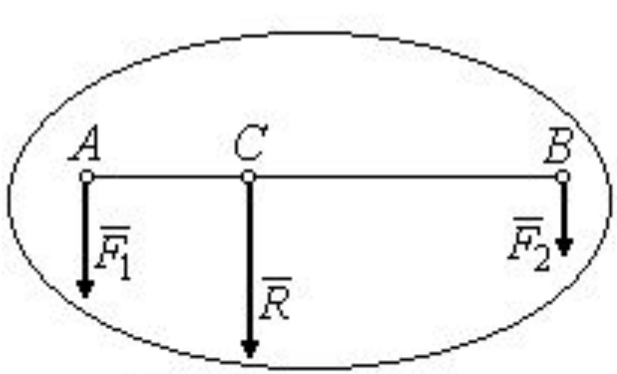


Рис. 15

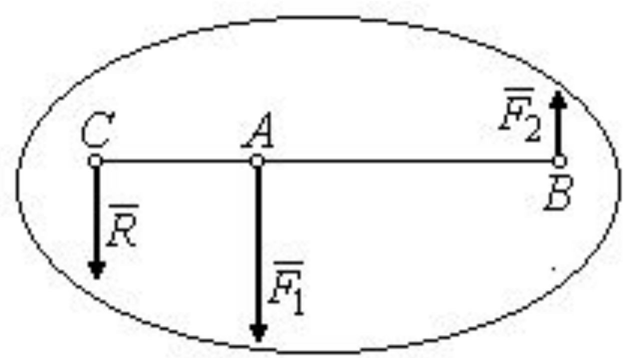


Рис.16

ПАРА СИЛ

Пара сил - система двух равных по модулю, параллельных и противоположно направленных сил (рис. 17).

Плоскость действия пары сил – плоскость, в которой находятся линии действия сил.

- **Пара сил не имеет равнодействующей, однако силы пары не уравновешиваются, так как они не направлены по одной прямой. Пара стремится произвести вращение твёрдого тела, к которому она приложена.**

Пара сил, не имея равнодействующей, очевидно, не может быть уравновешена силой.

Плечо пары сил – кратчайшее расстояние между линиями действия сил пары.

Действие пары сил на твёрдое тело характеризуется её моментом.

Момент пары сил – произведение одной из сил пары на её плечо.

M=Fd.

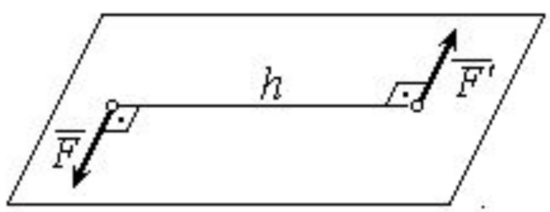
- 

Рис. 17.

МОМЕНТ ПАРЫ СИЛ

Момент пары в пространстве

. Момент пары сил изображают вектором. Вектор момента пары и направляют перпендикулярно к плоскости действия пары сил в такую сторону, чтобы, смотря навстречу этому вектору, видеть пару сил стремящейся вращать плоскость её действия против хода часовой стрелки (рис. 18).

Момент пары на плоскости. Если рассматривать только пары сил, лежащие в одной плоскости, то эту плоскость совмещают с плоскостью чертежа (рис. 19).

Вместо вектора момента каждой пары сил, перпендикулярного к плоскости чертежа, указывают только направление, в котором пара сил стремится вращать эту плоскость.

В этом случае момент пары сил определяется выражением:

M = ± Fd

Знак «+» берётся в том случае, если пара сил стремится вращать плоскость чертежа против хода часовой стрелки. Знак «-» берётся в том случае, если пара сил стремится вращать плоскость чертежа по ходу часовой стрелки.

***Примечание*. Часто даже векторы пары сил опускают, но указывают только направление, в котором пара сил стремится вращать плоскость действия пары, и ставят обозначение - - момент пары сил.**

.

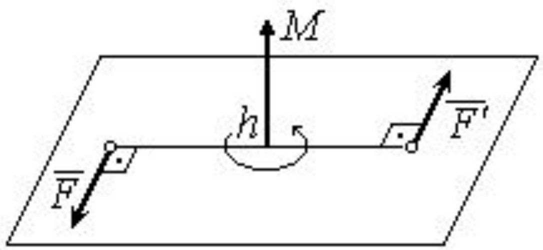


Рис. 18.

.

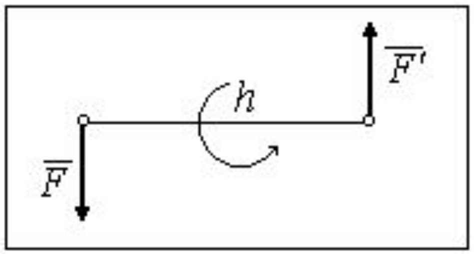


Рис. 19.

ТЕОРЕМЫ О ПАРАХ

- **Теорема 1 .** Две пары сил лежащие в одной плоскости, эквивалентны, если равны их алгебраические моменты.
- *Следствие*: Пару сил можно перемещать в плоскости её действия.
- **Теорема 2 .** Пару сил можно перемещать в любую плоскость, параллельную плоскости её действия.
- *Следствие теорем 1 и 2*: Вектор момента пары сил – свободный вектор, т.е. его можно перемещать параллельно самому себе в любую точку тела.
- *Примечание1*: следствия теорем 1 и 2 справедливы только для твёрдого тела и не справедливы для деформируемого тела, так как деформация тела зависит от места приложения пары сил.

ТРЕТЬЯ ТЕОРЕМА О ПАРАХ

- **Теорема 3** . Две пары сил можно заменять одной эквивалентной парой, момент которой равен геометрической сумме векторов моментов исходных пар.
- *Следствие 1*: Любая система пар сил приводится к одной равнодействующей паре, момент которой равен геометрической сумме векторов моментов исходных пар.
- *Следствие 2* : Для равновесия системы пар, действующих на твёрдое тело, необходимо и достаточно, чтобы сумма моментов пар равнялась нулю, т.е. **условие равновесия систем пар** выглядит так:
- - в случае пространственной системы пар:

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{M}_k = 0$$

- - в случае системы пар, расположенных в одной плоскости :

$$\sum_{k=1}^{n} M_k = 0$$

- *Примечание*: момент пары является математической моделью. Вектор момента пары аналогичен вектору момента силы, но имеет существенное отличие. Вектор момента пары является свободным вектором, т.е. его можно перемещать относительно твёрдого тела, не изменяя состояния тела.

Момент силы относительно точки на плоскости

- . Линия действия силы - это прямая, вдоль которой направлен вектор силы.
- Плечо силы относительно точки - есть длина перпендикуляра, опущенного из точки на линию действия силы (рис. 20).

Выражение $M_A\left(\overline{F}\right)$

читается - момент силы относительно точки **А**.

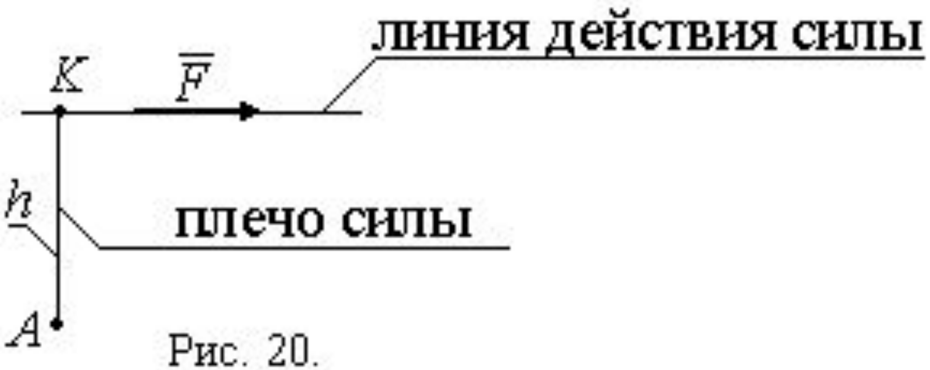


Рис. 20.

АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ МОМЕНТ СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ТОЧКИ

$$M_A\left(\overline{F}\right) = \pm Fh$$

Алгебраический момент силы относительно точки - скалярная величина , равная произведению модуля силы на плечо, взятому со знаком плюс или минус. Знак плюс берут, когда сила вращает плечо вокруг точки против хода часовой стрелки и знак минус – по ходу часовой стрелки.

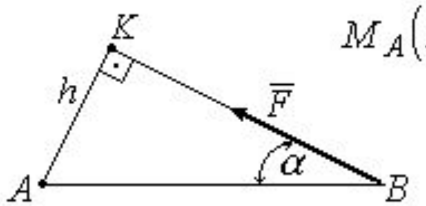


Рис. 21.

$$M_A\left(\overline{F}\right) = +Fh = +F \cdot AB \cdot \sin\alpha$$

Пример 1

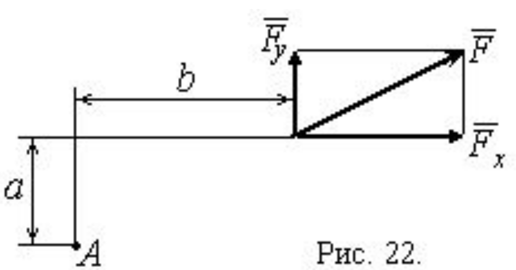


Рис. 22.

$$M_A\left(\overline{F}\right) = M_A\left(\overline{F}_x\right) + M_A\left(\overline{F}_y\right) =$$
$$= F\sin\beta \cdot b - F\cos\beta \cdot a$$

Пример 2

МОМЕНТ СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ТОЧКИ

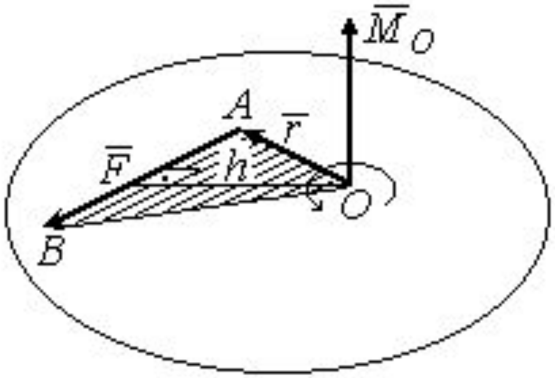


Рис. 23.

в пространстве

(векторная величина)

- Момент силы относительно точки изображается вектором , который перпендикулярен к плоскости, содержащей силу и точку, и направлен так, что, глядя навстречу вектору , видим силу , стремящейся вращать эту плоскость против хода часовой стрелки (рис. 23).

$$M_O = Fh$$

- Модуль этого вектора равен произведению модуля силы на плечо относительно точки :
- Плечо является кратчайшим расстоянием от этой точки до линии действия силы (длиной перпендикуляра, опущенного из точки на линию действия силы).
- Модуль момента силы относительно точки может быть выражен удвоенной площадью треугольника .
- Момент силы относительно точки равен нулю в том случае, если линия действия силы проходит через эту точку, т.е. . Если из точки в точку приложения силы провести радиус-вектор , то вектор момента силы выражается векторным произведением:

$$\overline{M}_O = \overline{r} \times \overline{F}$$

МОМЕНТ СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ

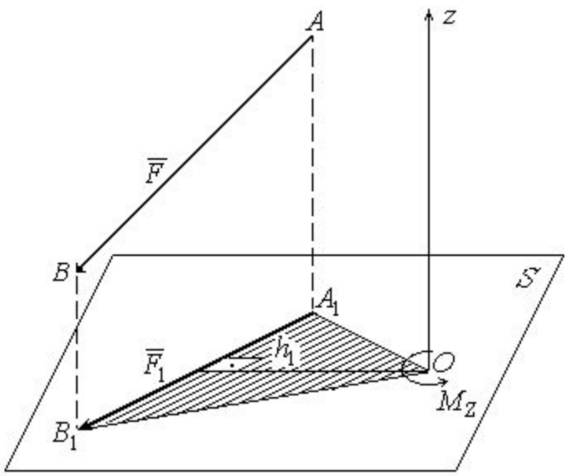


Рис. 24.

- **Правило определения момента силы относительно оси** (например z). Чтобы вычислить момент этой силы относительно оси z (обозначается) необходимо выполнить следующее (рис. 24):
- Провести плоскость s перпендикулярно оси . Точка O - точка встречи оси z с плоскостью s.
- Спроектировать силу F на плоскость - получается проекция Fı.
- Момент силы F относительно оси z равен моменту проекции Fı относительно точки , т.е.

$$M_Z = \pm F_1 h_1$$

- Момент силы относительно оси считается положительным, если, глядя навстречу оси z, можно видеть проекцию стремящейся вращать плоскость вокруг оси против хода часовой стрелки.

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ МОМЕНТА

- Возьмём три взаимно перпендикулярные координатные оси x, y, z, которым соответствуют орты $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$. Момент $\overline{M}_O$ силы $\overline{F}$ относительно начала координат в соответствии с (1.7) выражается формулой

$$\overline{M}_O = \bar{r} \times \overline{F},$$

где $\bar{r}$ - радиус-вектор точки A приложения силы относительно начала координат (рис. 1.26).

Разложим вектор $\overline{M}_O$ на составляющие по осям координат:

$$\overline{M}_O = \bar{i}M_x + \bar{j}M_y + \bar{k}M_z$$

где M_x, M_y, M_z - проекции вектора $\overline{M}_O$ на оси координат.

Аналитические выражения момента Продолжение

- Из векторной алгебры известно, что векторное произведение $\bar{r} \times \bar{F}$ можно представить определителем, разложив который

$$\bar{r} \times \bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \bar{i}\left(yF_z - zF_y\right) + \bar{j}\left(zF_x - xF_z\right) + \bar{k}\left(xF_y - yF_x\right)$$

где x, y, z - проекции вектора $\bar{r}$, а F_x, F_y, F_z - проекции вектора $\bar{F}$ на оси координат.

Приравнивая значения $\bar{M}_O$ и определителя, разложенного по элементам первой строки, получаем:

$$\bar{i}M_x + \bar{j}M_y + \bar{k}M_z = \bar{i}\left(yF_z - zF_y\right) + \bar{j}\left(zF_x - xF_z\right) + \bar{k}\left(xF_y - yF_x\right)$$

Сопоставляя левые и правые части этого равенства, находим проекции момента $\bar{M}_O$ на оси координат, равные моментам силы $\bar{F}$ относительно этих осей:

$$M_x = \left(yF_z - zF_y\right), \quad M_y = \left(zF_x - xF_z\right), \quad M_z = \left(xF_y - yF_x\right).$$

Пример на вычисление момента силы относительно осей

- **Пример.** На боковой грани прямоугольного параллепипеда (рис. 25) находится сила $\overline{F}$. Дано: a, b, c, α. Определить момент силы $\overline{F}$ относительно координатных осей.

Решение. Используя правило определения момента силы относительно оси, получаем:

$$M_x\left(\overline{F}\right)=M_O\left(\overline{F}_{xy}\right)=F\cdot\cos\alpha\cdot a;$$

$$M_y\left(\overline{F}\right)=M_O\left(\overline{F}_{xz}\right)=0;$$

$$M_z\left(\overline{F}\right)=M_O\left(\overline{F}_{yz}\right)=-F\cdot\sin\alpha\cdot a.$$

Те же результаты получаем, если воспользоваться выражениями (1.9), подставив туда проекции силы $\overline{F}$ на координатные оси:

$$F_x=F\sin\alpha; F_z=F\cos\alpha\ .$$

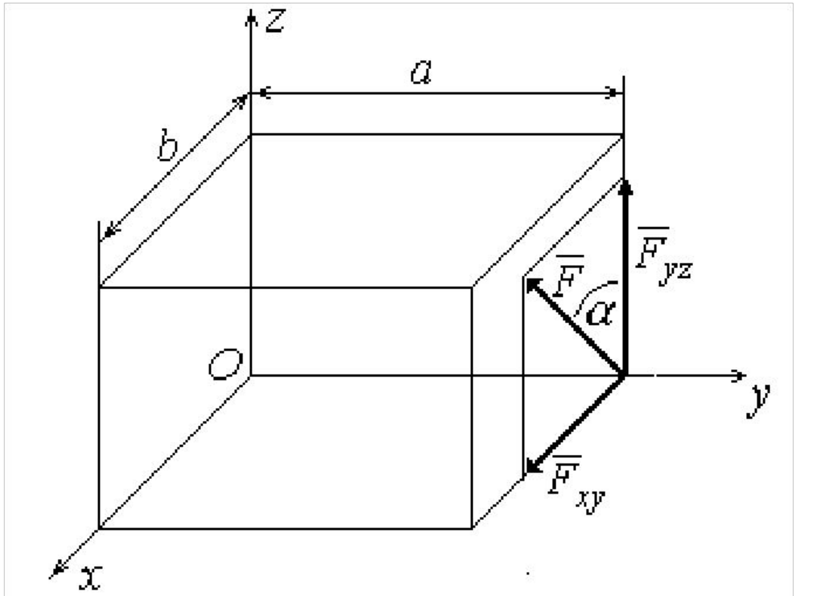


Рис. 25

ЛЕММА ПУАНСО
(лемма о параллельном переносе силы)

- **Лемма.** Не изменяя действия силы на твёрдое тело, её можно переносить параллельно самой себе в любую точку тела, добавляя при этом пару, момент которой равен моменту данной силы относительно новой точки приложения.

Доказательство:

К телу в точке A приложена сила $\overline{F}$ (рис. 26). Добавим в точке уравновешенную систему сил: $\{\overline{F}', \overline{F}''\} \sim 0$. Модули сил $\overline{F}, \overline{F}', \overline{F}''$ равны между собой.

$$\overline{F} \sim \{(\overline{F}', \overline{F}''), \overline{F}\} \sim \{\overline{F}', (\overline{F}, \overline{F}'')\}.$$

$\{\overline{F}, \overline{F}''\}$ - пара сил с моментом

$$\overline{M}(\overline{F}, \overline{F}'') = \overline{M}_B(\overline{F})$$

Лемма доказана.

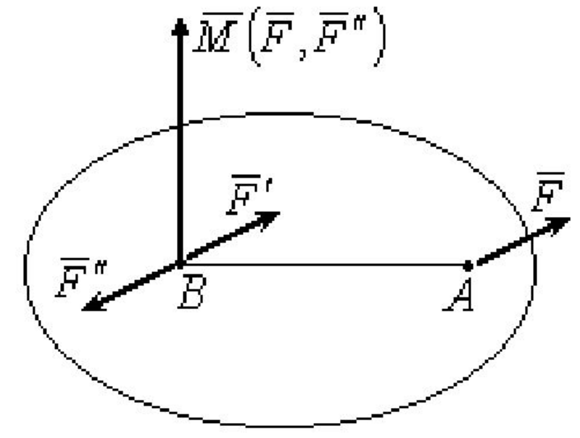


Рис. 26.

Основная теорема статики (теорема Пуансо)

- **Теорема.** Произвольную систему сил, действующую на тело, можно заменить эквивалентной системой, состоящей из силы и пары сил. Сила равна главному вектору исходной системы сил и приложена в произвольной точке (центре приведения). Момент пары равен главному моменту исходной системы сил относительно центра приведения.

Главный вектор $\overline{R}$ системы сил равен геометрической сумме всех сил системы :

$$\overline{R} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k . \qquad (1.10)$$

Проекция главного вектора на ось равна сумме проекций всех сил системы на ту же ось:

$$R_x = \sum_{k=1}^{n} F_{kx} ,\ R_y = \sum_{k=1}^{n} F_{ky} ,\ R_z = \sum_{k=1}^{n} F_{kz} . \qquad (1.11)$$

Главный момент $\overline{M}_O$ системы сил относительно данного центра равен сумме моментов всех сил системы относительно этого центра.

$$\overline{M}_O = \sum_{k=1}^{n} \overline{M}_O\left(\overline{F}_k\right) \qquad (1.12)$$

Проекция главного момента на ось координат равна сумме моментов всех сил относительно этой же оси:

$$M_x = \sum_{k=1}^{n} M_x\left(\overline{F}_k\right),\ M_y = \sum_{k=1}^{n} M_y\left(\overline{F}_k\right),\ M_z = \sum_{k=1}^{n} M_z\left(\overline{F}_k\right). \quad (1.13)$$

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА СТАТИКИ

(доказательство)

- Пусть дана система сил $\{\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_k, ..., \overline{F}_n\}$ (рис. 27). Произвольно возьмём точку O за центр приведения. По лемме Пуансо перенесём силу $\overline{F}_1$ в точку O и получаем: силу $\overline{F}_1{}'$ и пару с моментом M_1, равным моменту исходной силы $\overline{F}_1$ относительно выбранного центра - $\overline{M}_1 = \overline{M}_O(\overline{F}_1)$.

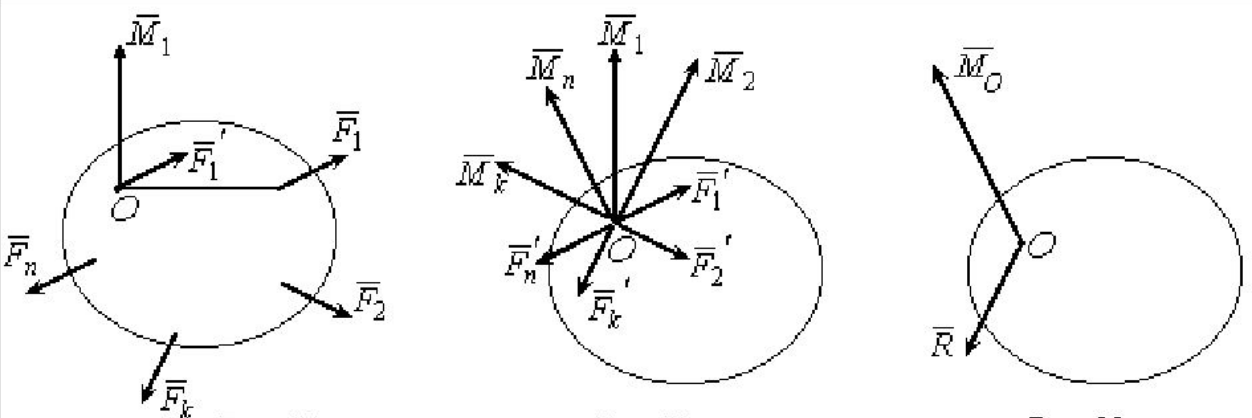


Рис. 27 Рис. 28. Рис. 29.

Аналогично перенесём все остальные силы (рис. 28). В результате получим систему сходящихся сил и систему пар сил. По теореме о существовании равнодействующей системы сходящихся сил их можно заменить одной силой $\overline{R} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k$, равной главному вектору. Систему пар по теореме о сложении пар можно заменить одной парой, момент которой равен главному моменту $\overline{M}_O = \sum_{k=1}^{n} \overline{M}_O(\overline{F}_k)$ (рис. 29).

Теорема доказана.

УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ СИСТЕМЫ СИЛ

- **В аналитической форме**. Для равновесия произвольной пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на три координатные оси и суммы моментов всех сил относительно этих осей были равны нулю:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0; \qquad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0; \qquad \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0; \qquad (1.14)$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_x\left(\overline{F}_k\right) = 0; \qquad \sum_{k=1}^{n} M_y\left(\overline{F}_k\right) = 0; \qquad \sum_{k=1}^{n} M_z\left(\overline{F}_k\right) = 0.$$

Или шесть скалярных уравнений в проекциях на декартовые оси координат:

$$\begin{cases} R_x = \sum X_\nu = 0 \\ R_y = \sum Y_\nu = 0 \\ R_z = \sum Z_\nu = 0 \\ m_x = \sum \left(y_\nu \cdot Z_\nu - z_\nu \cdot Y_\nu\right) = 0 \\ m_y = \sum \left(z_\nu \cdot X_\nu - x_\nu \cdot Z_\nu\right) = 0 \\ m_z = \sum \left(x_\nu \cdot Y_\nu - y_\nu \cdot X_\nu\right) = 0 \end{cases}$$

Условия равновесия могут быть использованы для решения задач на равновесие при определении неизвестных величин (как правило, реакций связей). Задача будет статически определимой, если число уравнений будет не больше шести.

УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ СИСТЕМЫ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ

- Если систему координат выбрать так, чтобы одна из осей (например, ось z) была параллельна каждой силе $\overline{F}_k$ (рис. 30). В этом случае проекция каждой силы на оси x и y равна нулю, и в системе уравнений (1.14) выражения $\sum\limits_{k=1}^{n} F_{kx} = 0;$ $\sum\limits_{k=1}^{n} F_{ky} = 0;$ превращаются в тождества. Момент каждой силы $\overline{F}_k$ относительно координатной оси также равен нулю, и уравнение $\sum\limits_{k=1}^{n} M_z\left(\overline{F}_k\right) = 0$ также превращается в тождество.

  Таким образом, для системы параллельных сил условия равновесия имеют вид:

$$
\begin{cases}
\sum\limits_{k=1}^{n} F_{kz} = 0; \\
\sum\limits_{k=1}^{n} M_x\left(\overline{F}_k\right) = 0; \\
\sum\limits_{k=1}^{n} M_y\left(\overline{F}_k\right) = 0;
\end{cases}
$$

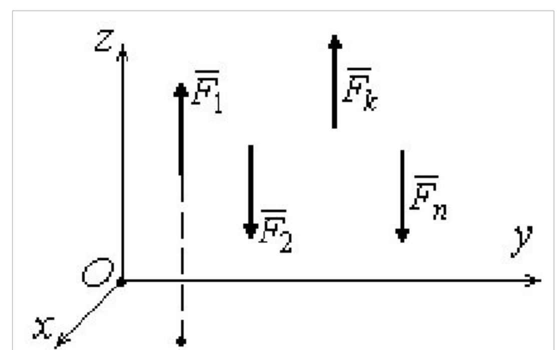


Рис. 30.

УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ СИЛ

•

Плоская система сил – это такая система сил, линии действия которых лежат в одной плоскости.

Если систему координат выбрать так, чтобы две оси (например, x и y) лежали в плоскости действия сил, то в системе уравнений (1.14) обращаются в тождества выражения $\sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0$, $\sum_{k=1}^{n} M_x(\overline{F}_k) = 0$, $\sum_{k=1}^{n} M_y(\overline{F}_k) = 0$, а выражение $\sum_{k=1}^{n} M_z(\overline{F}_k) = 0$ принимает вид $\sum_{k=1}^{n} M_O(\overline{F}_k) = 0$ (точка - начало отсчёта, может быть выбрана произвольно в плоскости действия сил). Таким образом, уравнения равновесия плоской системы сил принимают вид:

ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СИЛ ТРИ ФОРМЫ УСЛОВИЙ РАВНОВЕСИЯ

- **Основная форма.** Для равновесия плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы равнялись нулю: сумма моментов сил относительно точки на плоскости и суммы проекций всех сил на координатные оси, лежащие в плоскости действия сил, т.е.:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0; \qquad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0; \qquad \sum_{k=1}^{n} M_O\left(\overline{F}_k\right) = 0$$

Условия равновесия плоской системы сил могут быть записаны в других эквивалентных формах:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0; \qquad \sum_{k=1}^{n} M_A\left(\overline{F}_k\right) = 0 \qquad \sum_{k=1}^{n} M_B\left(\overline{F}_k\right) = 0 \qquad (1.16)$$

(отрезок AB не перпендикулярен оси Ox)

$$\sum_{k=1}^{n} M_A\left(\overline{F}_k\right) = 0 \qquad \sum_{k=1}^{n} M_B\left(\overline{F}_k\right) = 0 \qquad \sum_{k=1}^{n} M_C\left(\overline{F}_k\right) = 0 \qquad (1.17)$$

(точки A, B, C не лежат на одной прямой).

ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ

•

Центр параллельных сил.

На каждую частицу тела, находящегося вблизи поверхности Земли, действует сила притяжения к Земле (силы тяжести), которые образуют систему параллельных сил (считается, что размеры тела малы по сравнению с радиусом Земли). При решении задач эти силы заменяются одной – равнодействующей (силой тяжести тела), величину и точку приложения которой надо определить.

Введем понятие центра систем параллельных сил. Если к твердому телу (рис.31 в точках A_1 и

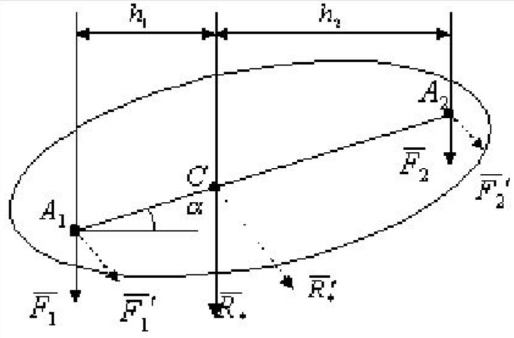


Рис. 31

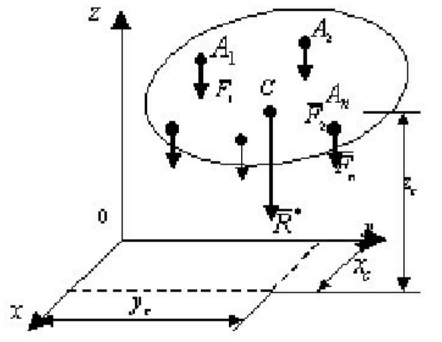


Рис. 32

A_2 приложены две параллельные силы $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$, то эта система имеет равнодействующую $\overline{R}^*$, модуль которой $R^* = F_1 + F_2$, а линия действия параллельна слагаемым силам и проходит через точку С, лежащую на прямой A_1A_2. Положение точки С находим, применив теорему Вариньона, согласно которой:

$$m_c\left(\overline{R}^*\right) = m_c\left(\overline{F}_1\right) + m_c\left(\overline{F}_2\right)$$

или

$$0 = F_1 \cdot A_1C \cdot \cos\alpha - F_2 \cdot A_2C \cdot \cos\alpha,$$

откуда

$$F_1 \cdot A_1C = F_2 \cdot A_2C .$$

ЦЕНТР ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ

•

Если силы $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$ повернуть вокруг точек их приложения в одну и ту же сторону на одинаковый угол, то получим две новые параллельные силы $\overline{F}_1'$ и $\overline{F}_2'$, равнодействующая которых $\overline{R}_*'$ тоже пройдет через точку С.

Рассматривая систему параллельных сил $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n$, имеющих равнодействующую, можно убедиться, что и в этом случаи равнодействующая этой системы независимо от направления всех параллельных сил всегда проходит через одну и ту же точку С, положение которой по отношению к точкам приложения сил, будет неизменным.

Точка С, через которую проходит линия действия равнодействующей системы параллельных сил при любом одинаковом повороте этих сил вокруг точек их приложения, называется ***центром параллельных сил***.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КООРДИНАТ ЦЕНТРА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ

- Найдем координаты центра параллельных сил. Так как положение точки С от направления сил не зависит, то допустим, что все силы направлены параллельно оси z (рис. 32). Эта система имеет равнодействующую $\overline{R}^* = \sum \overline{F}_k$, модуль которой $|\overline{R}^*| = R = \sum \overline{F}_k$.

  На основании теоремы Вариньона о моменте равнодействующей относительно оси приравняем момент равнодействующей $\overline{R}^*$ относительно оси к сумме моментов всех систем относительно той же оси:

$$m_y\left(\overline{R}^*\right) = \sum m_y\left(\overline{F}_k\right). \qquad (1.18)$$

  Из рисунка 32 видно, что $m_y\left(\overline{R}^*\right) = Rx_c$, $m_y\left(\overline{F}_1\right) = F_1x_1$, $m_y\left(\overline{F}_2\right) = F_2x_2$ и т.д.

Подставляя все эти величины в (1.18) равенство получим:

$$Rx_c = F_1x_1 + F_1x_2 + \ldots + F_nx_n = \sum F_kx_k \ .$$

Отсюда определим x_c . Аналогично определяются и другие координаты.

Координаты центра параллельных сил:

$$X_c = \frac{\sum F_kx_k}{R},\ Y_c = \frac{\sum F_ky_k}{R},\ Z_c = \frac{\sum F_kz_k}{R}, \qquad (1.19)$$

где R определяется равенством $|\overline{R}^*| = R = \sum F_k$.

КООРДИНАТЫ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ

• ***Центром тяжести твердого тела*** называется геометрическая точка, являющаяся центром параллельных сил тяжести, действующих на все частицы тела. Для абсолютно твердого тела положение центра тяжести относительно тела является неизменным.

Равнодействующая сил тяжести $\bar{p}_1$, $\bar{p}_2$, …, $\bar{p}_n$, действующих на все частицы данного тела, обозначим $\bar{P}$. Модуль этой силы называется весом тела и определяется равенством

$P = \sum p_k$.

Координаты центра тяжести, как центра параллельных сил, определяются формулами:

$$\boxed{X_c = \frac{\sum P_k x_k}{P},\ Y_c = \frac{\sum P_k y_k}{P},\ Z_c = \frac{\sum P_k z_k}{P},}$$

Где $x_k y_k z_k$ - координаты точек приложения сил тяжести p_k, действующих на частицы тела.

Если тело является однородным, то вес p_k любой его части пропорционален объему v_k этой части тела: $p_k = \gamma v_k$, где γ – вес единицы объема. Подставив эти значения в формулы (1.20),после сокращения на γ получим координаты точки С, называемой ***центром тяжести объема V***:

$$X_c = \frac{\sum v_k x_k}{V},\ Y_c = \frac{\sum v_k y_k}{V},\ Z_c = \frac{\sum v_k z_k}{V} \qquad (1.21)$$

Аналогично рассуждая провести для тела, представляющего собой однородную плоскую пластину, и определить координаты ***центра тяжести площади S***:

$$X_c = \frac{\sum s_k x_k}{S},\ Y_c = \frac{\sum s_k y_k}{S}, \qquad (1.22)$$

где S – площадь всей пластины; s_k - площадь частей, из которых состоит пластина; x_k, y_k - координаты центров тяжести площади k-й части пластины.

СЦЕПЛЕНИЕ И ТРЕНИЕ СКОЛЬЖЕНИЯ

•

Если к твёрдому телу, покоящемуся на шероховатой поверхности (рис. 33), приложить горизонтальную силу $\bar{S}$, то действие этой силы вызовет появление силы сцепления $\bar{F}_{сц} = -\bar{S}$, представляющей собой силу противодействия плоскости смещению тела. Иногда эту силу называют силой трения покоя. Благодаря сцеплению тело остаётся в покое при изменении модуля силы $\bar{S}$ от нуля до некоторого значения $S_{\max}$. Это значит, что модуль силы сцепления тоже меняется от $F_{сц} = 0$ до $F_{сц} = F_{сц}^{\max}$ в момент начала движения.

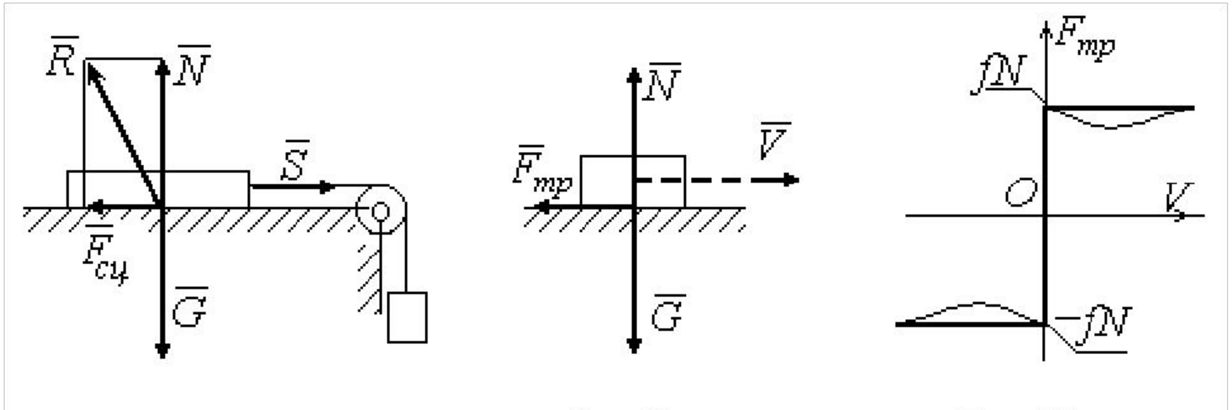


Рис. 33. Рис.34. Рис. 35.

Модуль максимальной силы сцепления пропорционален нормальному давлению N тела на плоскость:

$$F_{тр} = f \cdot N.$$

РАВНОВЕСИЕ СИСТЕМЫ ТЕЛ

• Если в равновесии находится не одно тело, а система тел, то для определения всех неизвестных величин необходимо расчленять систему, вводя в рассмотрение реакции внутренних связей. Под реакциями внутренних связей понимаются силы взаимодействия между телами системы. Проиллюстрируем это примером.

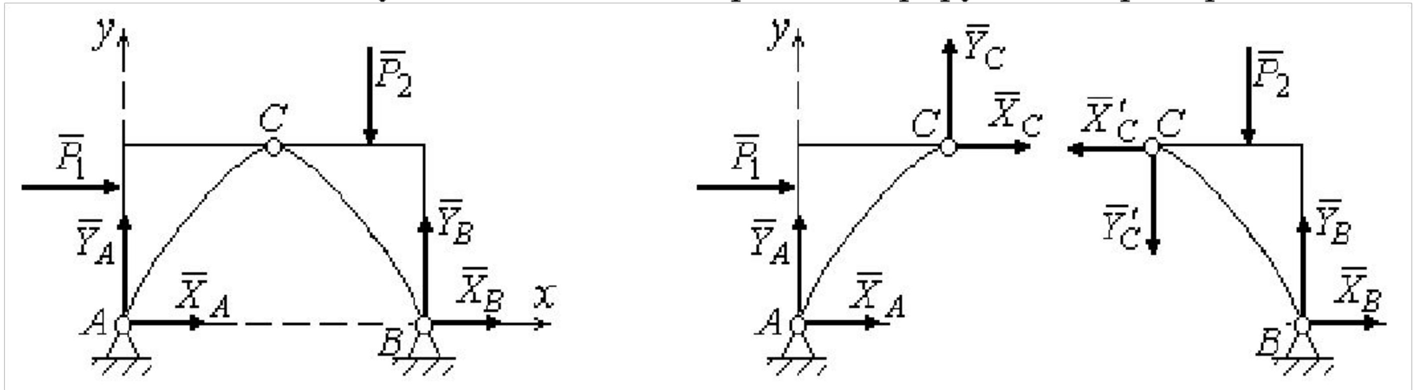


Рис. 36. Рис. 37.

Пусть дана «плоская система тел», т.е. плоские тела лежат в одной плоскости (рис. 36). Расставим реакции $\bar{X}_A, \bar{Y}_A$ в точке A и $\bar{X}_B, \bar{Y}_B$ в точке B. Как видим, число неизвестных сил реакций превышает число уравнений (три) для плоской системы сил. Расчленим систему на две части (рис. 37) по шарниру C, расставив внутренние реакции для левой части $\bar{X}_C, \bar{Y}_C$ в одну сторону, а для правой части $\bar{X}'_C, \bar{Y}'_C$ - в другую сторону. Учитывая, что $\bar{X}_C = \bar{X}'_C$ и $\bar{Y}_C = \bar{Y}'_C$, мы имеем общее число неизвестных реакций – шесть, равное числу уравнений равновесия – по три уравнения на две части.

РАВНОВЕСИЕ СИСТЕМЫ ТЕЛ (продолжение)

- Аналогично, если «плоская система» состоит из трёх плоских тел, то она расчленяется на три части, и появляется девять неизвестных реакций, число которых равно общему числу уравнений равновесия, которые можно составить для трёх частей.

  Таким образом, число n уравнений равновесия и число k тел для «плоской системы тел» связаны зависимостью:

  $$n = 3k$$

  Аналогично для произвольной пространственной системы тел число n уравнений равновесия и число k тел для «плоской системы тел» связаны зависимостью:

  $$n_1 = 6k_1$$

  так как для одного тела можно составить шесть уравнений равновесия.

СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ

- Статически определимые системы – это такие системы тел, в которых число уравнений равно числу неизвестных сил. Если это условие не выполняется, то анализируют всю модель и приводят её к рассчитываемому виду, изменяя, как правило, внутренние связи механической системы.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ПО СТАТИКЕ

- 1. Назовите основные модели реальных тел в теоретической механике.
- 2. Сформулируйте аксиомы статики.
- 3. Что называется моментом силы относительно точки?
- 4. Перечислите элементарные операции над силами.
- 5. Какие системы сил называются эквивалентными?
- 6. Напишите общие условия равновесия твёрдого тела.
- 7. Что называется плоской системой сил?
- 8. Напишите условия равновесия плоской системы сил.
- 9. Какое твёрдое тело называется несвободным?
- 10. В каком случае три силы уравновешивают твёрдое тело?
- 11. Как выглядят условия равновесия тела с одной неподвижной точкой?
- 12. Напишите уравнения равновесия тела, способного вращаться вокруг неподвижной оси.
- 13. Назовите виды опор в схемах.
- 14. Чем отличаются шарнирно подвижная и шарнирно неподвижная опоры?
- 15. Какие уравнения являются наиболее удобными для нахождения реакций в брусе?

Соколов А.П.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

(часть 2)

для студентов ЭНИН

направления 140100

ТЕПЛОЭНЕРГЕТИКА

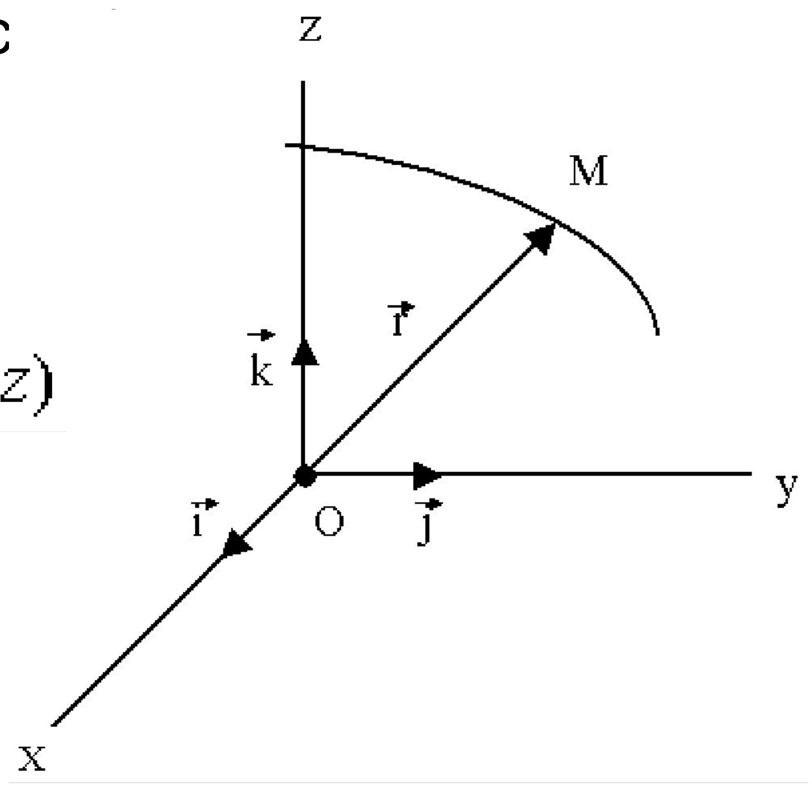
КИНЕМАТИКА

- Кинематика – раздел теоретической механики, в котором изучается движение тел без учёта действующих сил, т.е. движение с геометрической точки зрения.
- *Кинематикой называется та часть механики, в которой изучаются зависимости между величинами, характеризующими состояние систем, но не рассматриваются причины вызывающие изменение состояние движения.*

КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

Декартовы координаты.

С неподвижной системой отсчёта связываем декартовую ортогональную систему координат (правую, рис



Точка $M(x, y, z)$

, где

ТРАЕКТОРИЯ ТОЧКИ

- $$x = f_1(t), y = f_2(t), z = f_3(t)$$
$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z,$$
– параметрические уравнения траектории.

где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ - *единичные векторы (орты),*

$f_i(t)$ - непрерывны и 2 раза дифференцируемы; 2-е производные – непрерывны.

Непрерывная последовательность точек среды (пространства), занимаемая точкой М, называется ***траекторией точки М.***

Исключая время:

$$y = F_1(x); z = F_2(x)$$

или:

$$\Phi_1(x, y, z) = 0; \Phi_2(x, y, z) = 0$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ ТОЧКИ

•

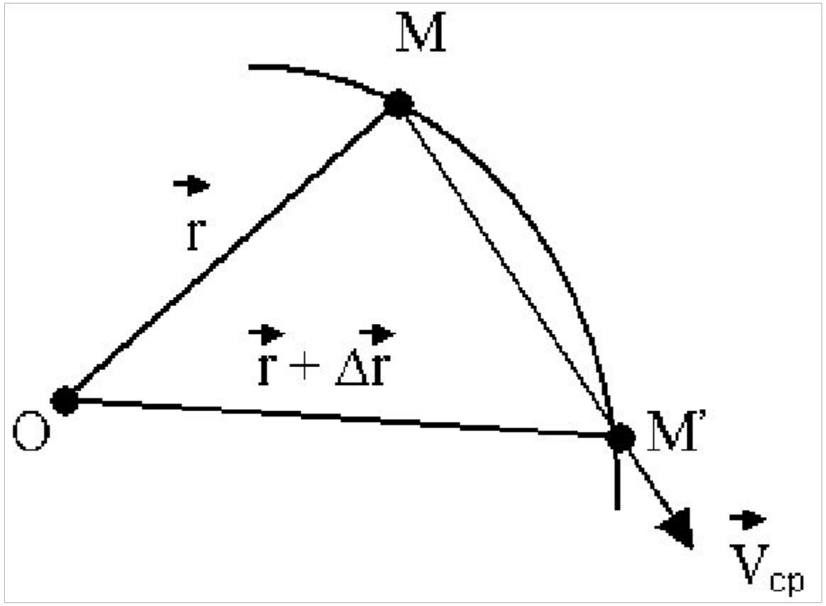


Рис.39.

т. M соответствует время t; т. M' соответствует время t + Δt; (Δt - конечное).

Радиусы – векторы: моменту времени t соответствует вектор $\vec{r}$;

моменту времени t + Δt соответствует вектор $\vec{r} + \Delta\vec{r}$; $\Delta\vec{r} = \overline{MM'}$ за время Δt (рис. 39):

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ (продолжение)

- $$\vec{V}_{cp} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$ (Направление по секущей ММ').

Скорость точки в момент времени t получается при $\Delta t \longrightarrow 0$, то есть

$$\vec{V}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$ (Направление по касательной и траектории точки)

Очевидно:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V} = \vec{i}\,\frac{dx}{dt} + \vec{j}\,\frac{dy}{dt} + \vec{k}\,\frac{dz}{dt}$$

Проекции $\vec{V}$:

$$\vec{V}_x = \frac{dx}{dt} \equiv \dot{x};\ \vec{V}_y = \frac{dy}{dt} \equiv \dot{y};\ \vec{V}_z = \frac{dz}{dt} \equiv \dot{z}.$$

Модуль (длина):

$$\left|\vec{V}\right| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСКОРЕНИЯ ТОЧКИ

Аналогично найдём ускорение (рис. 40).

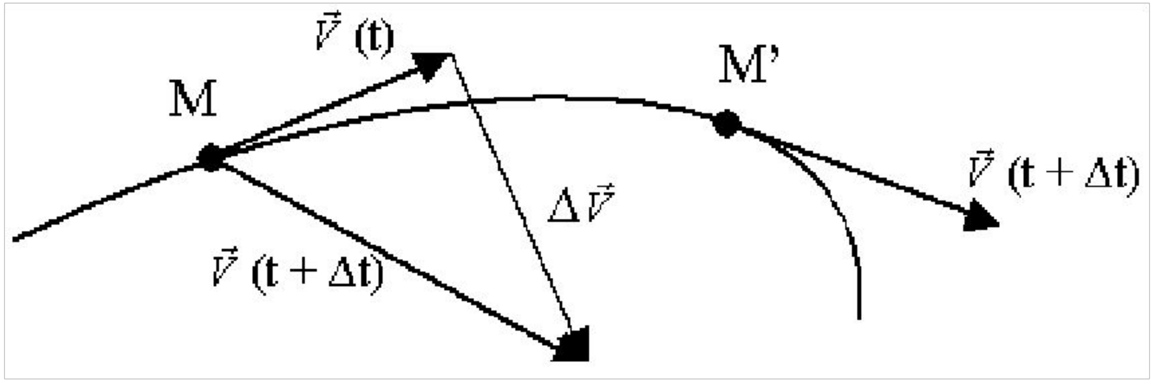
- 

Рис.40.

Совмещая начало векторов $\vec{V}$(t) и $\vec{V}$(t + Δt) в точке M => $\Delta\vec{V}$ за Δt.
Среднее ускорение:

$$\vec{a}_{ср} = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}$$ (направление в сторону вогнутости траектории)

Ускорение точки в момент времени t получается при Δt ⟶ 0, то есть

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Очевидно: $$\vec{a}(t) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \equiv \vec{i}\ddot{x} + \vec{j}\ddot{y} + \vec{k}\ddot{z}$$; $$|\vec{a}| = \sqrt{(\ddot{x})^2 + (\ddot{y})^2 + (\ddot{z})^2}$$

УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ (продолжение)

.

Ускорение точки в некоторый момент времени равно производной по времени от вектора скорости, или второй производной по времени от радиуса – вектора точки в этот момент времени.

В некоторых задачах – используется производная более высоких порядков, но здесь они пока не нужны.

В механике применяются не только декартовы координаты – часто применяют обобщённые (криволинейные) координаты.

Они бывают удобней, позволяют определить конфигурацию рассматриваемой системы. Часто их называют позиционными. Криволинейными они называются потому, что линии вдоль которых меняется только одна координата, обычно бывают кривыми.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ И УСКОРЕНИЯ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

- Рассмотрим частный случай криволинейных координат – **полярные координаты** точки на плоскости: применим далее к задаче движение точек в центральном силовом поле (рис. 41).

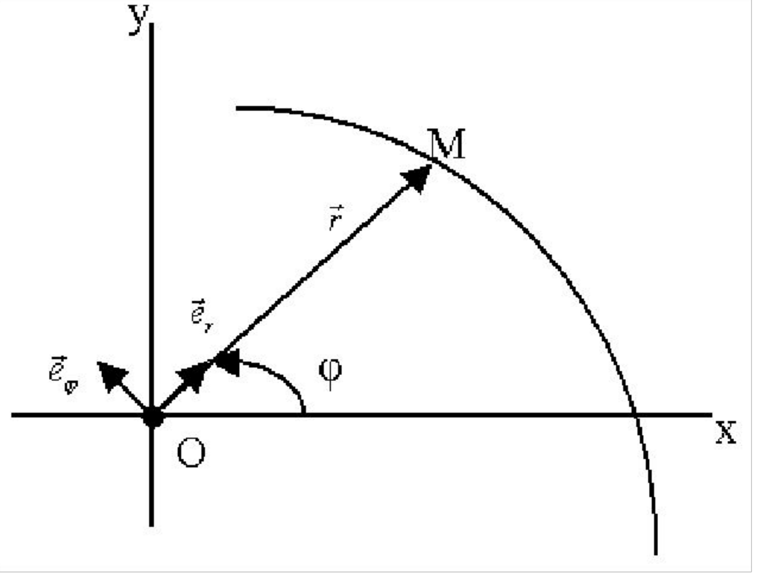


Рис.41.

(x, y) – декартовы координаты; (r, φ) – полярные координаты.

Угол φ=> от Ox против часовой стрелки – положительное направление

Формулы преобразования:

$x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, где $r \geq 0$; $0 \leq \varphi < 2\pi$

(можно рассматривать и $\varphi \longrightarrow \infty$).

Если r = const – концентрические окружности с центром в точке O.

Если φ= const – прямолинейные лучи из точки O.

(продолжение)

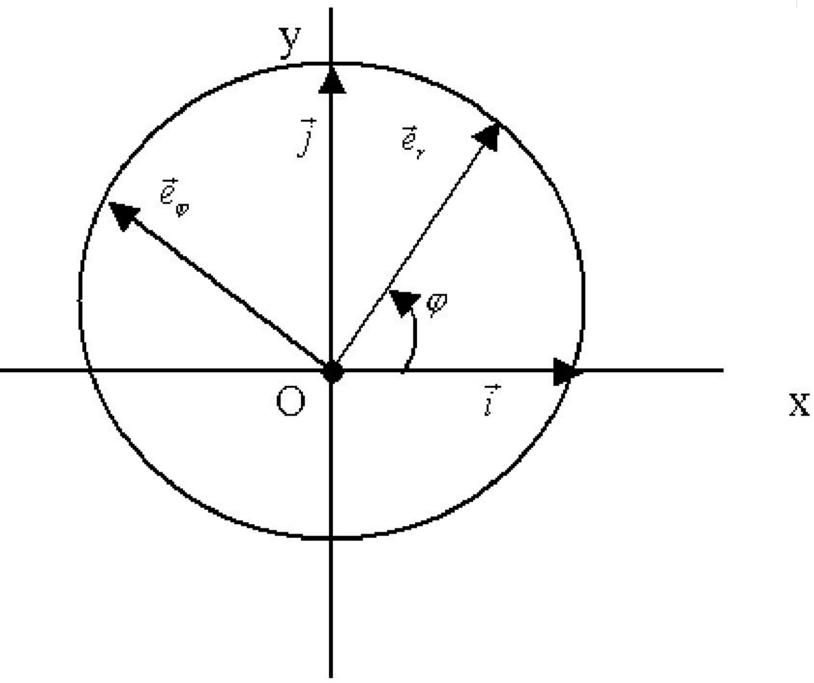


Рис.42.

Введём два орта:

$\vec e_r$ - радиального направления

$_\varphi$ - трансверсального направления

$\vec e_r \perp \vec e_\varphi$.

айдём производные $\vec e_r$ по углу φ (рис. 42):

$\vec\ell_r = \vec i\cos\varphi + \vec j\sin\varphi$ (так как r = 1)

$\frac{d\vec e_r}{d\varphi} = -\vec i\sin\varphi + \vec j\cos\varphi = \vec e_r$ при $\varphi + \frac{\pi}{2}$,

. е. $\frac{d\vec e_r}{d\varphi} = \vec e_\varphi$. Далее:

$\frac{d^2\vec e_r}{d\varphi^2} = \frac{d\vec e_\varphi}{d\varphi} = -\vec i\cos\varphi - \vec j\sin\varphi = \vec e_r$ при $\varphi + \frac{\pi}{2}$,

т. е. $\frac{d^2\vec e_r}{d\varphi^2} = -\vec e_r$.

ОКОНЧАНИЕ

Проекции скорости:

$$\begin{cases} V_r = \dfrac{dr}{dt} - \text{проекция на радиальное направление;} \\ V_\varphi = r\dfrac{d\varphi}{dt} - \text{проекция на трансверсальное направление.} \end{cases}$$

Проекции ускорения:

$$\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 - \text{проекция на радиальное направление} \\ a_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} - \text{проекция на трансверсальное направление} \end{cases}$$

ЕСТЕСТВЕННЫЕ КООРДИНАТНЫЕ ОСИ (ВВЕДЕНИЕ ПОНЯТИЯ)

Рассмотрим систему координатных осей, определяемую траекторией точки (рис.43).

•

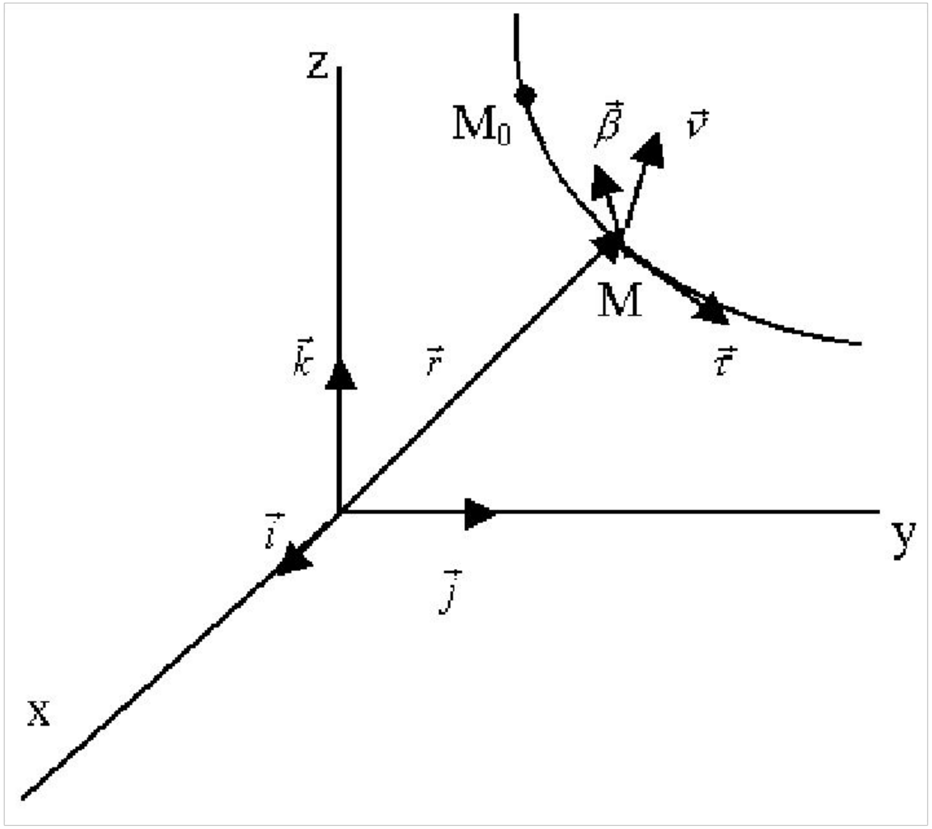


Рис.43.

$$\overline{OM} = \vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z; \vec{r} = \vec{r}(t)$$

.

ЕСТЕСТВЕННЫЕ КООРДИНАТНЫЕ ОСИ

- ***Единичный вектор касательной к траектории*** (S – длина дуги M_0M):

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{i}\,\frac{dx}{ds} + \vec{j}\,\frac{dy}{ds} + \vec{k}\,\frac{dz}{ds},$$ где $$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1.$$

Дифференцируя $\vec{\tau}$ по S: $\dfrac{d\vec{\tau}}{ds} = k\vec{\nu}$,

где $\vec{\nu}$ - ***единичный вектор главной нормали;*** $\vec{\nu} \perp \vec{\tau}$ и направлен в сторону вогнутости;

$\dfrac{1}{\rho} = k \geq 0 -$ кривизна. (k = 0 - прямая); ρ - радиус кривизны.

Единичный вектор бинормали $\vec{\beta}$:

$\vec{\beta} = \vec{\tau} \times \vec{\nu}$.

$\vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta} -$ образуют правую тройку ортогональных единичных векторов. Они определяют направление *естественных (натуральных)* осей в том месте траектории, где находится движущаяся точка.

ПРОЕКЦИИ СКОРОСТИ НА ЕСТЕСТВЕННЫЕ ОСИ

- Плоскости:
  соприкасающаяся $(\vec{\tau}, \vec{\nu})$;
  нормальная $(\vec{\nu}, \vec{\beta})$;
  спрямляющая $(\vec{\beta}, \vec{\tau})$.
  образуют ***трёхгранник Френе.***
  Найдём проекции скорости и ускорения точки на естественные оси.

соприкасающаяся $(\vec{\tau}, \vec{\nu})$;

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \vec{\tau} V$$

Очевидно, проекция на ось $\vec{\tau}$: $V = \frac{ds}{dt}$

(может иметь разные знаки – зависит от направления S).

ПРОЕКЦИЯ УСКОРЕНИЯ НА ЕСТЕСТВЕННЫЕ ОСИ

•

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\tau} \cdot V) = \vec{\tau}\frac{dV}{dt} + \frac{d\vec{\tau}}{dt}V;$$

Но: $$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = k\vec{\nu}\frac{ds}{dt} = \frac{\vec{\nu}}{\rho}V \Rightarrow \vec{a} = \vec{\tau}\frac{dV}{dt} + \vec{\nu}\frac{V^2}{\rho} + \vec{\beta} \cdot 0;$$

Очевидно, проекции ускорения на естественные оси:

на касательную: $a_\tau = \dfrac{dV}{dt}$;

на главную нормаль: $a_\nu = \dfrac{V^2}{\rho}$;

на бинормаль: 0

Таким образом, ускорение лежит в соприкасающейся плоскости (рис. 44).

ИЛЛЮСТРАЦИЯ ПРОЕКЦИИ СКОРОСТЕЙ И УСКОРЕНИЙ

•

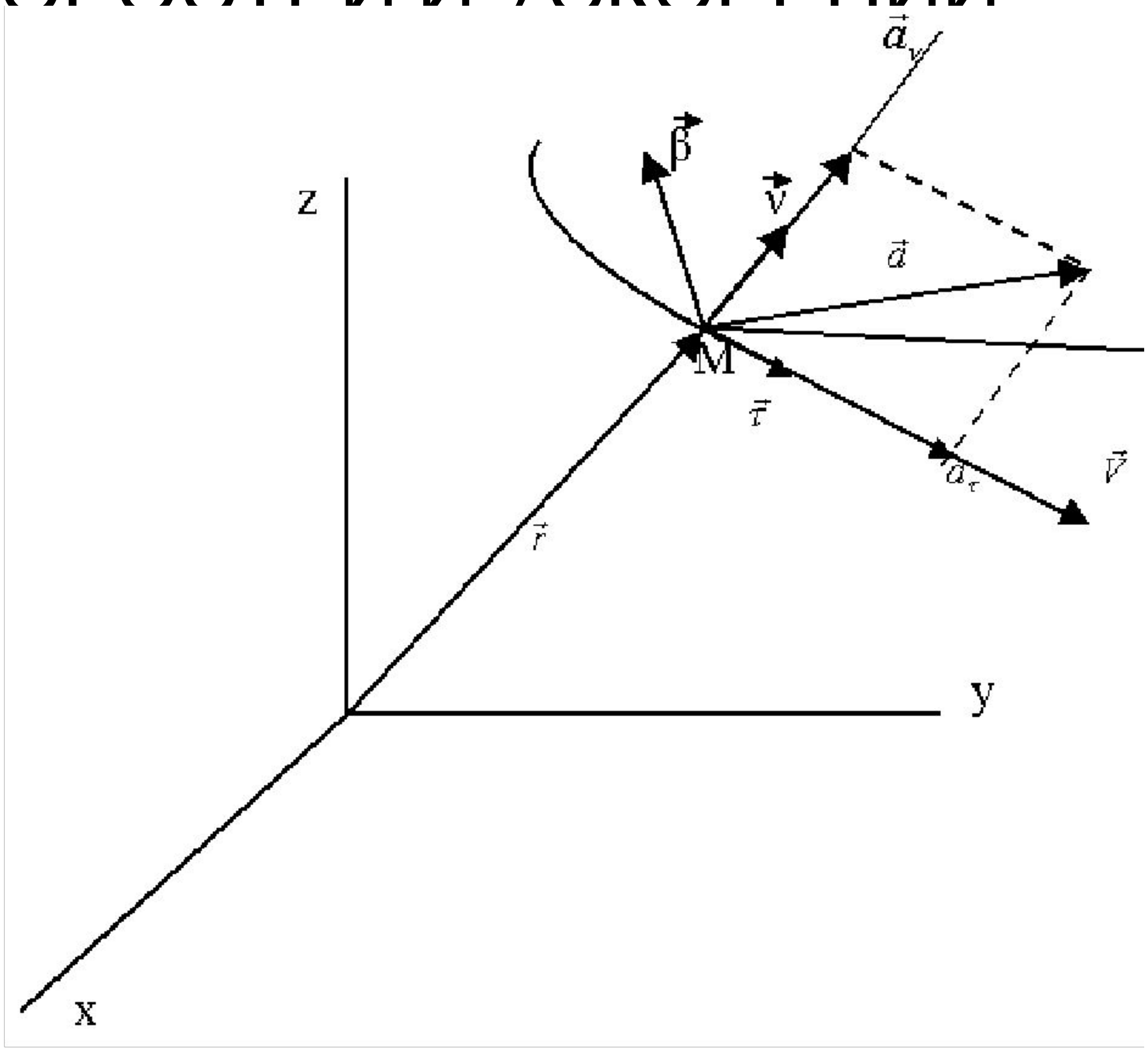


Рис.44.

Задача

•

$$\left.\begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array}\right\} \quad \text{Найти: } \rho.$$

$$\rho = \frac{V^2}{a_\nu} = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\sqrt{a^2 - a_\tau^2}}; a^2 = \ddot{x}^2 + \ddot{y}^2; a_\tau = \frac{dV}{dt}$$

КИНЕМАТИКА ТЕЛА

- Найдём число координат, определяющих положение абсолютно твёрдого тела.

Определить положение тела => определить координаты $\forall$ точки относительно некоторой системы отсчёта в $\forall$ момент времени.

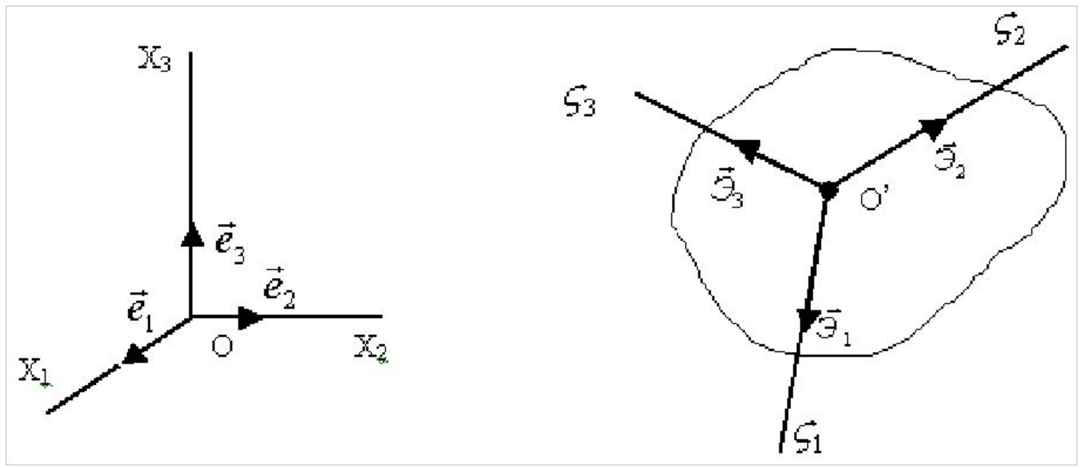


Рис.45.

Пусть X_1 , X_2 , X_3 – неподвижные оси (рис. 45); орты: ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 [декартова система].

ς_1, ς_2, ς_3 - оси, жёстко связанные с телом; орты: $\vec{Э}_1$, $\vec{Э}_2$, $\vec{Э}_3$ - [декартова система].

Так как координаты точек относительно собственных осей ς_1, ς_2 , ς_3 не зависят от времени, то задача сводится к определению положения координатных осей, жёстко связанных с телом (подвижных), относительно неподвижных осей X_1 , X_2 , X_3.

ВЗАИМОСВЯЗЬ ПОДВИЖНЫХ И НЕПОДВИЖНЫХ ОСЕЙ

-

Составим таблицу косинусов углов между осями X и ς_j:

$$\alpha_{ij} = \mathbf{cos}\left(Ox_i,^\wedge O'\varsigma_j\right) = \mathbf{cos}\left(\vec{\ell}_i,^\wedge \vec{Э}_j\right) = \left(\vec{\ell}_i \vec{Э}_j\right)$$

$\vec{\ell}_i \vec{Э}_j$ - скалярное произведение.

	ς_1	ς_2	ς_3
X_1	α_{11}	α_{12}	α_{13}
X_2	α_{21}	α_{22}	α_{23}
X_3	α_{31}	α_{32}	α_{33}

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕОБХОДИМОСТИ ШЕСТИ НЕЗАВИСИМЫХ КООРДИНАТ ДЛЯ СВОБОДНОГО ТВЁРДОГО ТЕЛА

Так как системы координат ортогональны, то скалярное произведение: $\vec{Э}_j \cdot \vec{Э}_k = \delta_{jk}$, где

- $$\delta_{jk} = \begin{cases} 0, \mathrm{j} \neq \mathrm{k} \\ 1, \mathrm{j} = \mathrm{k} \end{cases}$$

  Символ Кронекера.

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{Э}_j \perp \vec{Э}_k \text{, если } \mathrm{j} \neq \mathrm{k} \\ \vec{Э}_j = \vec{Э}_k \text{, если } \mathrm{j} = \mathrm{k} \end{array} \right\}$$

С другой стороны $\Rightarrow$ $\begin{cases} \vec{Э}_j = \vec{\ell}_1 \alpha_{1j} + \vec{\ell}_2 \alpha_{2j} + \vec{\ell}_3 \alpha_{3j}, j = 1,2,3. \\ \vec{Э}_k = \vec{\ell}_1 \alpha_{1k} + \vec{\ell}_2 \alpha_{2k} + \vec{\ell}_3 \alpha_{3k}. \end{cases}$

$$\vec{Э}_j \cdot \vec{Э}_k = \alpha_{1j} \cdot \alpha_{1k} + \alpha_{2j} \cdot \alpha_{2k} + \alpha_{3j} \cdot \alpha_{3k} = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{ij} \cdot \alpha_{ik} = \delta_{jk}$$

Итак: $\sum_{i=1}^{3} \alpha_{ij} \cdot \alpha_{ik} = \delta_{jk}$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕОБХОДИМОСТИ ШЕСТИ НЕЗАВИСИМЫХ КООРДИНАТ ДЛЯ СВОБОДНОГО ТВЁРДОГО ТЕЛА (окончание)

- Число таких соотношений = 6 (Из 9 – ти в силу симметрии по ji k).

Имеем 6 соотношений для 9 косинусов =>

3 косинуса α_{ij}, не расположенные в одном столбце, или в одной строке, могут быть приняты за независимые, а остальные можем определить из составленных шести соотношений.

Кроме того => три координаты определяют положение точки O' – начало системы ς_1, ς_2, ς_3.

Но 9 координат и 3 соотношение длин:

$$\sum_{j=1}^{3}\left(x_{j2}-x_{j1}\right)^2=\rho_{12}^2;\sum_{j=1}^{3}\left(x_{j3}-x_{j2}\right)^2=\rho_{23}^2;\sum_{j=1}^{3}\left(x_{j1}-x_{j3}\right)^2=\rho_{31}^2$$

Это условия постоянства расстояний между точками в абсолютно твёрдом теле.

ВЫВОД ФОРМУЛЫ ЭЙЛЕРА

-

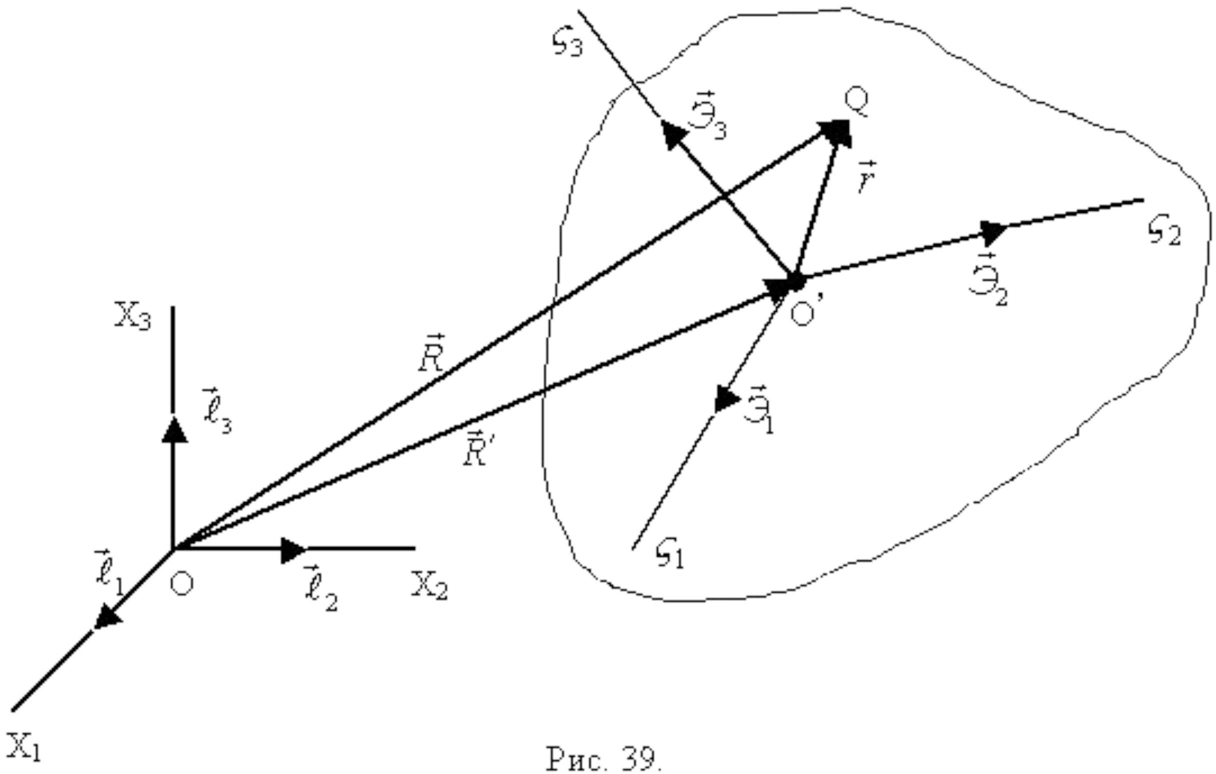


Рис. 39.

ПЕРЕХОД К АБСОЛЮТНОЙ СКОРОСТИ

- $\vec{R} = \vec{R}' + \vec{r}$,

1) $\vec{V}_Q \equiv \vec{V} = \dfrac{d\vec{R}}{dt} = \dfrac{d\vec{R}'}{dt} + \dfrac{d\vec{r}}{dt}$,

$\dfrac{d\vec{R}'}{dt} = \vec{V}'$ - скорость точки O', взятой за полюс.

$\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{W}$ - скорость точки Q во вращательном движении тела (так как длина $\vec{r}$ постоянна).

Так как координаты ς_i точки Q постоянны, то

$$\vec{r} = \sum_{j=1}^{3} \vec{\Theta}_j \varsigma_j$$

Тогда:

2) $\vec{W} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \sum_{j=1}^{3} \varsigma_j \dfrac{d\vec{\Theta}_j}{dt}$,

где $\dfrac{d\varsigma_j}{dt} = 0, \dfrac{d\vec{\Theta}_j}{dt} \perp \vec{\Theta}_j \left(\left|\vec{\Theta}_j\right| = 1\right)$.

Скорость точки Q: $\vec{V} = \vec{V}' + \vec{W}$.- абсолютная

ФОРМА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СКОРОСТЕЙ

•

3) Выразим $\vec{Э}_j$ и производные через направляющие косинусы α_{ij}:

$$\vec{Э}_j = \sum_{i=1}^{3} \vec{\ell}_i \alpha_{ij}; \frac{d\vec{Э}_j}{dt} = \sum_{i=1}^{3} \vec{\ell}_i \frac{d\alpha_{ij}}{dt}.$$

Тогда: $\vec{W} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \vec{\ell}_i \cdot \varsigma_j \frac{d\alpha_{ij}}{dt}$ (в неподвижной системе).

4) Проекция $\vec{W}$ на ось ς_k (k= 1,2,3):

$$\vec{W}_k = \left(\vec{W}\vec{Э}_k\right) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \left(\vec{\ell}_i \vec{Э}_k\right) \varsigma_j \frac{d\alpha_{ij}}{dt} = \sum_{j=1}^{3} \varsigma_j \sum_{i=1}^{3} \alpha_{ik} \dot{\alpha}_{ij}.$$

Скорости точек во вращательном движении – линейные функции координат точек.

5) ***Получим более простую и наглядную форму*** закона распределения скоростей, используя свойства функции $\alpha_{ij}(t)$.

$$\sum_{i=1}^{3} \alpha_{ij} \cdot \alpha_{ik} = \delta_{jk},$$

Учёт свойств симметрии уравнений

•

Дифференцируем по t:

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{3}\alpha_{ij}\cdot\alpha_{ik}=0$$.

По свойству производной от произведения:

при j= k => $$\sum_{i=1}^{3}\alpha_{ij}\cdot\dot{\alpha}_{ij}=0$$,

при j≠ k=> $$\sum_{i=1}^{3}\alpha_{ij}\cdot\dot{\alpha}_{ik}=-\sum_{i=1}^{3}\alpha_{ik}\cdot\dot{\alpha}_{ij}$$.

Свойства:

а) симметрия по kи j;

б) при j= k=>равенство «0»;

в) размерность t^{-1} , т. е. угловая скорость (угол в радианах), так как $\vec{W}$ - скорость.

г) различных только три =>

k	j
1	3
2	1
3	2

Учёт движения относительно полюса

•

Покажем, что

б) $$\begin{cases} W_1 = \omega_2\varsigma_3 - \omega_3\varsigma_2 \\ W_2 = \omega_3\varsigma_1 - \omega_1\varsigma_3 \\ W_3 = \omega_1\varsigma_2 - \omega_2\varsigma_1 \end{cases}$$, где

$$\omega_1 = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{i3} \cdot \dot{\alpha}_{i2} \Rightarrow \begin{pmatrix} \mathrm{k} = 3 \\ \mathrm{j} = 2 \end{pmatrix}$$

$$\omega_2 = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{i1} \cdot \dot{\alpha}_{i3} \Rightarrow \begin{pmatrix} \mathrm{k} = 1 \\ \mathrm{j} = 3 \end{pmatrix}$$

$$\omega_3 = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{i2} \cdot \dot{\alpha}_{i1} \Rightarrow \begin{pmatrix} \mathrm{k} = 2 \\ \mathrm{j} = 1 \end{pmatrix}$$

Действительно:

$$W_1 = \sum_{j=1}^{3} \varsigma_j \sum_{i=1}^{3} \alpha_{i1} \cdot \dot{\alpha}_{ij} = \varsigma_3 \sum_{i=1}^{3} \alpha_{i1} \cdot \dot{\alpha}_{i3} + \varsigma_2 \sum_{i=1}^{3} \alpha_{i1} \cdot \dot{\alpha}_{i2} =$$

$$= \varsigma_3 \sum_{i=1}^{3} \alpha_{i1} \cdot \dot{\alpha}_{i3} - \varsigma_2 \sum_{i=1}^{3} \alpha_{i2} \cdot \dot{\alpha}_{i1}$$

$$W_2 = \sum_{j=1}^{3} \varsigma_j \sum_{i=1}^{3} \alpha_{i2} \cdot \dot{\alpha}_{ij} = \varsigma_1\omega_3 - \varsigma_3 \sum_{i=1}^{3} \alpha_{i3} \cdot \dot{\alpha}_{i2}$$

$$W_3 = \sum_{j=1}^{3} \varsigma_j \sum_{i=1}^{3} \alpha_{i3} \cdot \dot{\alpha}_{ij} = \varsigma_2\omega_1 - \varsigma_1\omega_2$$

- по аналогии.

Учёт угловых скоростей движения тела

•

Итак:

$$\begin{cases} W_1 = \omega_2 \varsigma_3 - \omega_3 \varsigma_2 \\ W_2 = \omega_3 \varsigma_1 - \omega_1 \varsigma_3 \\ W_3 = \omega_1 \varsigma_2 - \omega_2 \varsigma_1 \end{cases}$$

или:

7) $\vec{W} = \begin{vmatrix} \vec{\mathit{Э}}_1 & \vec{\mathit{Э}}_2 & \vec{\mathit{Э}}_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ \varsigma_1 & \varsigma_2 & \varsigma_3 \end{vmatrix}$, где $\vec{\mathit{Э}}_i$ - единичные вектора, жёстко связанные с телом.

Положим $\vec{\omega} = \sum_{i=1}^{3} \omega_i \vec{\mathit{Э}}_i$ - вектор, где $\omega_1 = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{i3} \cdot \dot{\alpha}_{i2}$

$$\vec{r} = \sum_{j=1}^{3} \varsigma_j \vec{\mathit{Э}}_j \qquad \omega_2 = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{i1} \cdot \dot{\alpha}_{i3}$$

$$\omega_3 = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{i2} \cdot \dot{\alpha}_{i1}$$

ФОРМУЛА ЭЙЛЕРА В ВЕКТОРНОЙ ЗАПИСИ

•

8) Тогда формула:

$$\vec{W} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

\- Описывает распределение скоростей, при движении относительно полюса.

Назовём $\vec{\omega}$ ***вектором мгновенной угловой скорости***, а прямая на которой он располагается, в рассматриваемый момент времени, проходящую через точку O' – ***осью мгновенного вращения***, или ***мгновенной осью***.

Таким образом, закон распределения скоростей точек абсолютно твёрдого тела в любом движении:

$$\vec{V} = \vec{V}' + \vec{\omega} \times \vec{r}.$$

Это формула Эйлера в векторной записи.

НАХОЖДЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ УСКОРЕНИЙ

- Дифференцируем по времени формулу Эйлера:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\vec{V}'}{dt} + \frac{d\vec{\omega}\times\vec{r}}{dt} + \frac{\vec{\omega}\times d\vec{r}}{dt},$$

Так как $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega}\cdot\vec{r}$, то

$$\left[\frac{\vec{\omega}\times d\vec{r}}{dt}\right] = [\vec{\omega}\times[\vec{\omega}\times\vec{r}]] = \omega^2\left[\vec{\ell}_\omega\times\left[\vec{\ell}_\omega\times\vec{r}\right]\right] \Rightarrow$$

$$\left[\vec{\ell}_\omega\left[\vec{\ell}_\omega\times\vec{r}\right]\right] = \vec{\ell}_\omega(\vec{\ell}_\omega\cdot\vec{r}) - \vec{r} \equiv \vec{\ell}$$

двойное векторное произведение $[\vec{a}[\vec{b}\cdot\vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$

•

$$\vec{a} = \vec{a}' + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \omega^2 \vec{\ell}$$
- формула Ривальса для распределения ускорений точек абсолютно твёрдого тела (рис. 47).

•

1) $\frac{d\vec{V}'}{dt} = \vec{a}'$ - ускорение начала подвижной системы.

Так как $\vec{\ell} \perp \vec{\omega} : \vec{\ell} + \vec{r} = \vec{\ell}_{\omega}(\vec{\ell}_{\omega} \cdot \vec{r}) \Rightarrow по\ \vec{\omega}$

2) $\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} = \vec{a}_{вр.}$ - вращательное ускорение.

3) $\omega^2 \vec{\ell} = \vec{a}_{ос.}$ - осестремительное ускорение.

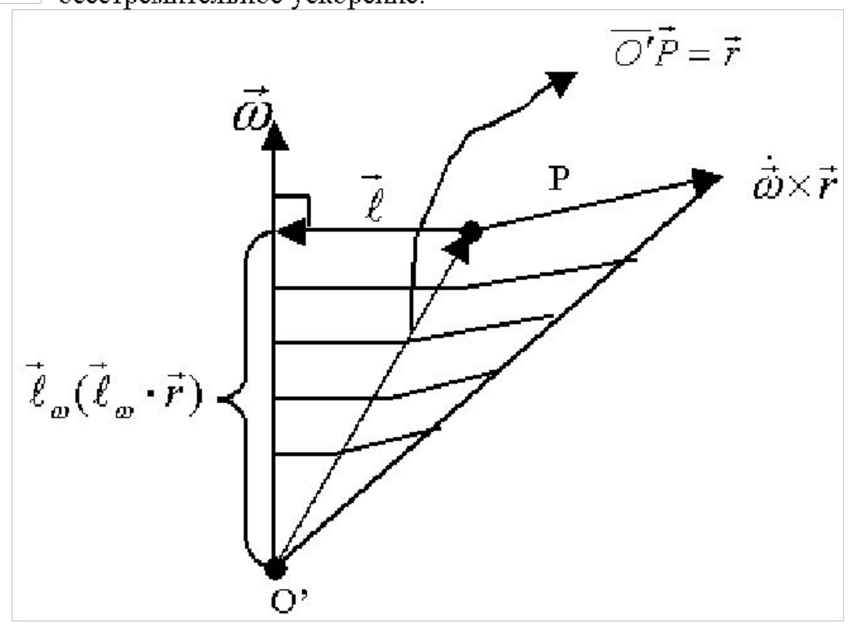


Рис.47.

ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА

•

Частными видами движения абсолютно твёрдого тела являются поступательное, вращательное и плоскопараллельное.

Поступательным движением абсолютно твёрдого тела будем называть такое движение, при котором отрезок прямой, соединяющей две любые точки тела, остаётся параллельным неподвижной прямой.

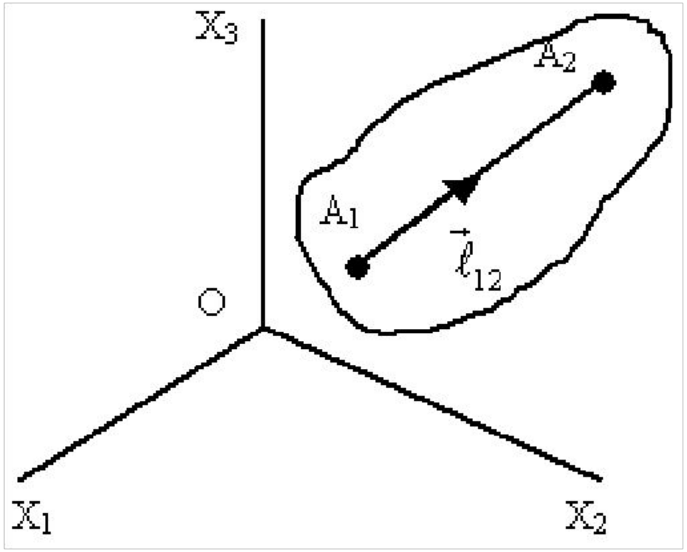


Рис.48.

В поступательном движении все точки тела в каждый момент времени имеет одну и ту же скорость и одно и то же ускорение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ О СКОРОСТЯХ ТОЧЕК ПРИ ПОСТУПАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ

- Пусть:

$$\overrightarrow{OA_1} = \vec{R}_1$$
$$\overrightarrow{OA_2} = \vec{R}_2$$

Тогда:

$$\vec{R}_1 + \overrightarrow{A_1A_2} = \vec{R}_2$$

Положим:

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \vec{\ell}_{12}\rho_{12}.$$

Так как $\overrightarrow{A_1A_2}$ перемещается параллельно первоначальному направлению, то:

$$\frac{d\vec{\ell}_{12}}{dt} = \mathbf{0}.$$

Тогда:

$$\frac{d\vec{R}_1}{dt} + \rho_{12}\frac{d\ell_{12}}{dt} = \frac{d\vec{R}_2}{dt} \Rightarrow \frac{d\vec{R}_1}{dt} = \frac{d\vec{R}_2}{dt} \Rightarrow \vec{V}_1 = \vec{V}_2$$

(Аналогично из формулы Эйлера при $\vec{\omega} = 0: \vec{V} = \vec{V}' + [\vec{\omega} \times \vec{r}]$)

Очевидно и наоборот, если скорости всех точек равны между собой в каждый момент времени, то тело движется поступательно.

ВРАЩЕНИЕ ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

- *Рассмотрим вращение тела вокруг неподвижной оси.*
  Пусть две точки А1 и А2 неподвижны. Очевидно, что все точки прямой А1А2 неподвижны. Введём неподвижную систему Х1, Х2, Х3: Х3 по А1А2. Положение тела определяется точками А1, А2, Р, а из трех координат точки Р только одна независимая, так как имеются два уравнения связи. Можно взять угол θ (рис.49).

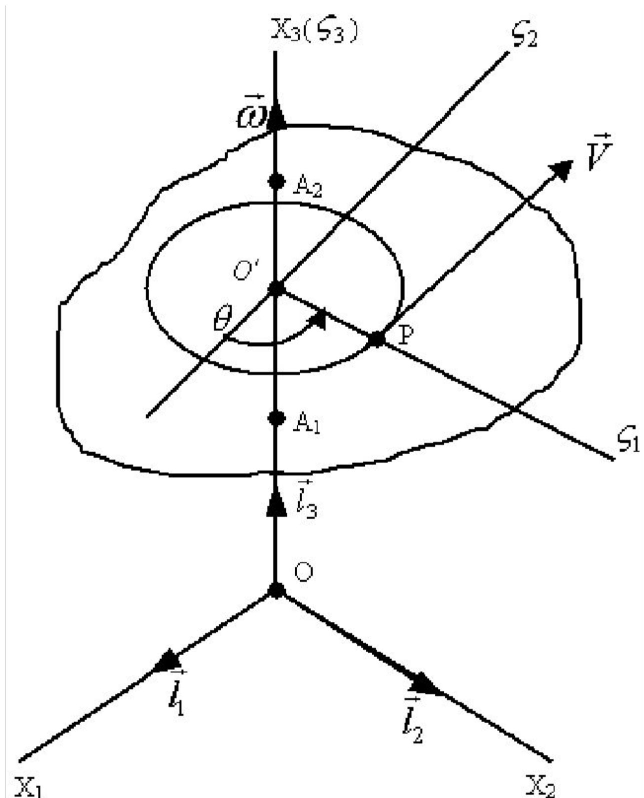


Рис.49.

Нахождение скоростей и ускорений при вращательном движении

•

Поясним: введём подвижную систему $O'\varsigma_3$ по Ox_3

$(Ox_1,^\wedge O\varsigma_1) = \theta$.

Тогда таблица косинусов:

	ς_1	ς_2	ς_3
x_1	$\cos\theta$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$	0
x_2	$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$	$\cos\theta$	0
x_3	0	0	1

$$\omega_1 = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{i3} \cdot \dot{\alpha}_{i2} = 0$$

$$\omega_2 = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{i1} \cdot \dot{\alpha}_{i3} = 0$$

$$\omega_3 = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{i2} \cdot \dot{\alpha}_{i1} = (-\sin\theta)(-\sin\theta) \cdot \dot{\theta} + \cos\theta\cos\theta \cdot \dot{\theta} + 0 = \dot{\theta}$$

Распределение скоростей и ускорений при вращательном движении

•

Распределение скоростей:

$$\vec{\omega} = \vec{\ell}_3 \frac{d\theta}{dt}; \vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\ell}_3 \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\omega = \dot{\theta}$$

$$\vec{V} = [\vec{\omega} \times \vec{r}] \Rightarrow V = \omega \cdot r \Rightarrow$$

Так как движется в плоскости.

Распределение ускорений:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \omega^2 \vec{l}$$

$$\vec{l} = -\vec{r}$$

$$\left.\begin{aligned} a_{вр.} &= \dot{\omega} r \\ a_{ц.} &= \omega^2 r \end{aligned}\right\} \quad a = \sqrt{a^2{}_{вр.} + a^2{}_{ц}}$$

ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ

- *Плоскопараллельным* называется такое движение абсолютно твёрдого тела, при котором скорости всех его точек параллельны некоторой неподвижной плоскости π.

  π - плоскость (x1,x2)||(y1,y2).

  По формуле Эйлера:

  $\vec{V} = \vec{V}' + \vec{\omega} \times \vec{r}$

  Так как $(\vec{V}\vec{\ell}_3) = 0, (\vec{V}'\vec{\ell}_3) = 0$, то

  $(\vec{V}\vec{\ell}_3) = (\vec{V}'\vec{\ell}_3) + ([\vec{\omega} \times \vec{r}]\vec{\ell}_3) \Rightarrow ([\vec{\omega} \times \vec{r}]\vec{\ell}_3) = 0$

  (круговая перестановка - $(\vec{\omega}[\vec{r} \times \vec{\ell}_3]) = ([\vec{\omega} \times \vec{r}]\vec{\ell}_3)$)

  или $\left(\vec{\omega} \begin{vmatrix} \vec{\ell}_1 & \vec{\ell}_2 & \vec{\ell}_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}\right) = 0$.

ИЛЛЮСТРАЦИЯ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

•

Т. е. скалярное произведение векторов $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ и $(y_2, -y_1, 0)$:

$\omega_1 y_2 - \omega_2 y_1 + \omega_3 0 = 0$.

В силу произвольности координат y1, y2 точки P =>

$\omega_1 = \omega_2 = 0$.

Итак: вектор мгновенной угловой скорости расположен на оси $O'y_3$.
Обычно рассматривают плоское сечение тела || π - фигуру S.

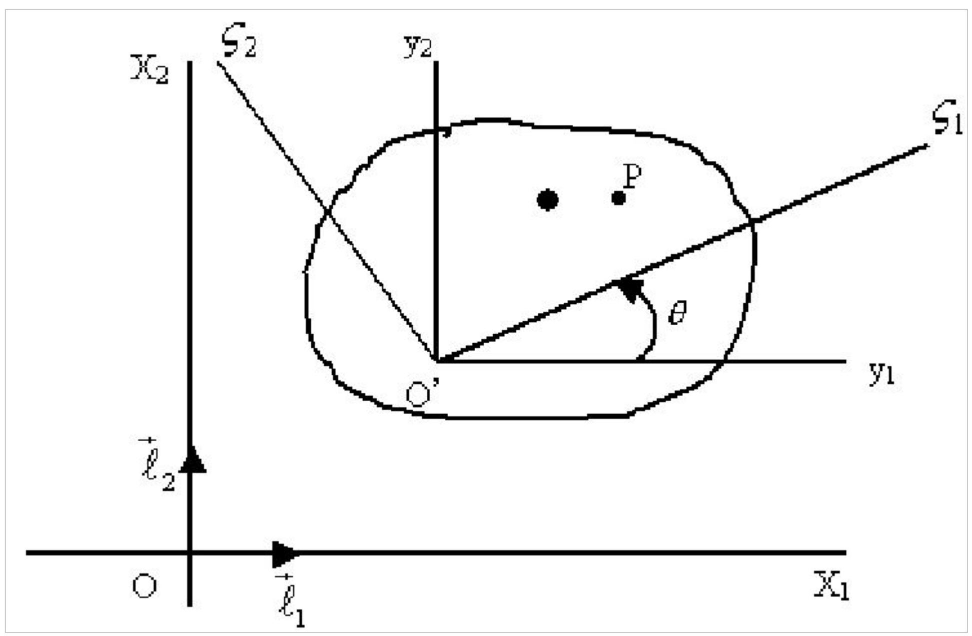


Рис.50.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ МЦС

- Мгновенный центр скоростей (МЦС) – точка, связанная с телом, скорость которой в данный момент времени равна нулю.

Положение S определяется тремя параметрами:

1) 2 – е координаты точки O',

2) θ - угол поворота жёстко связанных осей (рис. 50).

Для точки P в плоскости (ς_1, ς_2):

$\vec{V} = \vec{V}' + [\vec{\omega} \times \vec{r}]$, где $\vec{r} = \overline{O}'\vec{P}$.

Или (совместив O' с O):

$$\vec{V} = \vec{V}' + \begin{vmatrix} \vec{\ell}_1 & \vec{\ell}_2 & \vec{\ell}_3 \\ 0 & 0 & \omega \\ x_1 & x_2 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} V_1 = V_1' - \omega \cdot x_2 \\ V_2 = V_2' - \omega \cdot x_1 \end{cases} \quad (A).$$

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ МЦС (продолжение)

- Так как $\vec{\omega} \perp \vec{V}' \Rightarrow \exists$ точка в каждый момент времени, в которой скорость в этот момент равна нулю.
  Пусть это O*(x1*, x2*).

$$\text{Тогда: (B)} \begin{cases} O = V_1' - \omega \cdot x_2^* \\ O = V_2' + \omega \cdot x_1^* \end{cases} \Rightarrow O^*\left(x_1^* = -\frac{V_2'}{\omega}, x_2^* = \frac{V_1'}{\omega} \right)$$

То есть если $\omega \neq 0$, то $\exists$ единственная точка, скорость которой равна нулю. Вычитая (B) из (A) получим:

$$\begin{cases} V_1 = \omega(x_2^* - x_2) = -\omega(x_2 - x_2^*) \\ V_2 = \omega(x_1 - x_1^*) \end{cases}$$

Если поместить начало координат в точку O*, то *в этот момент времени* распределение скоростей точек будет таким же, как во вращательном движении вокруг неподвижной оси.

Точка O* называется центром мгновенного вращения, или мгновенным центром скоростей.

ПРИМЕР ОПРЕДЕЛЕНИЯ МЦС

Пример: нахождение центра мгновенного вращения, если известно направление скоростей двух точек тела (рис. 51).

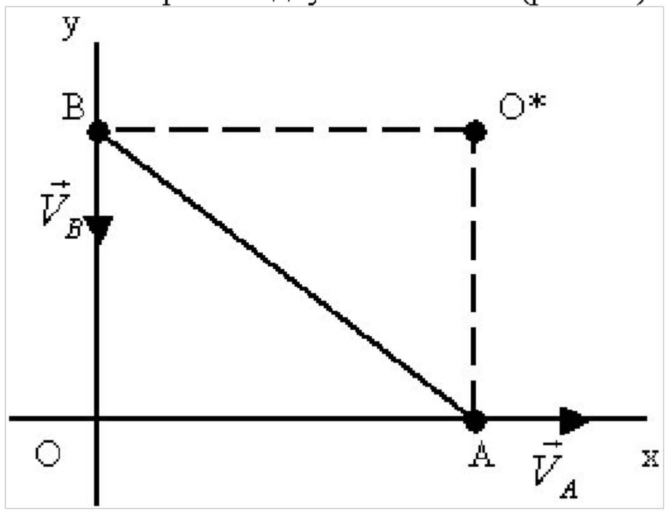


Рис.51.

Обратное рассуждение:

Если центр найден, то все скорости направлены $\perp$ радиусу - вектору. Поэтому (обратно) для нахождения центра надо проводить $\perp$ к скоростям до пересечения.

Пример: палочка АВ = *l* скользит по прямым Ох и Оу.

По формуле Ривальса можно найти распределение ускорений, мгновенный центр ускорений, а так же вычислить ускорение центра мгновенного вращения (и скорость мгновенного центра ускорений).

Сложное движение точки

- Введение систем координат.

Для описания движения введём неподвижную и подвижную системы координат.

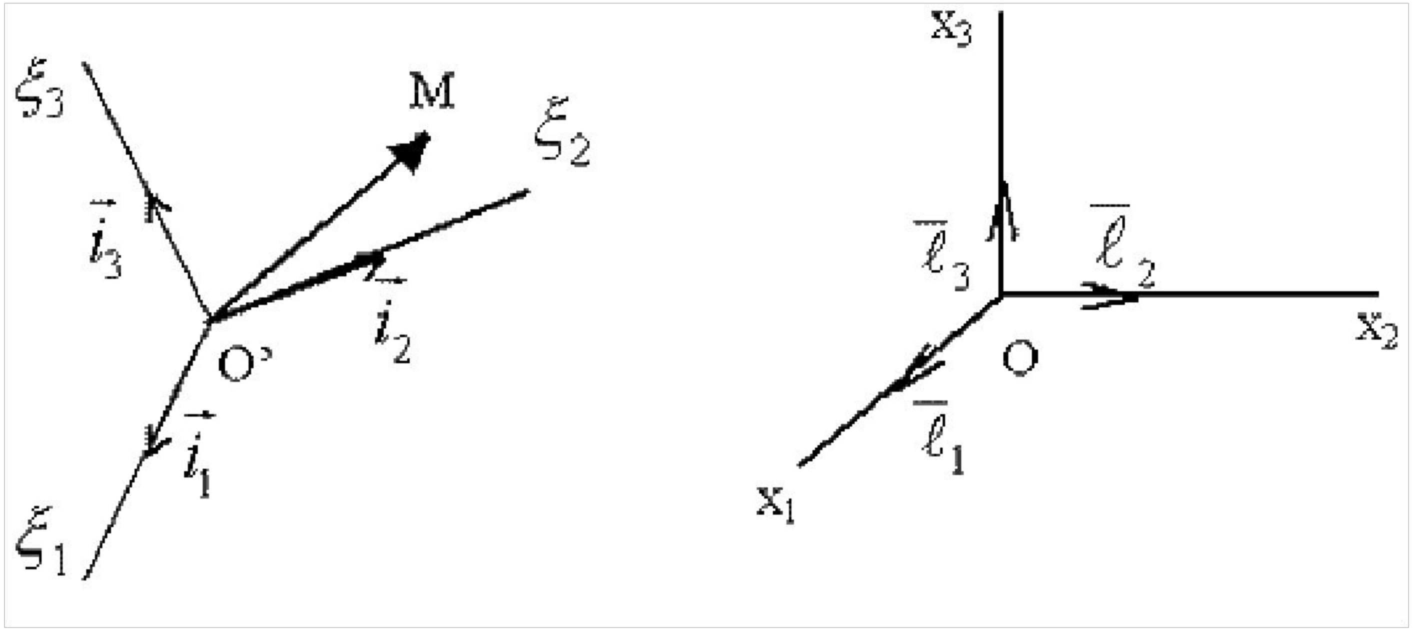


Рис. 52.

Движение в подвижной системе координат

•

Рассмотрим движение точки М в подвижной системе отсчета ξ_1, ξ_2, ξ_3 (рис. 52). Для этого задают:

1) $\bar{r} = \sum_{s=1}^{3} \vec{i}_s \xi_s$, где $\vec{i}_s$ - орты подвижной системы.

2) Движение системы ξ_s относительно неподвижных осей.

Пусть $\overrightarrow{OM} = \vec{R}, \overrightarrow{OO'} = \vec{R}' \Rightarrow \vec{R} = \vec{R}' + \vec{r}$

Найдем скорость точки М в неподвижной системе (дифференцированием):

$$\frac{d\bar{R}}{dt} = \frac{d\bar{R}'}{dt} + \frac{d\bar{r}}{dt}.$$

Очевидно:

$\dfrac{d\vec{R}}{dt} = \vec{V}$ - искомая скорость;

$\dfrac{d\vec{R}'}{dt} = \vec{V}'$ - скорость начала подвижной системы.

Определение относительной скорости

Найдём $\frac{d\bar{r}}{dt}$ с учётом $\bar{i}_s = \bar{i}_s(t)$, $\xi_s = \xi_s(t)$ $\bar{i}_s = \bar{i}_s(t)$ $\xi_s = \xi_s(t)$

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \sum_{s=1}^{3} \xi_s \frac{d\bar{i}_s}{dt} + \sum_{s=1}^{3} \bar{i}_s \frac{d\xi_s}{dt}$$

1) $\sum_{s=1}^{3} \xi_s \frac{d\bar{i}_s}{dt} = \sum_{s=1}^{3} \xi_s [\bar{\omega} \times \bar{i}_s] = [\bar{\omega} \times \bar{r}]$

$\left\{ \frac{d\bar{i}_s}{dt} = [\bar{\omega} \times \bar{i}_s] \right.$, где $\bar{\omega}$ - мгновенная угловая скорость вращения подвижной системы отсчета по формуле Эйлера

2) $\sum_{s=1}^{3} \bar{i}_s \frac{d\xi_s}{dt} = \frac{\tilde{d}\bar{r}}{dt}$ - назовем **<u>относительной производной</u>**

Итак:

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = [\bar{\omega} \times \bar{r}] + \frac{\tilde{d}\bar{r}}{dt} \Rightarrow \vec{V} = \vec{V}' + [\bar{\omega} \times \bar{r}] + \frac{\tilde{d}\bar{r}}{dt}$$

Если $\xi_s = const$, тт $\frac{\tilde{d}\bar{r}}{dt} = 0$ (т. е. нет относительного движения):

Поэтому:

$\vec{V}_{отн.} = \sum_{s=1}^{3} \bar{i}_s \xi_s$ - **<u>относительная скорость.</u>**

Определение абсолютной скорости

•

$$\vec{V}_{отн.} = \sum_{s=1}^{3} \bar{i}_s \xi_s$$

- **<u>относительная скорость.</u>**

<u>Переносная скорость</u> (навязывается движением системы):

$$\vec{V}_{пер} = \vec{V}' + [\overline{\omega} \times \bar{r}]$$

Переносная скорость – это не скорость самой точки, а скорость того места, где в данный момент времени находится точка М.

Окончательно абсолютная скорость определяется выражением:

$$\vec{V} = \vec{V}_{пер} + \vec{V}_{отн}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ АБСОЛЮТНОГО УСКОРЕНИЯ

- Дифференцируем:

$$\vec{V} = \vec{V}_{пер} + \vec{V}_{отн}:$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\vec{V}_{пер}}{dt} + \frac{d\vec{V}_{отн}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{V}_{пер}}{dt} = \{\vec{V}_{пер.} = \vec{V}' + \vec{\omega} \times \vec{r}\} = \frac{d\vec{V}'}{dt} + \left[\frac{d\overline{\omega}}{dt} \times \bar{r}\right] + \left[\overline{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt}\right]$$

где $\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{a}'$ - ускорение точки O'

$$\left[\overline{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt}\right] = \left\{\frac{d\bar{r}}{dt} = \left[\overline{\omega} \times \bar{r}\right] + \frac{\tilde{d}\breve{\bar{r}}}{dt}\right\} = \left[\overline{\omega} \times \left[\overline{\omega} \times \bar{r}\right]\right] + \left[\overline{\omega} \times \frac{\tilde{d}\breve{\bar{r}}}{dt}\right] =$$

$$= \omega^2 \bar{l} + \left[\overline{\omega} \times \vec{V}_{отн}\right]$$

здесь $\bar{l}$ - вектор от точки М к мгновенной оси под прямым углом (см. формулу Ривальса)

$$\frac{d\vec{V}_{отн}}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{s=1}^{3} \bar{i}_s \dot{\xi}_s = \sum_{s=1}^{3} \frac{d\bar{i}_s}{dt}\dot{\xi}_s + \sum_{s=1}^{3} \bar{i}_s \ddot{\xi}_s$$

$$\sum_{s=1}^{3} \frac{d\vec{i}_s}{dt}\dot{\xi}_s = \left\{\frac{d\vec{i}_s}{dt} = \left[\vec{\omega} \times i_s\right]\right\} = \left[\vec{\omega} \times \vec{V}_{отн}\right]$$

Формула Кориолиса

- $$\vec{a}_{отн} = \frac{\tilde{d}\tilde{\vec{V}}_{отн}}{dt} = \sum_{s=1}^{3} \bar{i}_s \ddot{\xi}_s$$ - **относительное ускорение** (равно 0, если точка М движется в подвижной системе отсчета прямолинейно и равномерно).

$$\vec{a} = \frac{dV}{dt} = \vec{a}' + \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}\right] + \omega^2 \vec{l} + 2\left[\vec{\omega} \times \vec{V}_{отн}\right] + \vec{a}_{отн}$$

Переносное ускорение – определяется как ускорение того места в подвижной системе отсчета, в которой точка М находится в рассматриваемый момент времени; вычисляется по формуле Ривальса:

$$\vec{a}_{пер} = \vec{a}' + \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}\right] + \omega^2 \vec{l}$$

Ускорение Кориолиса: $\vec{a}_{кор} = 2\left[\vec{\omega} \times \vec{V}_{отн}\right]$

Половина ускорения Кориолиса получена при дифференцировании по времени переносной скорости, а вторая половина – при дифференцировании относительной скорости.

$$\vec{a} = \vec{a}_{пер} + \vec{a}_{кор} + \vec{a}_{отн}$$ - формула Кориолиса.

Соколов А.П.
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
(часть 3)

для студентов ЭНИН

направления 140100

ТЕПЛОЭНЕРГЕТИКА

ДИНАМИКА ТОЧКИ

- *Динамикой* называется та часть, в которой рассматриваются влияние сил на состояние движения материальных объектов.

  В этом разделе в качестве моделей реальных тел принимается материальная точка

  Законы Ньютона. Правило сложения сил.

  Рассмотрим движение материальной точки (рис. 53) в инерциальной системе отсчёта под действием сил, обусловленных взаимодействием точек с другими точками и телами (т. е. возникающих в результате взаимодействия материальных объектов).

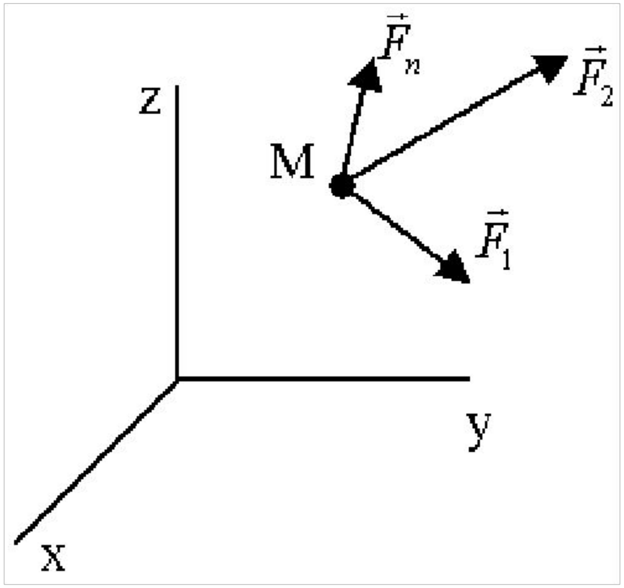


Рис.53.

Меры движения

- *Заметим, что при движении в неинерциальной системе отсчёта относительные движения частично определяются движением самой системы отсчёта.*

  Уравнения движения составляются на основе законов Ньютона.

  Трактат «Математические начала натуральной философии»:

  1687 г. – год возникновения *теоретической механики.*

  Законы Ньютона – идеализированные законы природы, но для практики это допустимо в очень широких пределах.

  Введём *меры движения*.

  Количество движения – равно произведению массы m на вектор скорости точки:

  $$\vec{Q} = m \cdot \vec{V},$$

  где m = const > 0 – мера инертности материи.

  Момент количества движения, относительно начала координат (рис. 54):

  $$\vec{G} = [\vec{r} \times m\vec{V}].$$

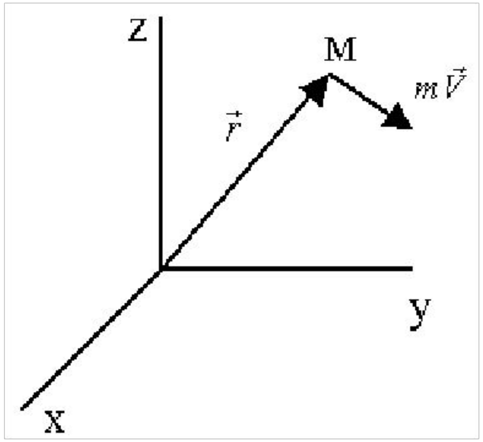


Рис.54.

Кинетическая энергия материальной точки

•

Кинетическая энергия материальной точки:

$$T = \frac{mV^2}{2}$$ (скаляр)

В дальнейшем покажем, что в ряде случаев движение точки наглядней описывается через $\vec{G}$ или T.

При формулировании законов Ньютона обозначаем:

$\vec{f}_{\alpha\beta}$ - сила взаимодействия между точками M_α и M_β;

$\vec{F}$- суммарная сила, приложенная к точке M , взаимодействующей со многими точками.

ЗАКОНЫ НЬЮТОНА

•

Первый закон Ньютона: материальная точка пребывает в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения относительно инерциальной системы отсчёта до тех пор, пока действующие на неё силы не изменят это состояние.

То есть изолированная точка либо покоится, либо движется прямолинейно и равномерно. Причина изменения движения – вне самой точки.

Второй закон Ньютона: производная по времени от количества движения материальной точки геометрически равна силе, приложенной к точке. Или, при постоянной массе, произведение массы точки на её абсолютное ускорение геометрически равно приложенной к материальной точке силе, т. е.

$\dfrac{d}{dt}(m\vec{V}) = \vec{F}$ или $m\dfrac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}$, если m = const.

Связь кинематической величины – ускорения с динамической величиной – силой через коэффициент пропорциональности – массу.

ТРЕТИЙ ЗАКОН НЬЮТОНА

- **<u>Третий закон Ньютона:</u>** две любые материальные точки взаимодействуют друг с другом с силами, направленными по прямой, соединяющей эти точки, равными по величине и противоположно направленными (рис. 48).

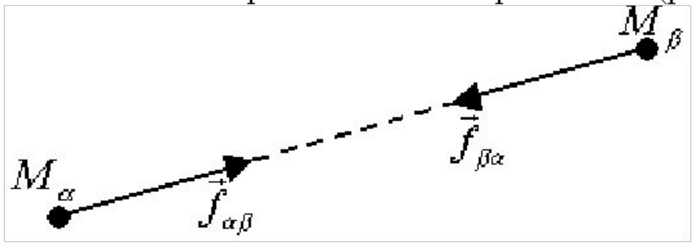


Рис.48.

Рассмотрим воздействие точки М1 с остальными точками (рис. 56).

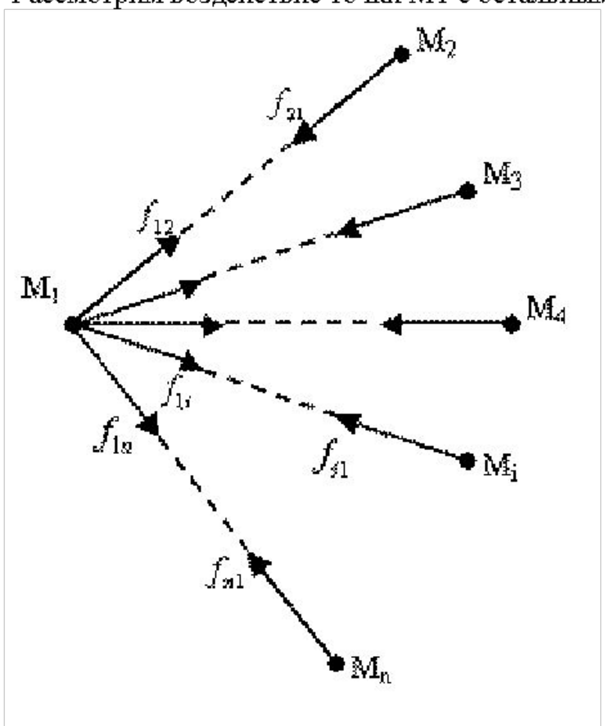


Рис. 49.

ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦИИ

- Для $\vec{a}_{1i}$ имеем ускорение:

$$m_1\vec{a}_{12} = \vec{f}_{12}$$
$$m_1\vec{a}_{13} = \vec{f}_{13}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$m_1\vec{a}_{1n} = \vec{f}_{1n}$$

Принцип независимости действия сил: ускорение $\vec{a}_{1i}$, вызываемое силой f_{1i}, определяется только этой силой и не зависит от других сил.

Следствие:

$$m_1\sum_{i=2}^{n}\vec{a}_{1i} = \sum_{i=2}^{n}\vec{f}_{1i}$$; обозначая $$\sum_{i=2}^{n}\vec{a}_{1i} = \vec{a}_1; \quad \sum_{i=2}^{n}\vec{f}_{1i} = \vec{F}_1;$$

$$\boldsymbol{m_1\vec{a}_1 = \vec{F}_1}$$

Геометрическая сумма ускорений $\vec{a}_{1i}$, вызываемых силами взаимодействия точки М1 с остальными точками, пропорциональна геометрической сумме сил взаимодействия – **правило параллелограмма для сложения сил.**

ИДЕАЛИЗАЦИЯ СИЛ

•

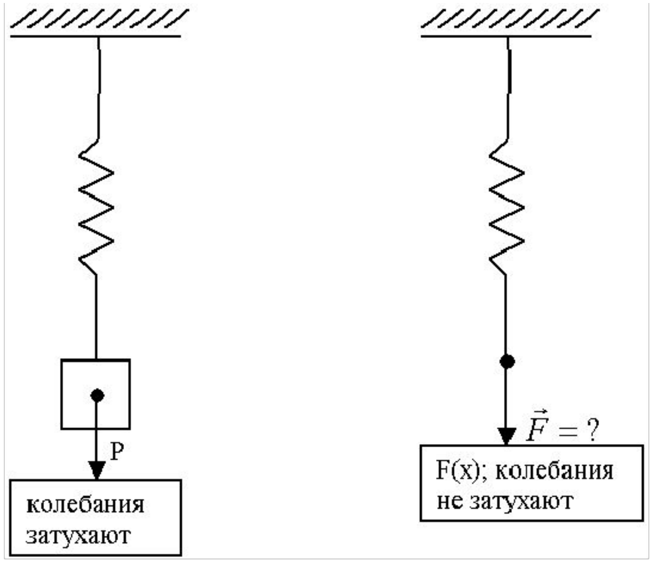


Рис.57.

Идеализация: силы зависят только от координат точки, от первых производных и явно от времени: $\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$

На практике – допустимо.

Развитие физики привело к изменению некоторых устаревших представлений и к выяснению границ области, в пределах которой справедлива механика Ньютона: его понятие об абсолютном пространстве заменено теперь понятием инерциальной системы отсчёта; установлено, что механика Ньютона – классическая механика – неприменима, если относительные скорости точек сравнимы со скоростью света [это область релятивистской или эйнштейновской механики]; неприменима механика классическая и к изучению явлений микромира [это область квантовой механики]. Но они основаны на классической механике. В остальных областях => классическая механика даёт достаточно точные результаты.

ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ТОЧКИ

Рассмотрим движение свободной материальной точки в инерциальной системе отсчёта в декартовых координатах. Из 2-го закона Ньютона:

- $$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = F_z$$

причём, Fx, Fy, Fz – могут зависеть от координат, первых производных, времени: $\vec{F}\left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t\right)$.

Если известен закон движения (например из кинематики):

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t),$$

то => Fx(t), Fy(t), Fz(t). Это *первая (прямая) задача динамики точки: по известному закону движения точки определить силу, вызвавшую это движение*

Если известна сила, то для исследования движения необходимо интегрировать дифференциальные уравнения – это *вторая (обратная) задача динамики точки.*

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ МОМЕНТА КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

- *Формы дифференциальных уравнений движения*

  1) 2-ой закон Ньютона – для количества движения.

  2) Умножим на $\vec{r}$ (векторно):

$$m\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} \Rightarrow \left[\vec{r} \times m\frac{d\vec{V}}{dt}\right] = \left[\vec{r} \times \vec{F}\right]$$

или $$\frac{d}{dt}\left[\vec{r} \times m \cdot \vec{V}\right] = \left[\vec{r} \times \vec{F}\right]$$ - *уравнение момента количества движения.*

Теорема об изменении кинетической энергии

Производная по времени от момента количества движения геометрически равна моменту силы.

- Подробная запись (координатная):

$$\frac{d}{dt}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ m\dot{x} & m\dot{y} & m\dot{z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

3) Умножим скалярно на элементарные перемещения $d\vec{r} = \vec{V} \cdot dt$:

$$\left(m\frac{d\vec{V}}{dt}\vec{V} \cdot dt \right) = \left(\vec{F} \cdot d\vec{r} \right).$$

$$d\left(\frac{mV^2}{2} \right) = \left(\vec{F} \cdot d\vec{r} \right)$$

- *уравнение кинетической энергии.*

Дифференциал кинетической энергии точки равен элементарной работе суммы сил, приложенных к точке, на действительном перемещении.

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

О первых интегралах (законы сохранения).

Из дифференциальных уравнений: функция координат, их производных по времени, являющаяся постоянной в силу уравнений (то есть её производная по времени равна нулю) => называется первым интегралом.

Получим такие условия.

Если $f_j(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}; t)$ - первый интеграл, то $f_j = C_j$ и $\frac{df_j}{dt} = 0$

- 1) Если Fx = 0, то $m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \Rightarrow m \cdot \dot{x} = const$, $Q_x = const$ - интеграл количества движения (*закон сохранения количества движения*).

  2) Если $x \cdot F_y - y \cdot F_x = 0$ (то есть проекция момента силы на ось z),

  то из

$$\frac{d}{dt}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ m\dot{x} & m\dot{y} & m\dot{z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \Rightarrow m \cdot (x\dot{y} - y\dot{x}) = const$$

,

$G_z = const$ - интеграл момента количества движения (*закон сохранения момента количества движения*).

3) Получим интеграл энергии.

$$d\left(\frac{m \cdot \upsilon^2}{2}\right) = (\vec{F} \cdot d\vec{r})$$

.

С учётом потенциала силового поля

- Пусть правая часть есть полный дифференциал некоторой скалярной функции $\Pi(x, y, z, t)$ – *потенциала силового поля*.

Тогда:

$F_x = \frac{\partial \Pi}{\partial x}$, $F_y = \frac{\partial \Pi}{\partial y}$, $F_z = \frac{\partial \Pi}{\partial z}$.

$$d\Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Pi}{\partial y}dy + \frac{\partial \Pi}{\partial z}dz + \frac{\partial \Pi}{\partial t}dt$$

Работа:

$$\left(\vec{F} \cdot d\vec{r}\right) = F_x dx + F_y dy + F_z dz = \frac{\partial \Pi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Pi}{\partial y}dy + \frac{\partial \Pi}{\partial z}dz = d\Pi$$

.

Чтобы $\left(\vec{F}d\vec{r}\right)$ было полным дифференциалом:

1) $\frac{\partial \Pi}{\partial t} = 0$ - то есть поле *стационарно* (не зависит от t).

2) $\exists \Pi$, $\Pi(x, y, z)$ с условиями из высшей математики:

С учётом уравнения кинетической энергии в полных дифференциалах

- $$\frac{\partial^2\Pi}{\partial y\partial z}=\frac{\partial^2\Pi}{\partial z\partial y};\quad \frac{\partial^2\Pi}{\partial z\partial x}=\frac{\partial^2\Pi}{\partial x\partial z};\quad \frac{\partial^2\Pi}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2\Pi}{\partial y\partial x}$$

или

$$\frac{\partial F_z}{\partial y}=\frac{\partial F_y}{\partial z};\quad \frac{\partial F_x}{\partial z}=\frac{\partial F_z}{\partial x};\quad \frac{\partial F_y}{\partial x}=\frac{\partial F_x}{\partial y}$$

или

$$rot\vec{F}\equiv\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}=0$$

Иначе: если $rot\vec{F}=0$ и $\frac{\partial\vec{F}}{\partial t}=0$, то $\left(\vec{F}d\vec{r}\right)=d\Pi$ и уравнение кинетической энергии будет в полных дифференциалах:

$$d\left(\frac{m\upsilon^2}{2}\right)=d\Pi.$$

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ

- Интегрируя:

$$\frac{m\upsilon^2}{2} = \Pi(x, y, z) + const$$

.

Введём потенциальную энергию:

$$\Upsilon(x, y, z) = -\Pi(x, y, z)$$

.

Тогда: $$\frac{m\upsilon^2}{2} + \Upsilon(x, y, z) = const \equiv E_0$$ - интеграл энергии (*закон сохранения механической энергии*).

Если силовое поле потенциально и стационарно, то сумма кинетической и потенциальной энергий свободной материальной точки постоянна.

E0 – механическая энергия; находится из начальных условий.

Энергия сохраняется, то есть консервируется => поле называется *консервативным*.

РАБОТА СИЛ КОНСЕРВАТИВНОГО ПОЛЯ

- Покажем, что работа сил консервативного поля не зависит от вида траектории, а равна разности значений функции П в конце и начале перемещения (рис.58).

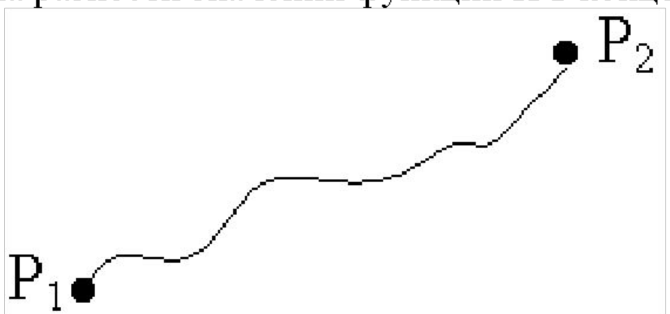


Рис.58.

Работа:

$$\int_{\bigcup P_1 P_2} \left(\vec{F} d\vec{r}\right) = \int_{P_1}^{P_2} d\Pi = \Pi\Big|_{P_2} - \Pi\Big|_{P_1},$$

что и требовалось доказать.

Работа сил консервативного поля на замкнутом перемещении

•

$$\int\limits_{\bigcup P_2P_1}\left(\vec{F}d\vec{r}\right)=\int\limits_{P_2}^{P_1}d\Pi=\Pi\Big|_{P_1}-\Pi\Big|_{P_2}.$$

Работа сил консервативного поля на замкнутом перемещении равна нулю (рис.59).

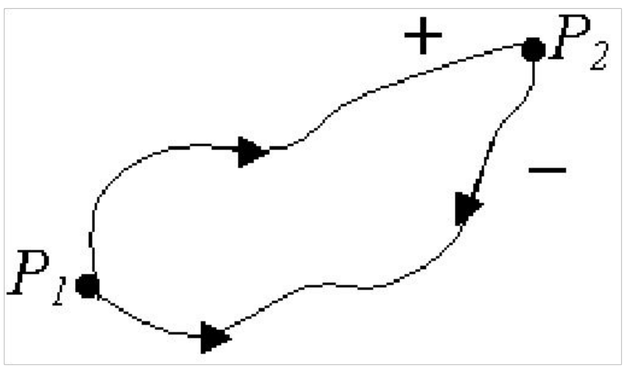


Рис.59.

Решение уравнений движения для частных случаев силовых полей

•

1) Сила зависит только *от времени* – поле однородно, но не стационарно.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x(t)$$.

Тогда:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{m}\int\limits^{t} F_x(\xi)\cdot d\xi + C_1$$;

$$x = \frac{1}{m}\int\limits^{t} d\eta \int\limits^{\eta} F_x(\xi)\cdot d\xi + C_1\cdot t + C_2$$.

Аналогично, для y и z.

2) Проекции силы зависят только от соответствующих координат.

- $$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x(x)$$.

Умножая на dx и интегрируя:

- $$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{2}{m}\int_{x_0}^{x} F_x(\xi)\cdot d\xi + C_1$$.

Дифференцируем снова для проверки:

$$2\cdot\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{2}{m}F_x(x)$$; $$\frac{dx}{dt} \leftrightarrow \frac{dt}{dx}$$.

Положим:

$$\frac{2}{m}\int_{x_0}^{x} F_x(\xi)\cdot d\xi + C_1 = \Phi(x)$$.

Тогда:

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\Phi(x)}$$

(знак берётся из начальных условий).

Разделяя переменные:

$$t = t_0 \pm \int_{x_0}^{x}\frac{d\xi}{\sqrt{\Phi(\xi)}} \to x(t)$$.

•

3) Проекция силы зависит лишь *от проекции скорости* на эту же ось.

•

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x\left(\frac{dx}{dt}\right).$$

Обозначая:

$$\frac{dx}{dt} = U \Rightarrow \frac{dU}{dt} = \frac{1}{m}F_x(U).$$

Разделяя переменные:

$$t = t_0 + m\int_{U_0}^{U}\frac{dU}{F(U)} \Rightarrow \begin{array}{l} U = \varphi(t) \\ \dfrac{dx}{dt} = \varphi(t) \end{array} \Rightarrow x = \int_t \varphi(\xi)\cdot d\xi + C_1.$$

Таким образом, в каждом из трёх частных случаев силовых полей по заданным силе, массе и начальным условиям определены выражения для скорости и ускорения точки.

ДИНАМИКА МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

- Рассмотрим движение n свободных материальных точек относительно инерциальной системы отсчёта (рис. 60).

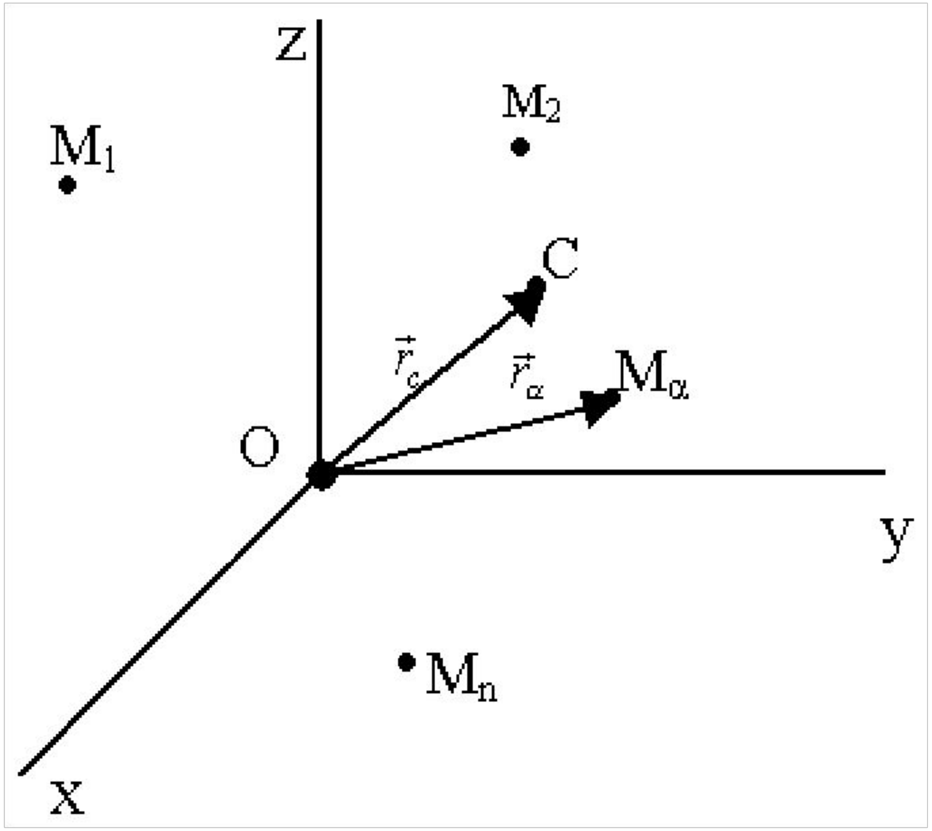


Рис.60.

МАССОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМЫ

- $M_\alpha(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha)$
  m_α - масса точки M_α.
  Масса всей системы:
  $$M = \sum_{\alpha=1}^{n} m_\alpha.$$
  Центром масс системы назовём точку C, радиус – вектор которой равен
  $$\vec{r}_c = \frac{\sum_{\alpha=1}^{n} m_\alpha \vec{r}_\alpha}{M},$$
  где $\vec{r}_\alpha = \overline{OM}_\alpha$.

ОСНОВНЫЕ МЕРЫ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

- 1. Суммарное количество движения системы (геометрическая сумма количества движения материальных точек).

$\vec{Q} = \sum_{\alpha=1}^{n} m_\alpha \vec{V}_\alpha$, где $\vec{V}_\alpha$ - скорость точки M_α.

Рассмотрим систему точек с постоянными массами => дифференцируя $\vec{r}_c$:

$$\frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{\sum_{\alpha=1}^{n} m_\alpha \frac{d\vec{r}_\alpha}{dt}}{M} \quad или \quad M\vec{V}_c = \sum_{\alpha=1}^{n} m_\alpha \vec{V}_\alpha;$$

где $\vec{V}_c$ - скорость центра масс.

Итак,

$$\vec{Q} = M\vec{V}_c$$

Количество движения системы материальных точек равно количеству движения массы всей системы, сосредоточенной в центре масс.

Кинетический момент и кинетическая энергия системы

•

2. Сумма моментов количества движения или кинетический момент системы:

$$\vec{G} = \sum_{\alpha=1}^{n} [\vec{r}_\alpha \times m_\alpha \vec{V}_\alpha]$$

.

$\vec{G}$ представляется в виде одночлена только в случае одинаковых скоростей всех точек системы.

3. Кинетическая энергия системы:

$$T = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{m_\alpha V_\alpha^2}{2}$$

Тоже не всегда представлена в одночленной форме.

СИЛЫ ВНЕШНИЕ И ВНУТРЕННИЕ

- Силы разделим на внешние и внутренние.

  Внешние силы действуют со стороны масс, не входящих в систему.

  Внутренние силы – силы взаимодействия между точками системы.

  Обозначим:

  $\vec{F}_\alpha^{(e)}$ - суммарная внешняя сила к точке M_α

  $\vec{F}_\alpha^{(i)}$ - суммарная сила взаимодействия точки M_α с остальными точками системы.

  Деление на внутренние и внешние силы условно.

  Получим некоторые свойства внутренних сил.

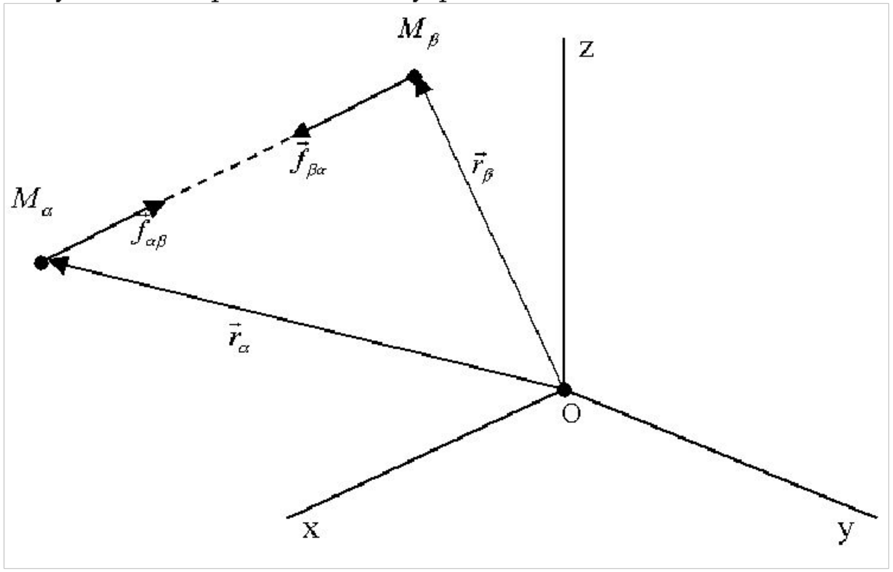


Рис.68.

Рассмотрим точки M_α и M_β (рис. 68).

СВОЙСТВА ВНУТРЕННИХ СИЛ

- Из 3 – го закона Ньютона:

$$\vec{f}_{\alpha\beta} = -\vec{f}_{\beta\alpha}.$$

Внутренняя сила на точку M_α:

$$\vec{F}_\alpha^{(i)} = \sum_{\beta\neq\alpha} \vec{f}_{\alpha\beta}.$$

Очевидно:

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \vec{F}_\alpha^{(i)} = 0, \sum_{\alpha=1}^{n} [\vec{r}_\alpha \times \vec{F}_\alpha^{(i)}] = 0.$$

Итак, сумма внутренних сил и сумма моментов внутренних сил равны нулю относительно любой точки и любой оси.

Сумма элементарных работ внутренних сил

Рассмотрим сумму *элементарных работ* внутренних сил.

- Пусть $\overline{M_\alpha M_\beta} = \vec{\ell}_{\alpha\beta}\rho_{\alpha\beta}$, где $\left|\vec{\ell}_{\alpha\beta}\right| = 1$, $\rho_{\alpha\beta}$ - расстояние между точками M_α, M_β

.

Работа на элементарных действительных перемещениях сил взаимодействия двух точек M_α, M_β:

$$(\vec{f}_{\alpha\beta} d\vec{r}_\alpha) + (\vec{f}_{\beta\alpha} d\vec{r}_\beta) = (\vec{f}_{\beta\alpha} d(\vec{r}_\beta - \vec{r}_\alpha)) = (\vec{f}_{\beta\alpha} d(\vec{\ell}_{\alpha\beta}\rho_{\alpha\beta})) = f_{\beta\alpha} d\rho_{\alpha\beta} = -f_{\alpha\beta}$$

.

[$f_{\beta\alpha}$ - проекция на $\vec{\ell}_{\alpha\beta}$, включающая в себя знак].

Обозначим сумму элементарных работ внутренних сил $A_d^{(i)}$:
(d – означает «на элементарных перемещениях»)

$$A_d^{(i)} = \sum_{\beta=1}^{n-1} \sum_{\substack{\alpha\rangle\beta \\ \alpha=2}}^{n} f_{\beta\alpha} d\rho_{\alpha\beta}$$

Общие (основные) теоремы динамики системы

•

1. Теорема об изменении количества движения системы.

Для точки M_α уравнение движения относительно инерциальной системы отсчёта:

$$m_\alpha \frac{d\vec{V}_\alpha}{dt} = \vec{F}_\alpha^{(e)} + \vec{F}_\alpha^{(i)}$$

Перенесём все векторы, не изменяя их направления, в центр масс и сложим геометрически:

$$\frac{d}{dt}\sum_{\alpha=1}^{n} m_\alpha \vec{V}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{n} \vec{F}_\alpha^{(e)}.$$

Производная по времени от количества движения системы свободных материальных точек равна геометрической сумме внешних сил. Это теорема об изменении количества движения системы.

Теорема о движении центра масс системы.

Так как $\sum_{\alpha=1}^{n} m_\alpha \vec{V}_\alpha = M\vec{V}_c$ то

$$M\frac{d\vec{V}_c}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{n} \vec{F}_\alpha^{(e)}.$$

Это уравнение движения центра масс системы материальных точек с массой, равной массе всей системы, к которой приложена сумма всех внешних сил (главный вектор внешних сил) или теорема о движении центра масс.

•

•

Теорема об изменении кинетического момента системы

Умножим уравнение движения точки M_α слева векторно на $\vec{r}_\alpha$ и геометрически сложим, перенося векторы в центр масс:

$$\frac{d}{dt}\sum_{\alpha=1}^{n}[\vec{r}_\alpha \times m_\alpha \vec{V}_\alpha] = \sum_{\alpha}[\vec{r}_\alpha \times \vec{F}_\alpha^{(e)}].$$

Теорема об изменении кинетического момента системы:

Производная по времени от кинетического момента системы свободных материальных точек равна сумме моментов всех внешних сил (главному моменту всех внешних сил).

Существенно: моменты количества движения и моменты сил вычисляются относительно общего неподвижного начала.

•

Теорема об изменении кинетической энергии системы

•

Умножая скалярно уравнение движения точки M_α на $d\vec{r}_\alpha = \vec{V}_\alpha dt$ и суммируя:

$$d\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{m_\alpha V_\alpha^2}{2} = \sum_{\alpha=1}^{n}(\vec{F}_\alpha^{(e)} d\vec{r}_\alpha) + \sum_{\alpha=1}^{n}(\vec{F}_\alpha^{(i)} d\vec{r}_\alpha)$$

или

$$d\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{m_\alpha V_\alpha^2}{2} = \sum_{\alpha=1}^{n}(\vec{F}_\alpha^{(e)} d\vec{r}_\alpha) + \sum_{\beta=1}^{n-1}\sum_{\substack{\alpha>\beta \\ \alpha=2}}^{n} f_{\beta\alpha} d\rho_{\alpha\beta}.$$

Теорема об изменении кинетической энергии системы:

Дифференциал кинетической энергии системы свободных материальных точек равен сумме элементарных работ всех внешних и внутренних сил.

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

- 1) Если равен нулю главный вектор внешних сил, то $\vec{V}_c$ = const, то есть центр масс системы свободных материальных точек движется равномерно и прямолинейно.
  2) Если главный момент внешних сил равен нулю, то сохраняется кинетический момент системы свободных материальных точек:
  $$\vec{G} \equiv \sum_{\alpha=1}^{n} [\vec{r}_\alpha \times m_\alpha \vec{V}_\alpha] = const$$.
  3) Если внешние и внутренние силы консервативны, то
  $$\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{m_\alpha V_\alpha^2}{2} = \Pi^{(e)} + \Pi^{(i)} + const$$
  или
  $$\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{m_\alpha V_\alpha^2}{2} + \upsilon^{(e)} + \upsilon^{(i)} = E_0$$
  Здесь:
  $\Pi^{(e)}$ - потенциал внешнего силового поля;
  $\Pi^{(i)}$ - потенциал взаимодействия точек;
  $\upsilon^{(e)} = -\Pi^{(e)}$ - потенциальная энергия системы точек во внешнем поле;
  $\upsilon^{(i)} = -\Pi^{(i)}$ - потенциальная энергия взаимодействующих точек.

УРАВНЕНИЯ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Пусть твёрдое тело вращается относительно неподвижной оси. Тогда уравнения движения значительно упрощаются.

- Действительно:

1) $\vec{G} = \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times m_{\alpha} \vec{V}_{\alpha}$ - кинетический момент.

Во вращательном движении $\vec{r} \perp \vec{V}$, поэтому $G = \sum_{\alpha} r_{\alpha} m_{\alpha} V_{\alpha}$.

Но из $\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r} \Rightarrow V = \omega \cdot r$.

Итак:

$$G = \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times m_{\alpha} \vec{V}_{\alpha} = \omega \sum_{\alpha} m_{\alpha} r_{\alpha}^2 = \omega J_z,$$

где $J_z = \sum_{\alpha} m_{\alpha} r_{\alpha}^2$ - момент инерции относительно оси вращения Z.

Уравнение движения:

$$\frac{d}{dt}(J_z \omega) = J_z \frac{d\omega}{dt} = J_z \ddot{\varphi} \Rightarrow$$

окончательно, $J_z \ddot{\varphi} = \sum_{k} mom_z F_k$.

КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

•

2) Кинетическая энергия:

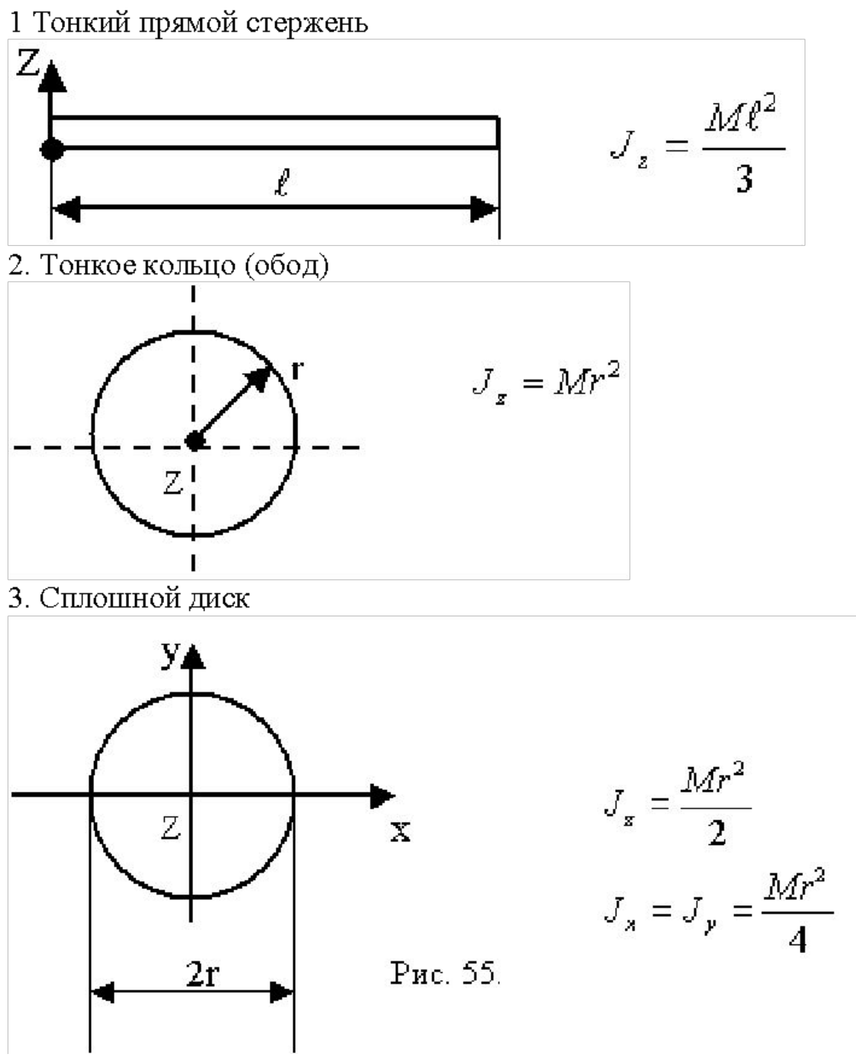
$$T = \sum_{\alpha} \frac{m_\alpha V_\alpha^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_{\alpha} m_\alpha r_\alpha^2 = \frac{\omega^2}{2} J_z.$$

Итак,

$$T = \frac{J_z \omega^2}{2}.$$

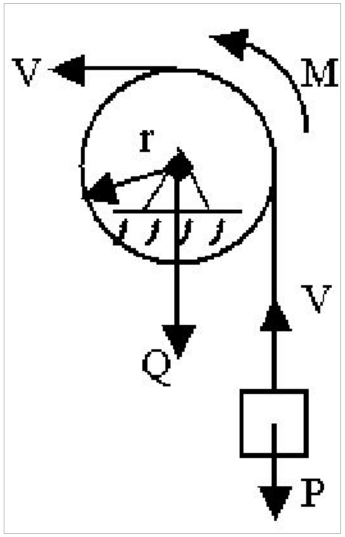
Моменты инерции некоторых тел

•



ПРИМЕР

•



Q – вес обода.
P – вес груза.
Найти a – ускорения груза P.

Рис.56.

По теореме об изменении кинетического момента системы:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{P}{g}Vr + \sum mVr\right) = M - \mathrm{P}r$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{P}{g}Vr + Vr\frac{Q}{g}\right) = M - \mathrm{P}r$$

$$\frac{r(P+Q)}{g}\cdot\frac{d}{dt}V = M - \mathrm{P}r \Rightarrow a = \frac{(M - \mathrm{P}r)\,g}{r(P+Q)}$$

СПАСИБО

ЗА ВНИМАНИЕ