Графическое решение задач линейного программирования

Задача линейного программирования с **двумя неизвестными** может быть решена графически

Замечание:
К такой форме может быть сведена и каноническая задача (с ограничениями в виде уравнений), когда число переменных ***n*** больше числа уравнений ***m*** на 2

Пусть задача линейного программирования задана в виде:

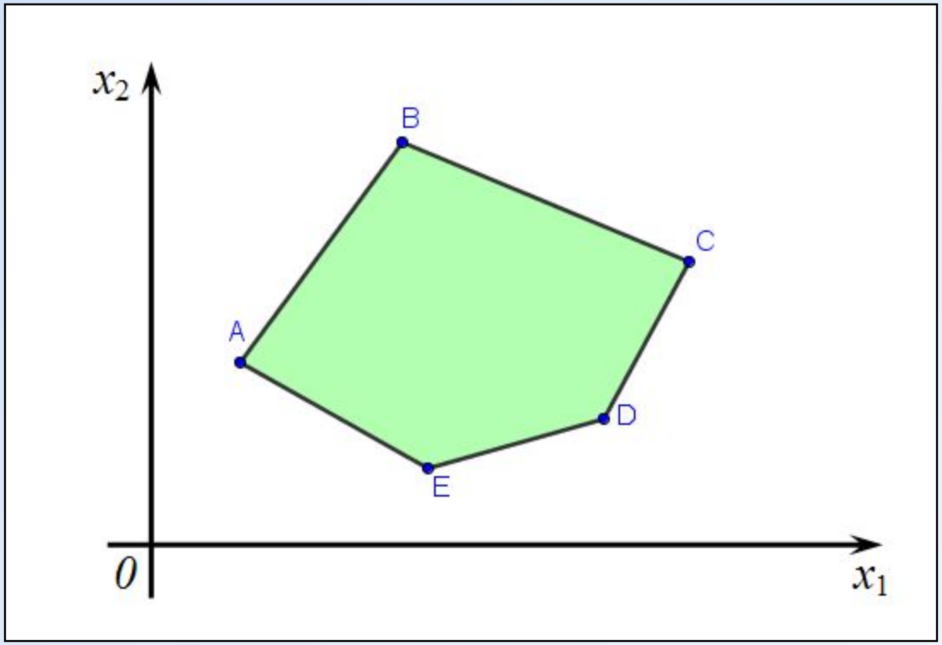
$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i, i = \overline{1,m} \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 \to max \ \ (min)$$

Алгоритм графического решения ЗЛП

1. Построить **область допустимых решений** (ОДР) в системе координат, заданную системой ограничений

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i, i = \overline{1,m} \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

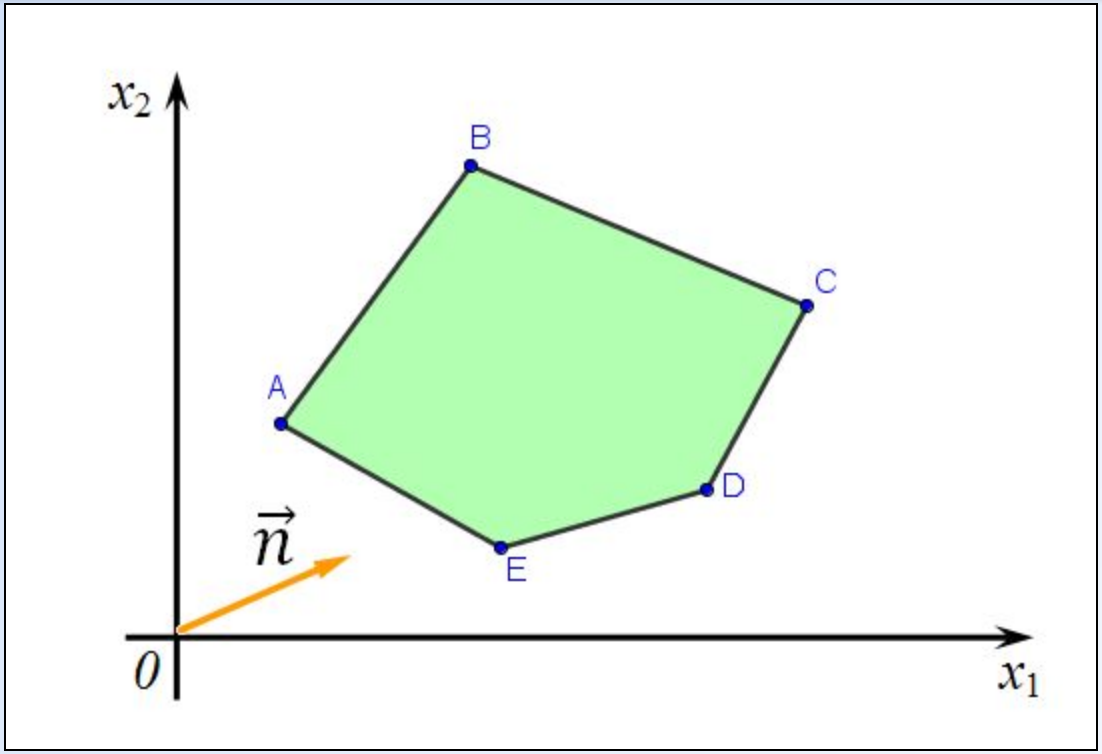


Алгоритм графического решения ЗЛП

2. Построить градиент целевой функции

$F = c_1x_1+c_2x_2$

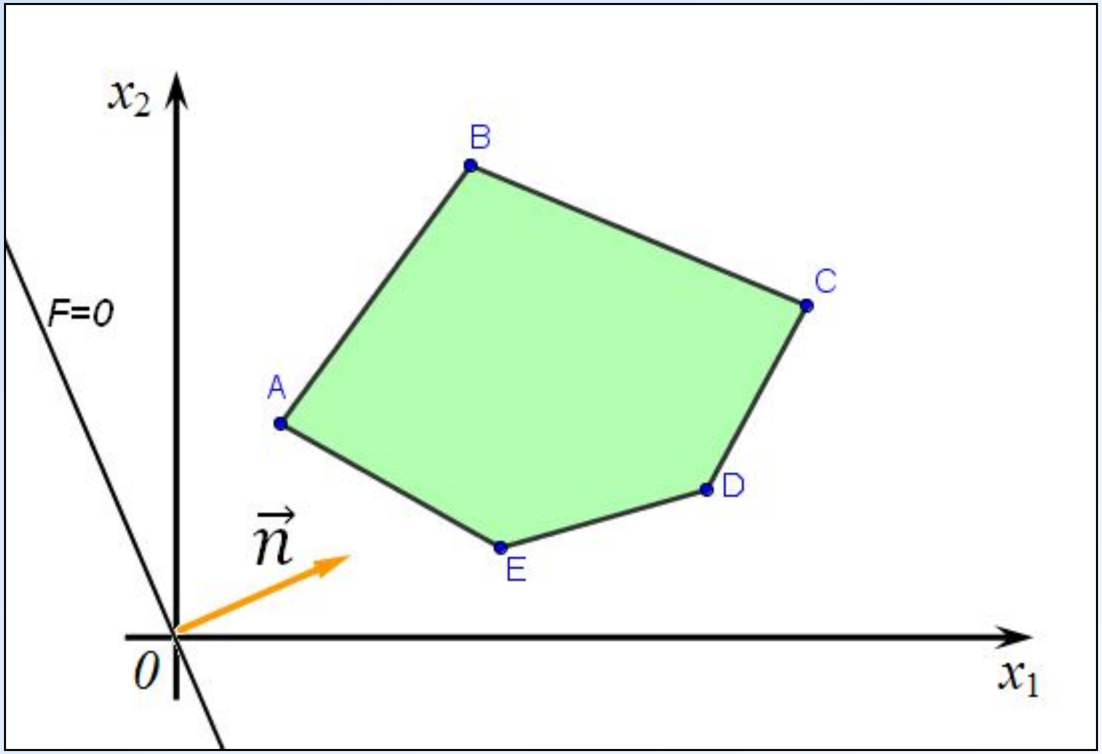
(**вектор нормали** к прямой $c_1x_1+c_2x_2 = F$)



$\vec{n}(c_1; c_2)$

Алгоритм графического решения ЗЛП

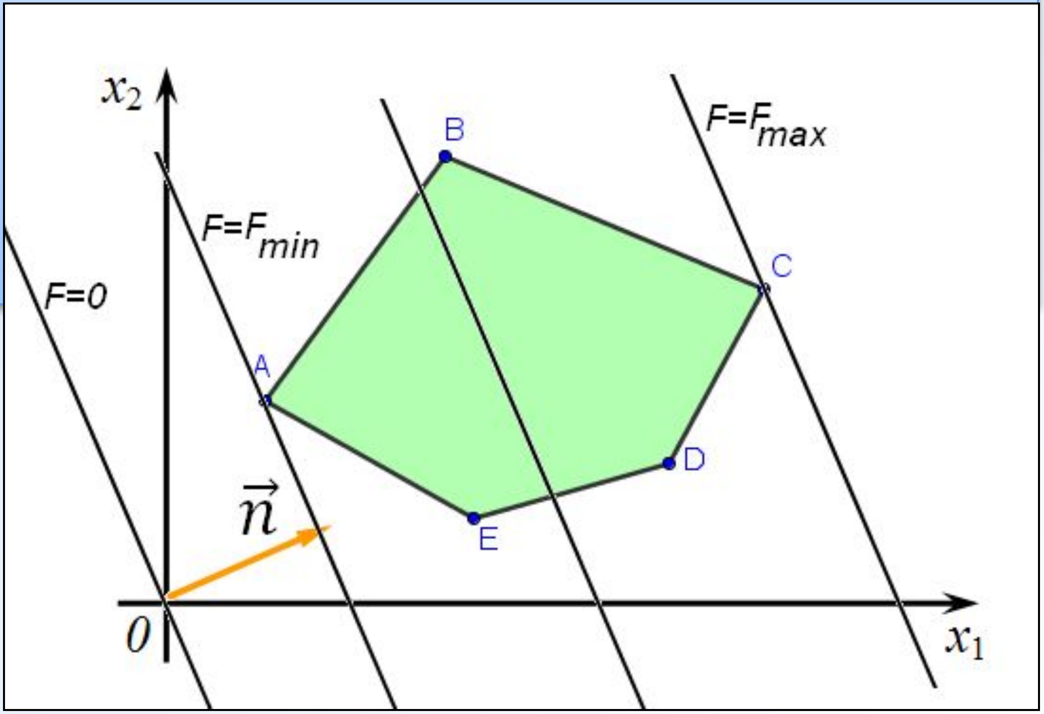
3. Построить **опорную прямую**, перпендикулярную вектору нормали – линию уровня целевой функции



Алгоритм графического решения ЗЛП

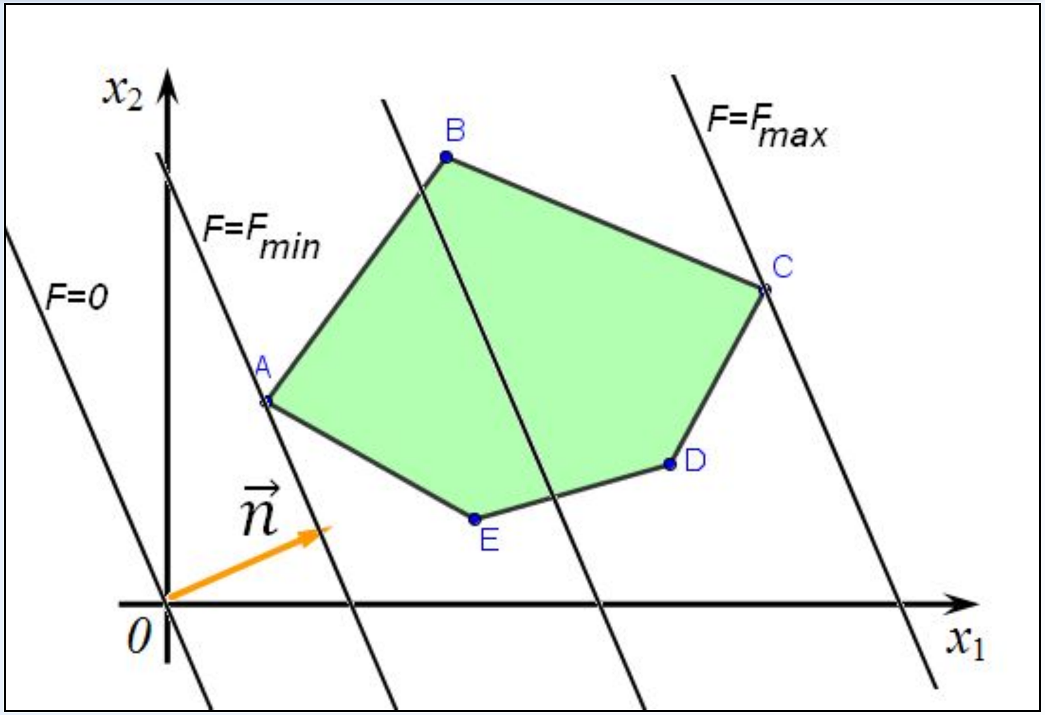
4. Перемещая опорную прямую в направлении вектора нормали, определить «**точку входа**» и «**точку выхода**» (первая встретившаяся опорной прямой точка из ОДР и последняя встретившаяся опорной прямой точка из ОДР соответственно)

В точке входа: F → min
В точке выхода: F → max



Алгоритм графического решения ЗЛП

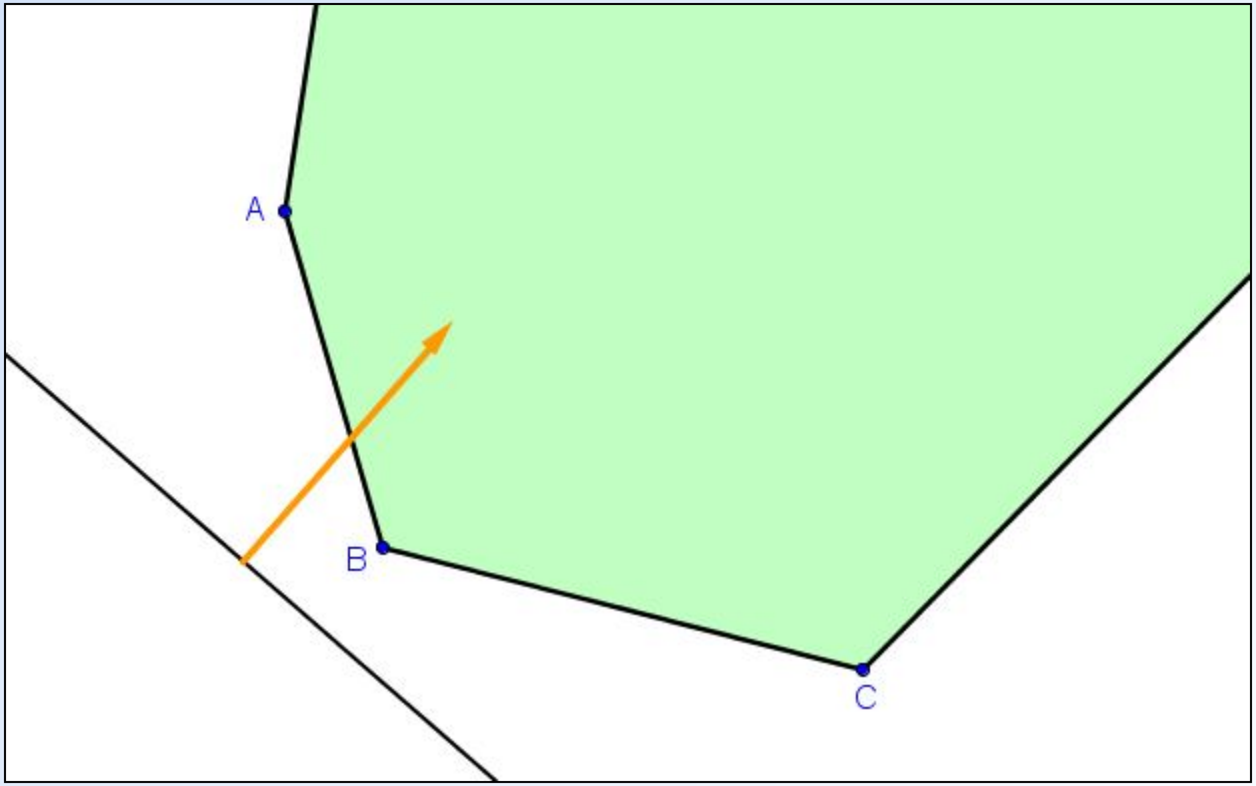
5. Определить координаты оптимальной точки (точки входа или точки выхода) и найти значение целевой функции в ней



Замечание:
Оптимальная точка является угловой точкой выпуклой области допустимых решений

Частные случаи

Минимальное значение целевая функция достигает в точке **B**: $F_{min} = F(B)$
Максимальное значение: $F_{max} = \infty$

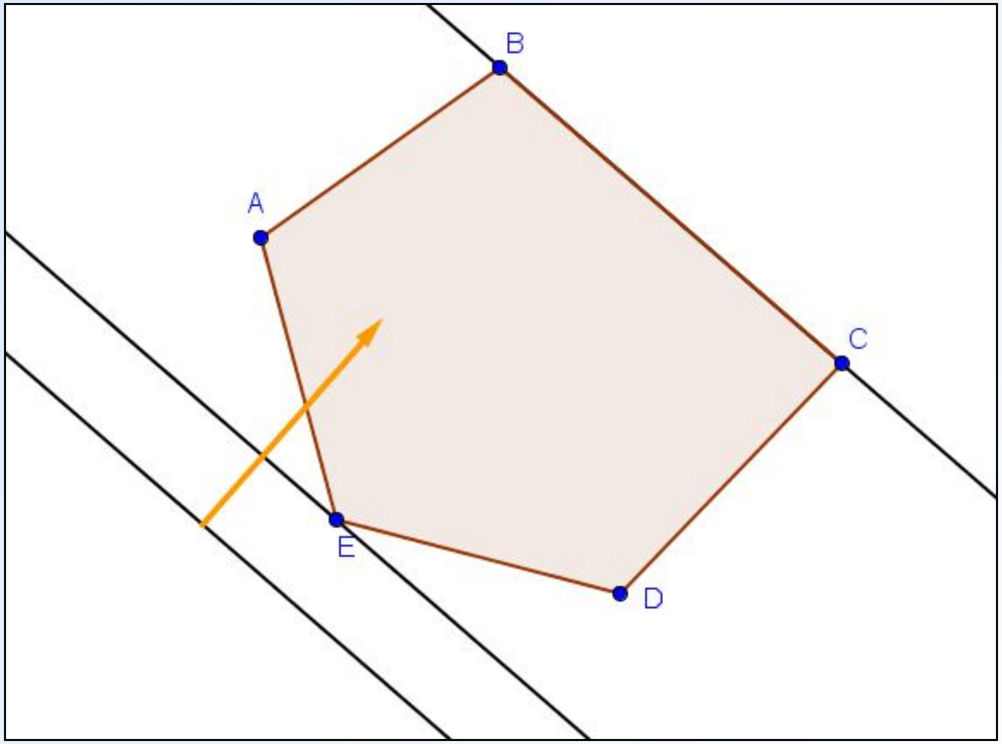


Частные случаи

Минимальное значение целевая функция достигает в точке **E**: $\mathbf{F_{min} = F(E)}$

Максимальное значение целевая функция достигает во всех точках отрезка **BC** :

$\mathbf{F_{min} = F(B) = F(C)}$



Решить графически ЗЛП

$$\begin{cases} x_2 - x_1 \le 2, \\ 4x_1 + x_2 \ge 4, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

$$F = 3x_1 + 4x_2 \to \max$$

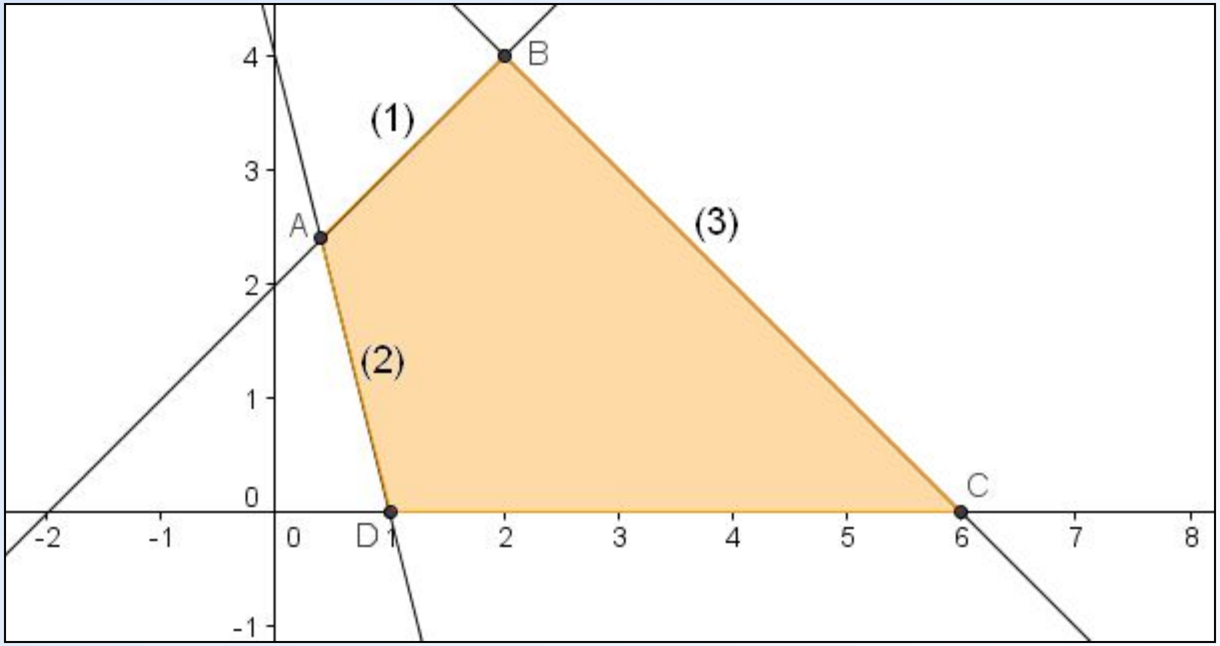
Решить графически ЗЛП

$$\begin{cases} x_2 - x_1 \le 2, \\ 4x_1 + x_2 \ge 4, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

$$F = 3x_1 + 4x_2 \to \max$$

1. Построим область допустимых решений, заданную системой неравенств

(см. презентацию **Геометрический смысл линейного неравенства**)

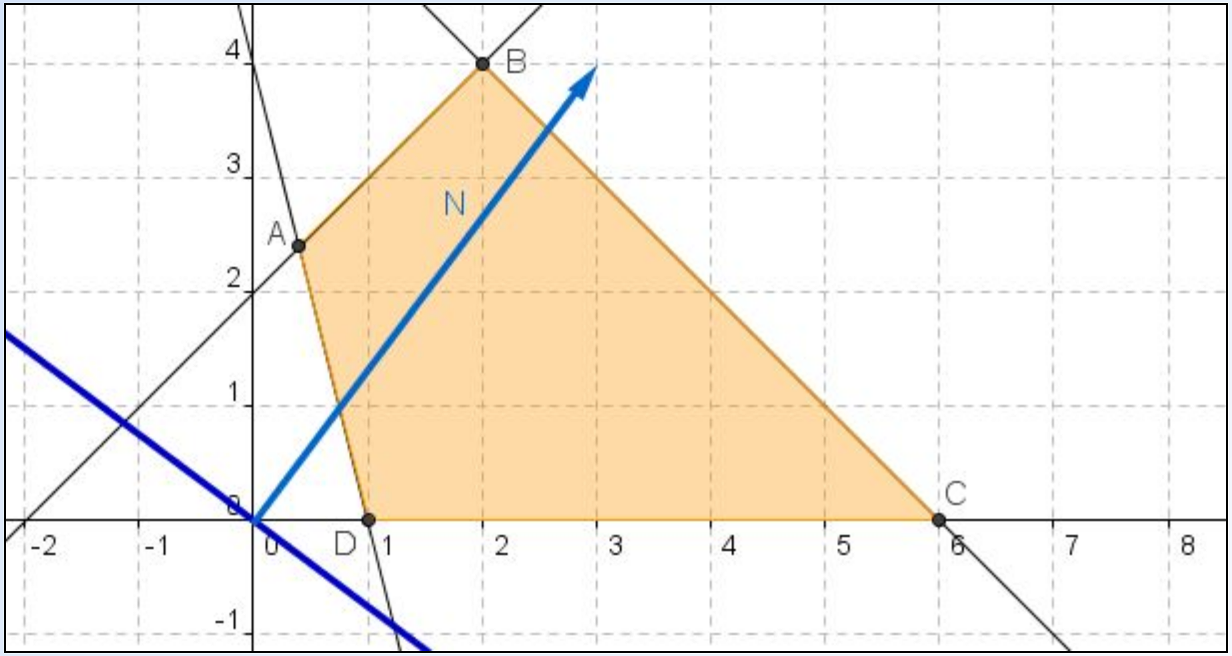


Решить графически ЗЛП

$$\begin{cases} x_2 - x_1 \le 2, \\ 4x_1 + x_2 \ge 4, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

$$F = 3x_1 + 4x_2 \to \max$$

2. Построим вектор нормали ***N*(3;4)** и перпендикулярную ему опорную прямую



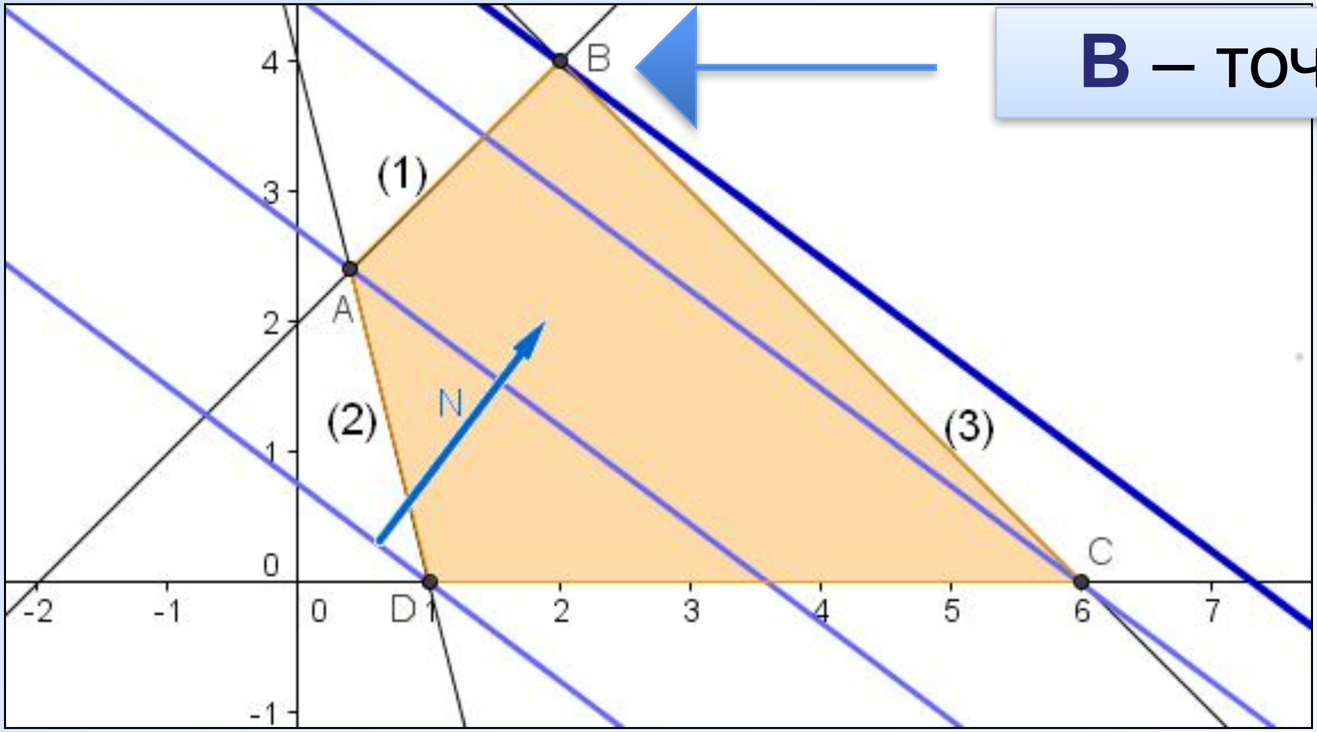
Решить графически ЗЛП

$$\begin{cases} x_2 - x_1 \le 2, \\ 4x_1 + x_2 \ge 4, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

$$F = 3x_1 + 4x_2 \to \max$$

Файл 04_model_01.ggb

3. Перемещаем опорную прямую в направлении вектора нормали и определяем «точку выхода»



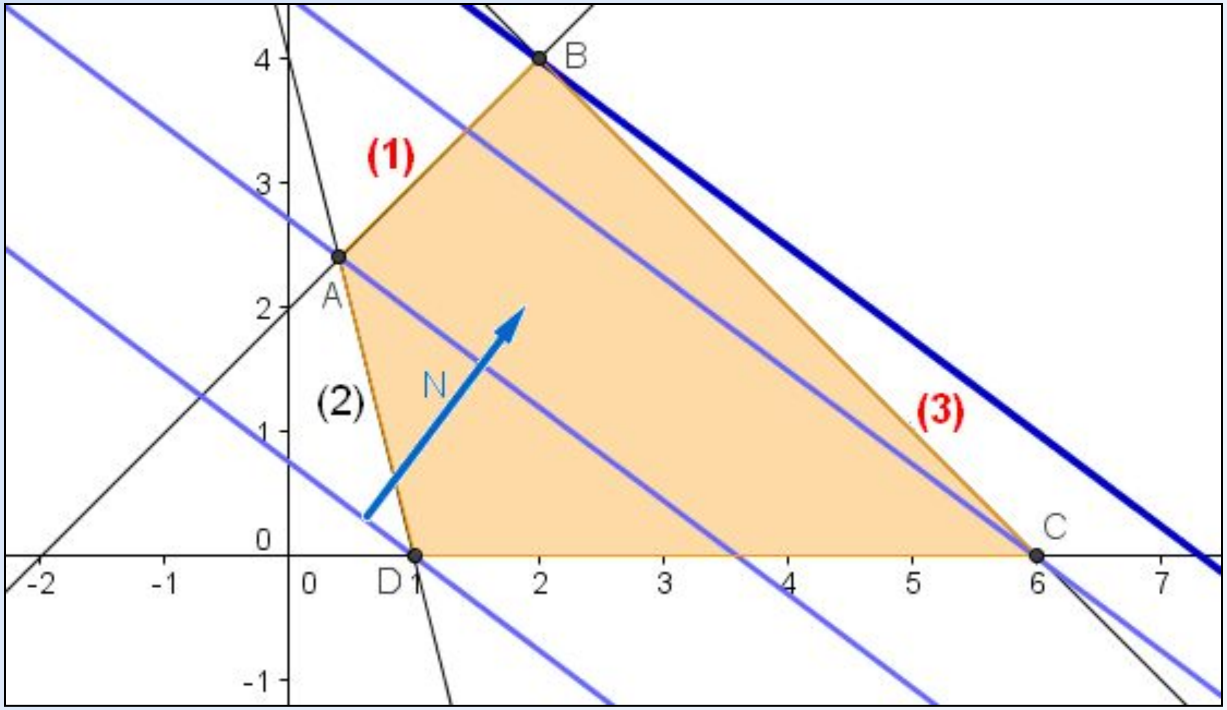
B – точка выхода

Решить графически ЗЛП

$$\begin{cases} x_2 - x_1 \le 2, \\ 4x_1 + x_2 \ge 4, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

$$F = 3x_1 + 4x_2 \to \max$$

4. Найдем координаты точки B, как точки пересечения прямых (1) и (3)



Решить графически ЗЛП

$$\begin{cases} x_2 - x_1 \le 2, \\ 4x_1 + x_2 \ge 4, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

$$F = 3x_1 + 4x_2 \to \max$$

4. Найдем координаты точки В, как точки пересечения прямых (1) и (3):

$$B = (1) \cap (3)$$

$$B\colon \begin{cases} x_2 - x_1 = 2, \\ x_1 + x_2 = 6. \end{cases} \begin{cases} 2x_2 = 8, \\ x_1 + x_2 = 6. \end{cases} \begin{cases} x_2 = 4, \\ x_1 = 2. \end{cases}$$

$$B(2;4)$$

Решить графически ЗЛП

$$\begin{cases} x_2 - x_1 \le 2, \\ 4x_1 + x_2 \ge 4, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

$$F = 3x_1 + 4x_2 \to \max$$

5. Найдем значение целевой функции в точке В

$$F_{max}(B) = F(2;4) = 3 \cdot 2 + 4 \cdot 4 = 22$$

Решить графически ЗЛП

$$\begin{cases} x_2 - x_1 \le 2, \\ 4x_1 + x_2 \ge 4, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

$$F = 3x_1 + 4x_2 \to \max$$

Ответ:

$$F_{max}(2;4) = 22$$

Литература

1. Кремер Н.Ш., Путко Б.А. Исследование операций в экономике. - М.: ЮНИТИ, 2003. - 407 с.
2. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть 1. - М.: Высшая школа, 1986. – С.271-274