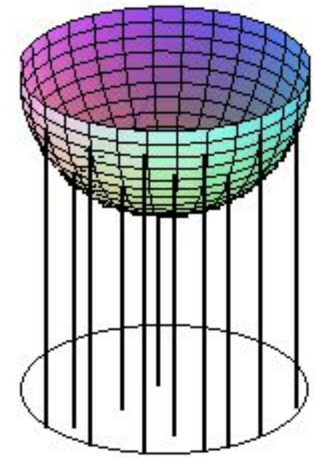
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ГИПОТЕЗЫ ПУАНКАРЕ И ФУНКЦИЯ ЛЯПУНОВА

Двумерные многообразия

Пусть X и Y – два множества в евклидовом пространстве произвольной размерности. Если задано отображение $f : X \to Y$, которое каждой точке множества X ставит в соответствие точку множества Y и
1) отображение взаимно-однозначно, то есть различные точки переходят в различные;
2) отображение непрерывно, то есть близкие точки переходят в близкие;
3) обратное отображение f^{-1} непрерывно, то множества X и Y – гомеоморфны, а отображение f называется *гомеоморфизмом*.
Например, внутренность круга гомеоморфна всей плоскости (рис.1)



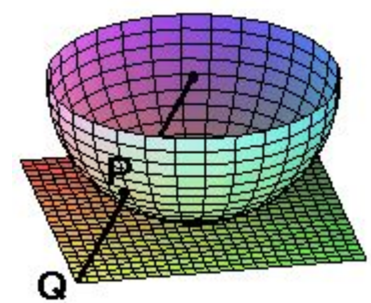
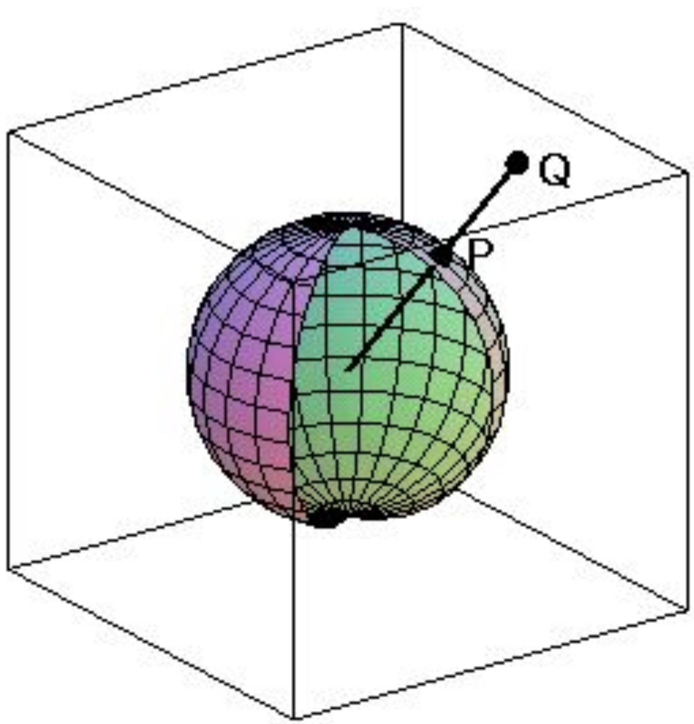


Рис. 1

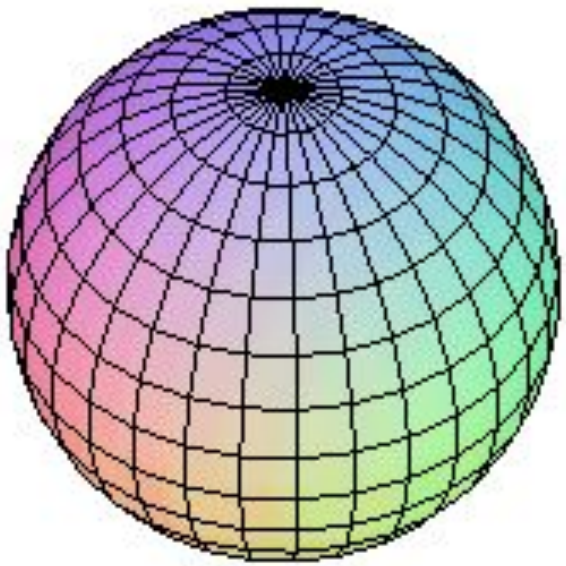
Двумерные многообразия



Например, поверхность куба гомеоморфна сфере (рис.2)

Рис. 2

Двумерные многообразия



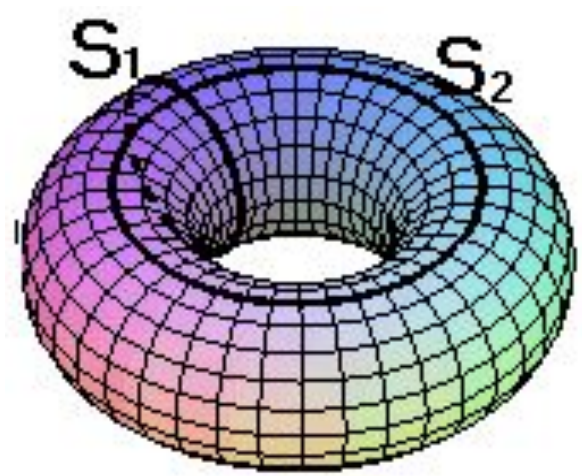


Рис. 3

Двумерные многообразия

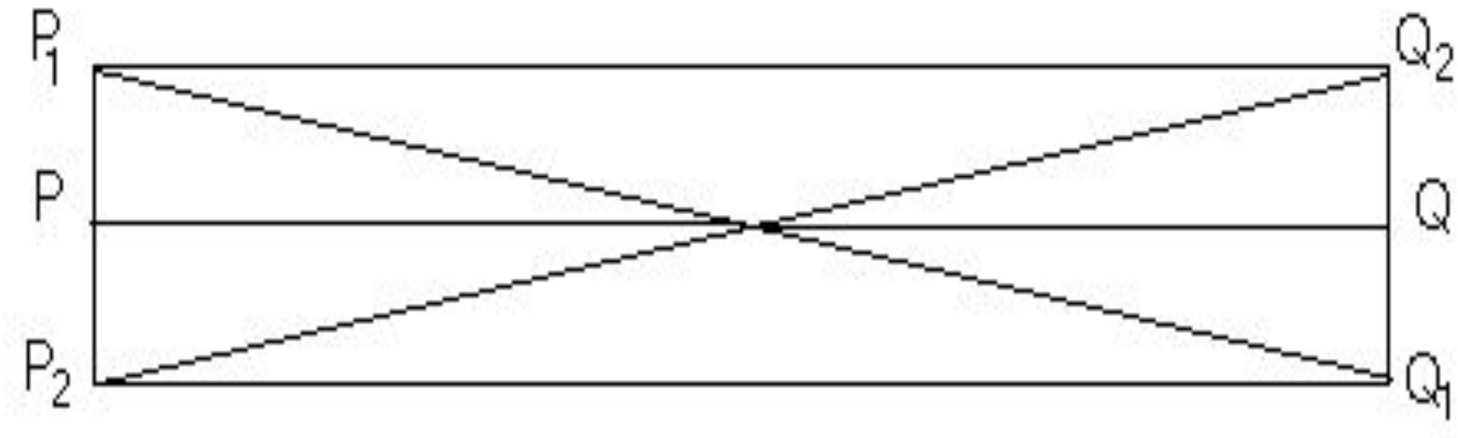


Рис. 4

Двумерные многообразия

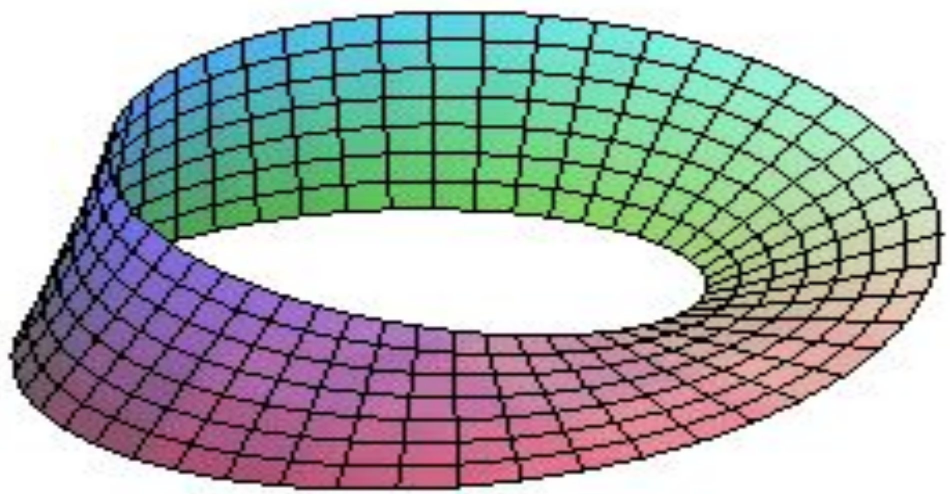


Рис. 5

Двумерные многообразия

Любая компактная двумерная поверхность гомеоморфна либо сфере с *p* ручками, либо сфере с *q* листами Мебиуса, причем сферы с ручками не гомеоморфны сферам с листами Мебиуса, так как второй ряд поверхностей образуют неориенти-руемые поверхности. Сферы с различным числом ручек и различным числом листов Мебиуса также негомеоморфны между собой.

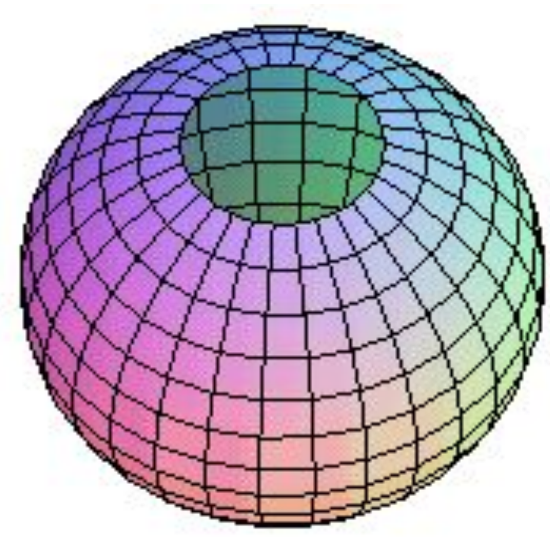


Рис. 6

Двумерные многообразия

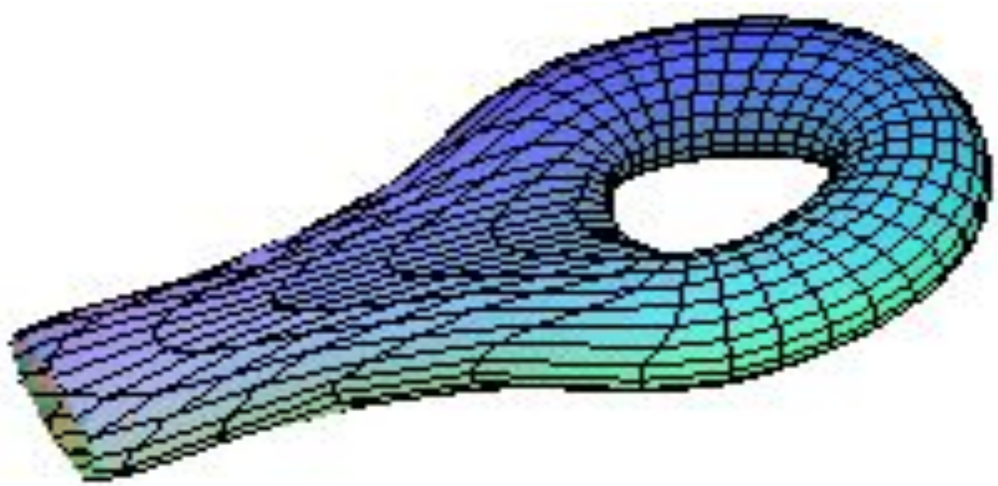


Рис. 7

Двумерные многообразия

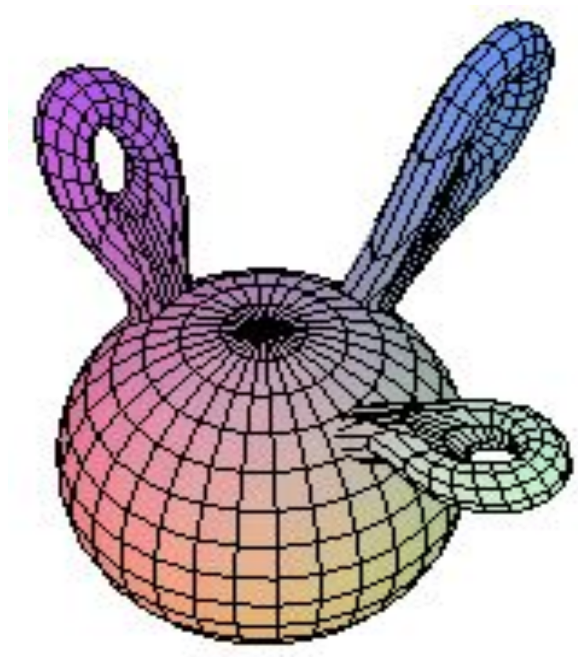


Рис.8

Двумерные многообразия

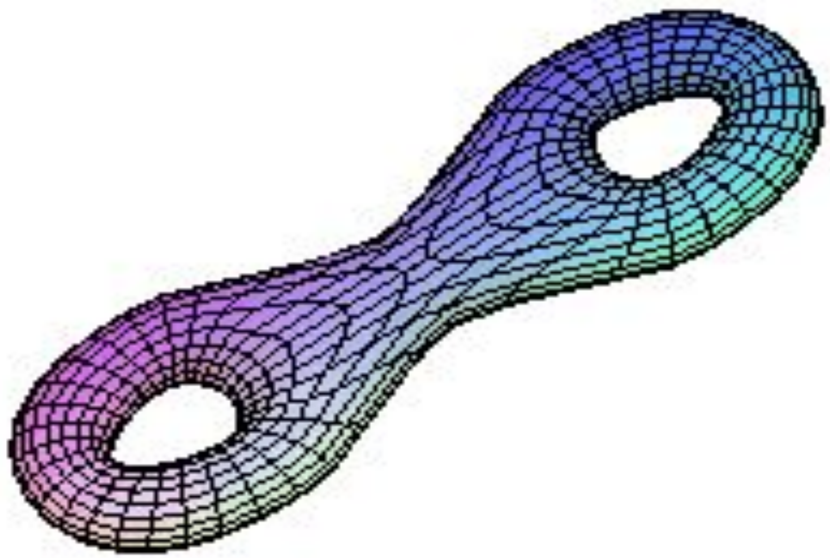


Рис.9

Двумерные многообразия

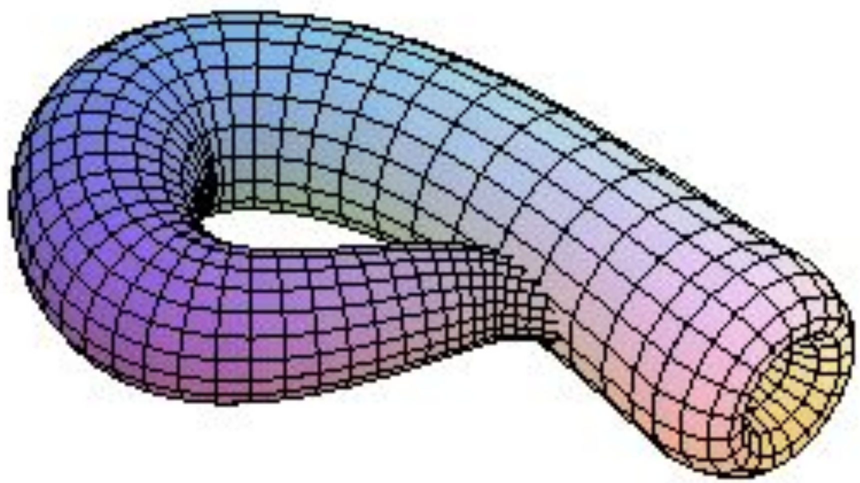


Рис. 10

Фундаментальная группа

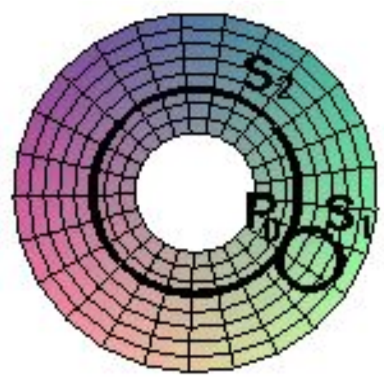


Рис. 11

Две петли γ_1 и γ_2, проходящие через фиксированную точку P, называются *гомотопными*, если их можно непрерывно деформировать одна в другую. И мы уже можем рассматривать класс $[\gamma]$ гомотопных петель.

Трехмерные многообразия

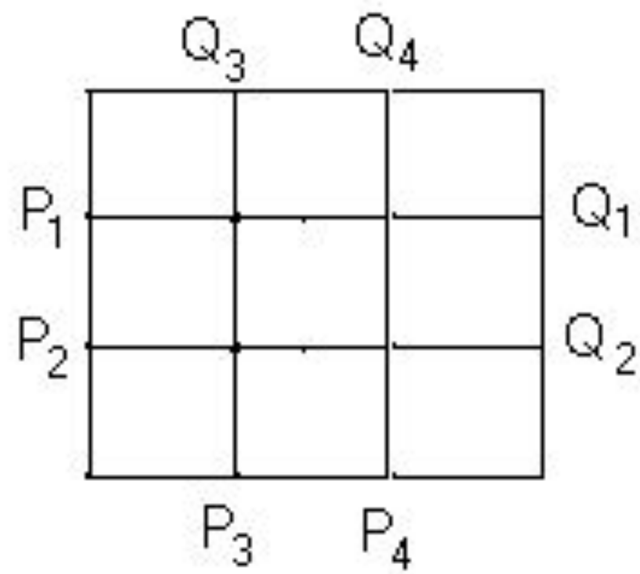


Рис. 12

Трехмерные многообразия

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 1$$

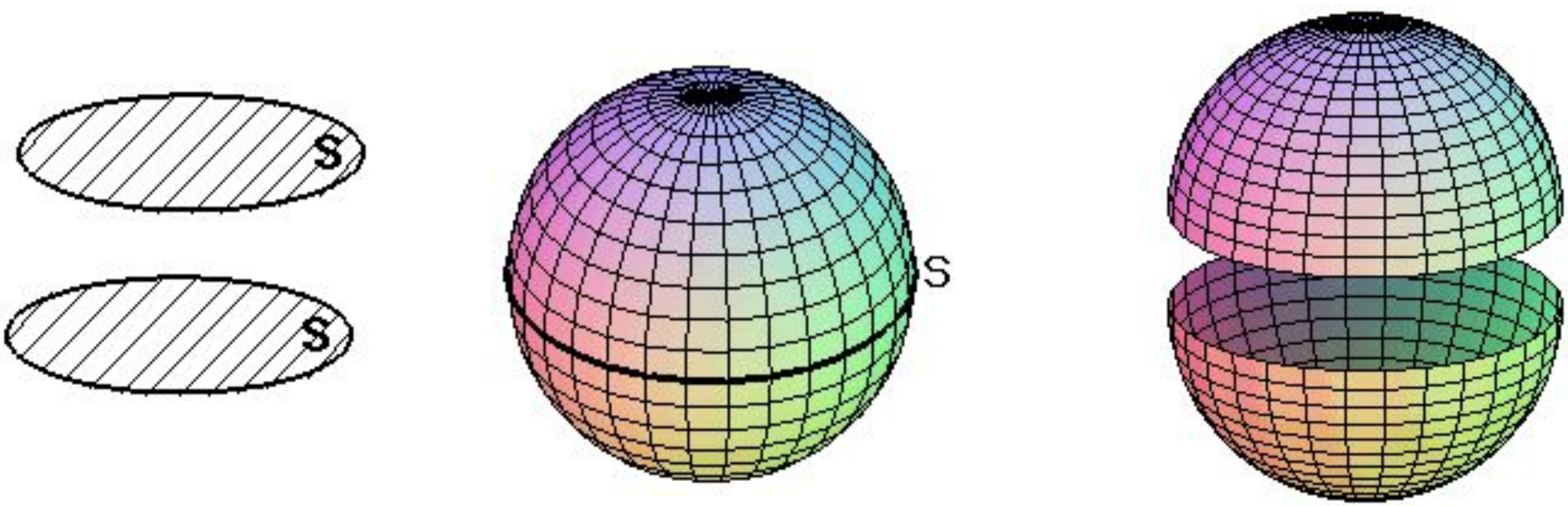


Рис.13

Трехмерные многообразия

Каждое компактное ориентируемое 3-мерное многообразие раскладывается в связную сумму

$$M = (K_1 \# \ldots \# K_p) \# (L_1 \# \ldots \# L_q) \#_1^r (S^2 \times S^1),$$

где сомножители K_i, L_j - замкнутые неприводимые трехмерные многообразия, $S^2 \times S^1$ -декартово произведение окружности на двумерную сферу и в связную сумму входит r –компонент. K_i множители имеют бесконечную фундаментальную группу, L_j множители - конечную фундаментальную группу.

Трехмерные многообразия

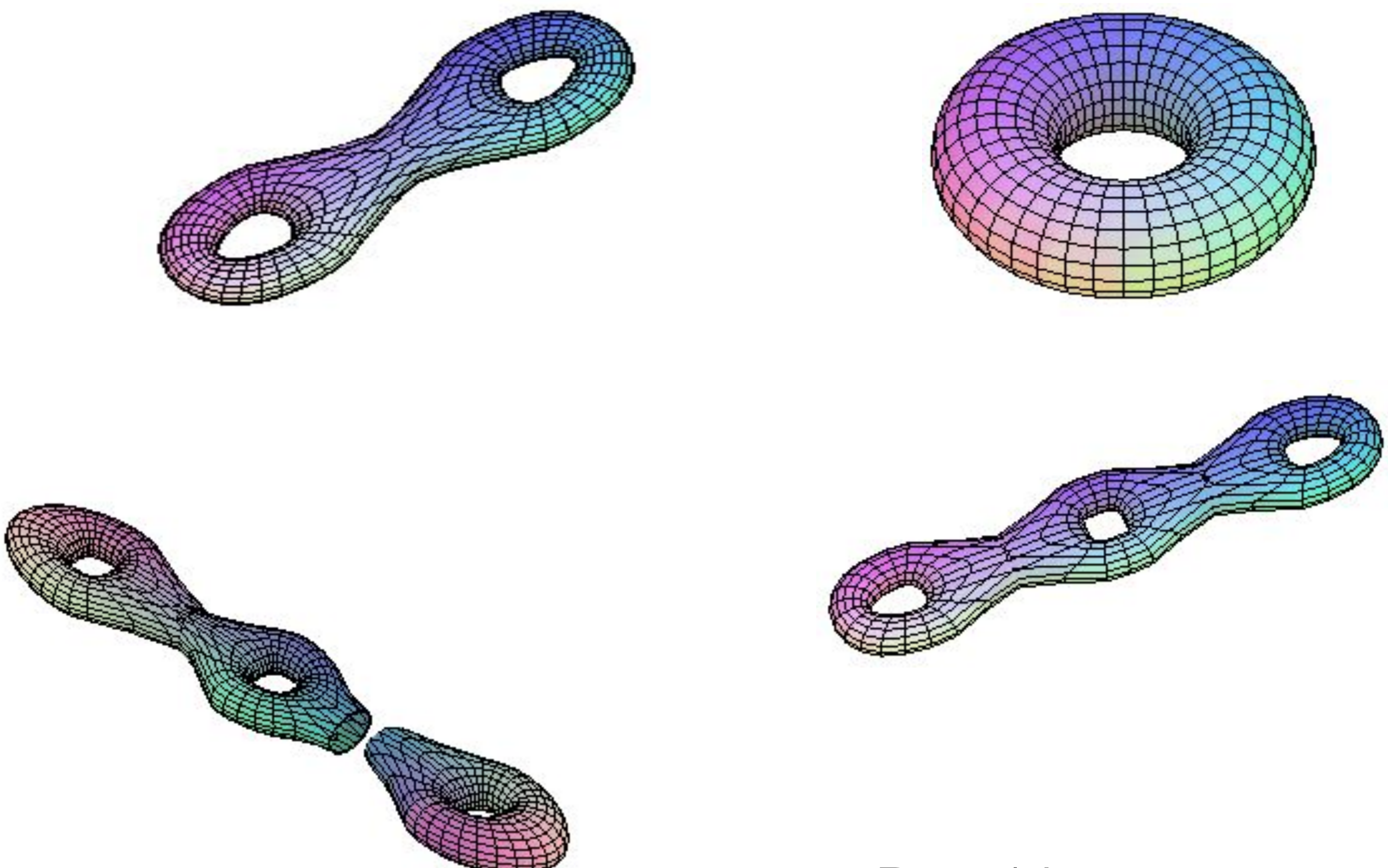


Рис. 14

Трехмерные многообразия

Любое трехмерное компактное неприводимое многообразие можно разрезать конечным числом несжимающихся торов на компактные многообразия, границей которых есть торы.Каждое из этих многообразий или торонеприводимо или является многообразием Зейферта.

Гипотеза Пуанкаре состоит в следующем. Пусть M^3 – компактное трехмерное односвязное многообразие (т.е. любая петля на многообразии стягивается в точку). Верно ли, что это многообразие гомеоморфно трехмерной сфере S^3?

А. Пуанкаре в 1904г высказал гипотезу, что любое компактное односвязное трехмерное многообразие гомеоморфно трехмерной сфере . Геометрическая гипотеза Терстона заключается в том, что любое компактное трехмерное многообразие можно каноническим способом разбить торами и сферами на куски, что на каждом из этих кусков можно задать одну из 8 стандартных трехмерных геометрий. Последний решающий шаг в решении проблемы Пуанкаре и сделал Г. Перельман. Главным инструментом для решения этих проблем был поток Риччи, введенный Р. Гамильтоном в 1982г.

Поток Риччи

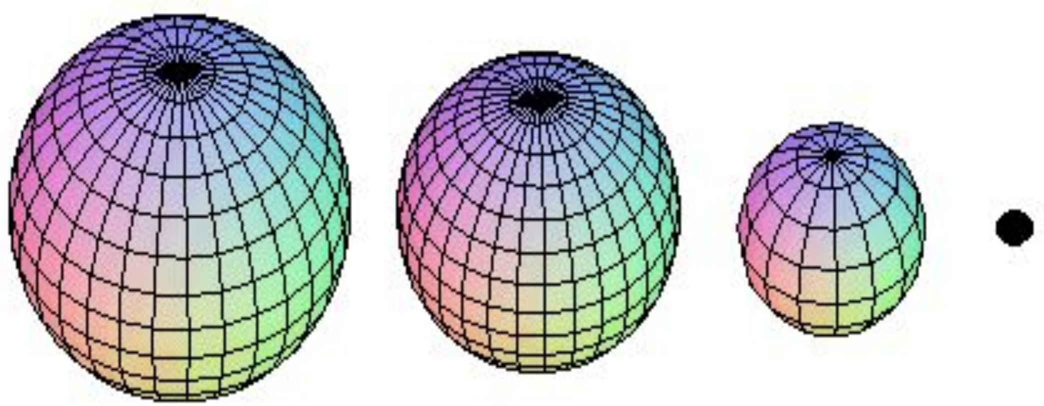
Пусть (M^3, g) есть риманово неприводимо компактное многообразие, на котором в локальных координатах u^1, u^2, u^3 метрика задается в виде

$$ds^2 = g_{ij} du^i du^j,$$

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = -2R_{ij}$$

$$g(0) = g_0$$

Поток Риччи



t=0

$$T = \frac{r^2}{2(n-1)}$$

Рис. 15

Поток Риччи

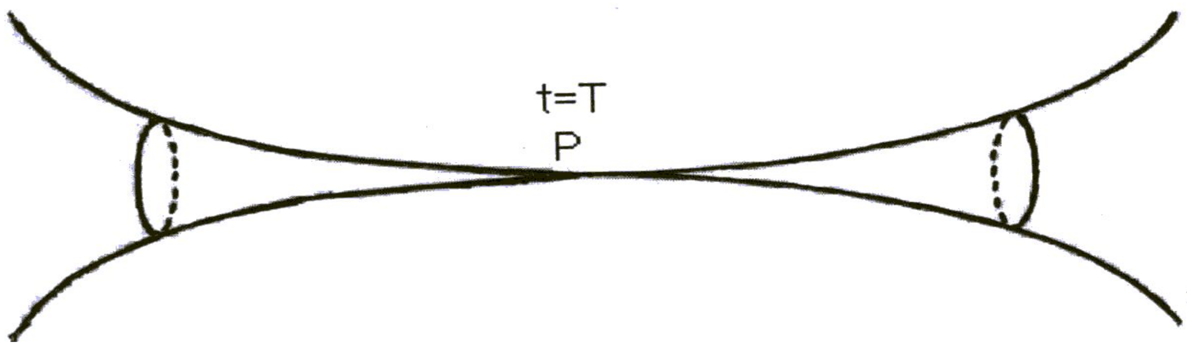


Рис. 16

Поток Риччи

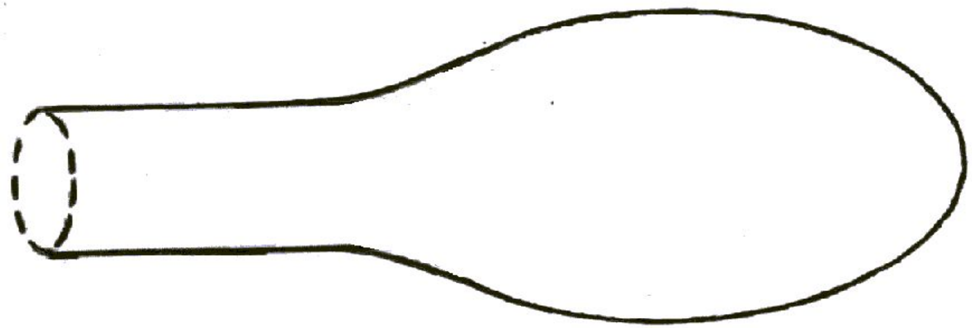


Рис. 17

Поток Риччи

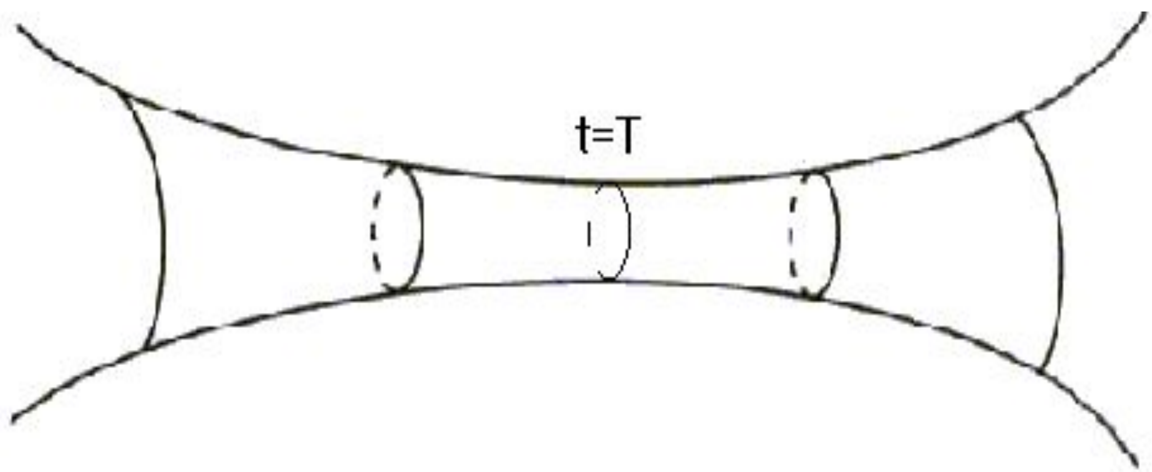


Рис. 18

Поток Риччи

Рис. 19

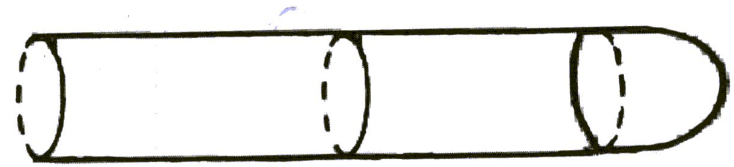


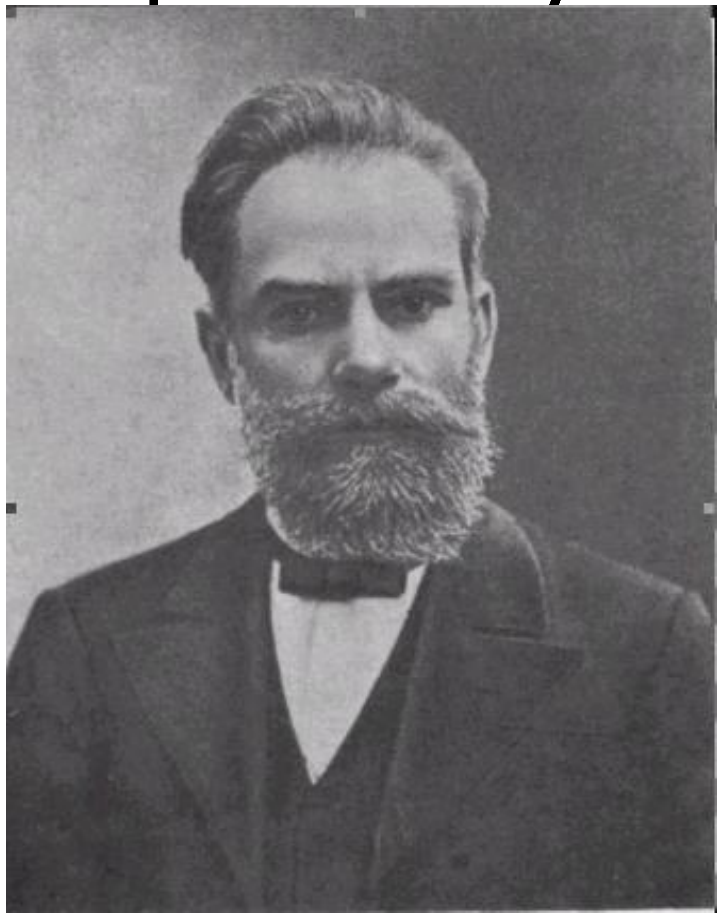
Рис. 20

Поток Риччи

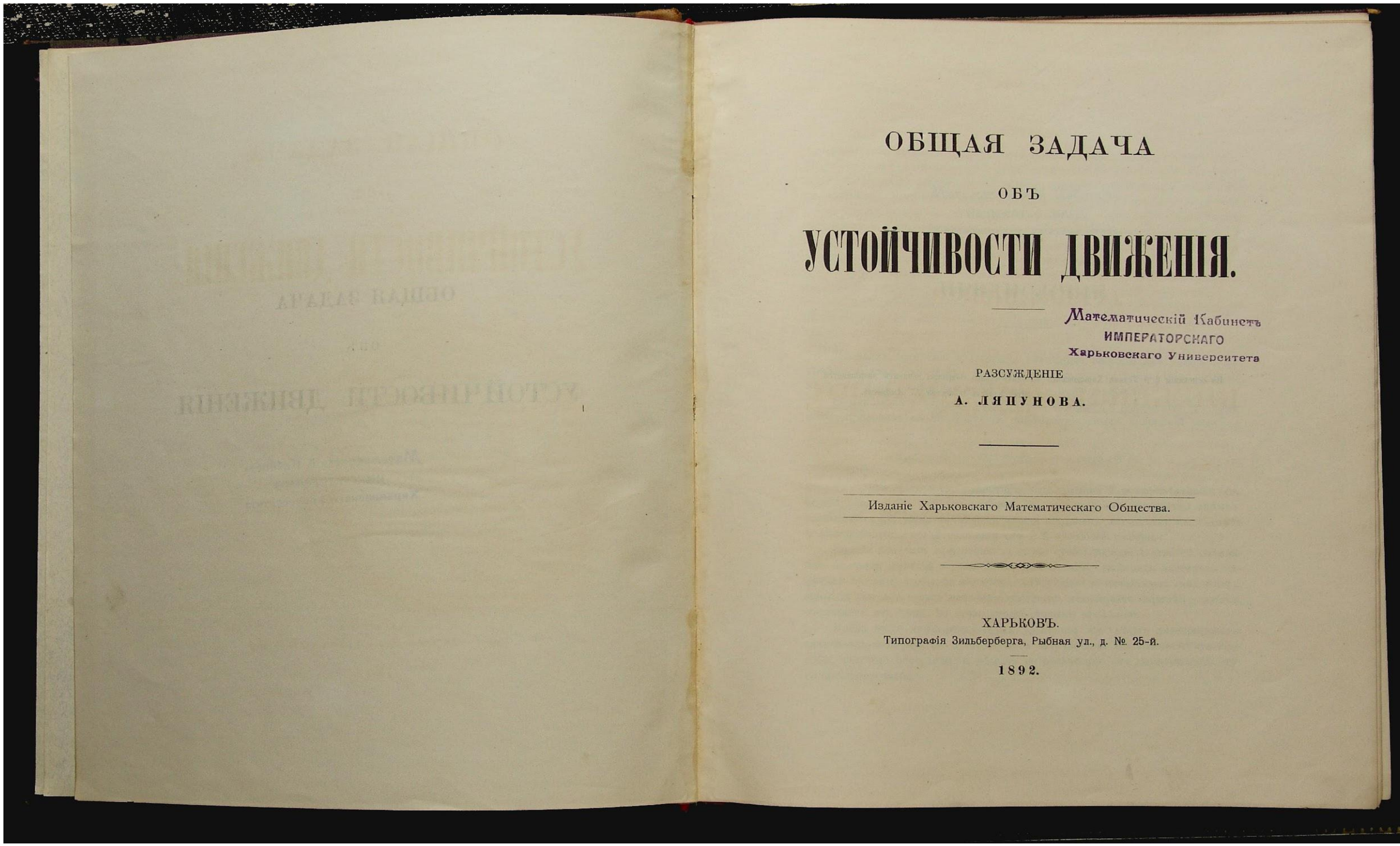
Рис. 21

Sylvia Nasar and David Cruber. Manifold Destiny. A legendary problem and the battle over who soved it. (The new Yorker.) http://www.newyorker.com/fact/content/articles/060828fa_fact2.21.08.2006г. Русский перевод vadda. http:// vadda.livejournal.com

Принцип максимума и функция Ляпунова



А.М. Ляпунов (1857-1918)



ОБЩАЯ ЗАДАЧА

ОБЪ

УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНІЯ.

РАЗСУЖДЕНІЕ
А. ЛЯПУНОВА.

Изданіе Харьковскаго Математическаго Общества.

ХАРЬКОВЪ.
Типографія Зильберберга, Рыбная ул., д. № 25-й.
1892.

Я хочу показать, как фактически использовалась идея функций Ляпунова в принципе максимума Р.Гамильтона, который являлся существенным инструментом для доказательства Г.Перельманом гипотезы Пуанкаре .

Исследование устойчивости невозмущенного движения сводится к исследованию устойчивости нулевого решения системы:

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(x^1, \ldots, x^n, t) \qquad (1)$$

$$f^i(0, \ldots, 0) = 0, \qquad i = 1, \ldots, n$$

Неподвижная точка (0,…,0) называется *положением равновесия.*

Определение. Положение равновесия $x^i = 0, i = 1,...,n$ называется *устойчивым по Ляпунову*, если для любого $\varepsilon > 0$ и $t_0 > 0$ существует положительное число η такое, что если в момент времени $t = 0$ решение системы (1) $|x(0)| < \eta$, то при $t \geq t_0$ решение $|x(t)| < \varepsilon$. В противном случае положение равновесия называется *неустойчивым.* Если при этом $|x(t)| \to 0$ при $t \to \infty$, то точка равновесия называется *асимптотически устойчивой*.

Один из фундаментальных способов доказательства устойчивости и неустойчивости связан с функцией Ляпунова V, которая определяется следующим образом:

1) $V = V(x^1,...,x^n)$ – регулярная функция, по крайней мере класса C^1

2) $V(0) = 0$

3) $V(x) > 0$, если $|x| \neq 0$.

Заметим, что при малых положительных ε множество точек $V(x)=\varepsilon$ в пространстве $x^1,...,x^n$ является замкнутой гиперповерхностью $F(\varepsilon)$, гомеоморфной сфере S^{n-1}, которая ограничивает область $\Omega(\varepsilon)$, содержащую начало координат. Эта точка является точкой равновесия для системы (1).

Сейчас для простоты возьмем случай, когда система (1) автономна, т.е. функции f^i не зависят от t. Рассмотрим систему

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(x^1, \ldots, x^n) \qquad (2)$$

Производная функции V вдоль интегральных траекторий системы (2) $x^i = x^i(t), i=1,...,n$ определяется как

$$\dot{V} = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x^i}\frac{dx^i}{dt} \qquad (3)$$

Так как $x^i = x^i(t), \quad i = 1,...,n$ удовлетворяют системе (2), то

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x^i} f^i, \qquad (4)$$

где по i идет суммирование от 1 до n. Имеет место

Теорема (Ляпунов). Пусть система (2) имеет неподвижную точку в начале координат. Если в некоторой окрестности начала координат существует функция Ляпунова такая, что

I. $\dot{V} \leq 0$ (5),

то начало координат является устойчивой неподвижной точкой системы (2);

II. если $\dot{V} < 0$ (6)

везде в окрестности, исключая начало координат, то начало координат – асимптотически устойчивая неподвижная точка.

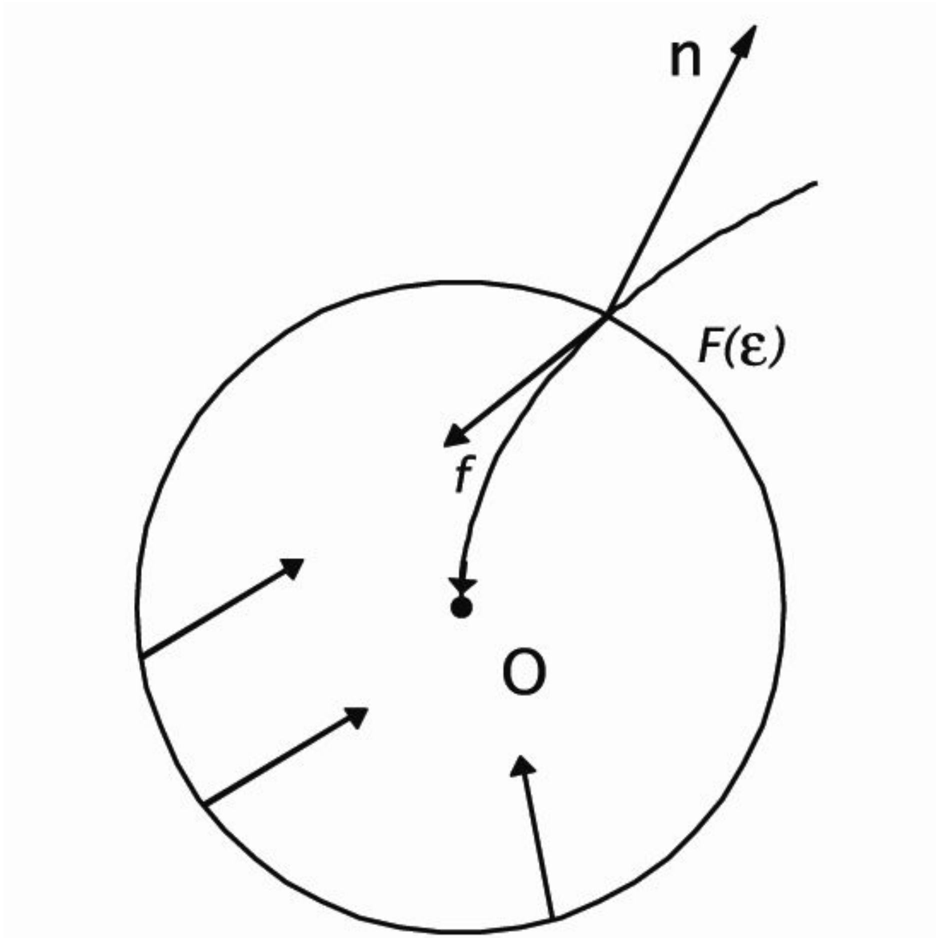


Рис. 1

Ясно, что

$$\dot{V} = < gradV\,, f > \quad (7)$$

где $gradV$ направлен по нормали гиперповерхности $F(\varepsilon)$ вне компактной области $\Omega(\varepsilon)$, которую ограничивает гиперповерхность $F(\varepsilon)$ и которая содержит неподвижную точку системы (2), $f = (f^1, ..., f^n)$ – вектор касательный к интегральной траектории системы (2), $<.,.>$ – скалярное произведение в евклидовом пространстве $x^1, \ldots, x^n$. Из (7) следует, что условие (6) эквивалентно тому, что вектор f на гипер-поверхности уровня $F(\varepsilon)$ строго направлен во внутрь области $\Omega(\varepsilon)$, а условие (5) значит, что вектор f либо строго направлен во внутрь области $\Omega(\varepsilon)$, либо может лежать в касательной гиперплоскости к $F(\varepsilon)$.

Используя уравнения Риччи потока можно получить эволюционные уравнения для измерения скалярной кривизны, тензора Риччи, тензора кривизны. Эти системы эволюционных уравнений будут иметь вид:

$$\frac{df^i}{\partial t} = \Delta_M f^i + \Phi^i(f^{'}, ..., f^k) \quad , i = 1, \ldots, k \quad (8),$$

где Δ_M -оператор Лапласа на римановом многообразии с метрикой *g*, $f = \{f^\alpha\}$ система функций на *M*.

Мы рассматриваем f как отображение *M* в евклидово пространство R^k. Пусть *U* -открытое множество в R^k и $\Phi : U \subset R^k \to R^k$ – гладкое векторное поле на *U*. Пусть метрика *g* и Φ также зависит и от времени. Рассмотрим нелинейную систему параболических уравнений.

$$\frac{df}{\partial t} = \Delta f + \Phi(f), \quad (9)$$

$$f(0) = f_0$$

и предположим, что решение существует на промежутке времени $0 \le t \le T$. Пусть *X* – замкнутое выпуклое множество в $U \subset R^k$, которое содержит начальные данные f_0. Когда решение системы (9) останется в множестве *X* при $0 \le t \le T$? Для ответа на этот вопрос рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{df}{dt} = \Phi(f) \qquad (10)$$

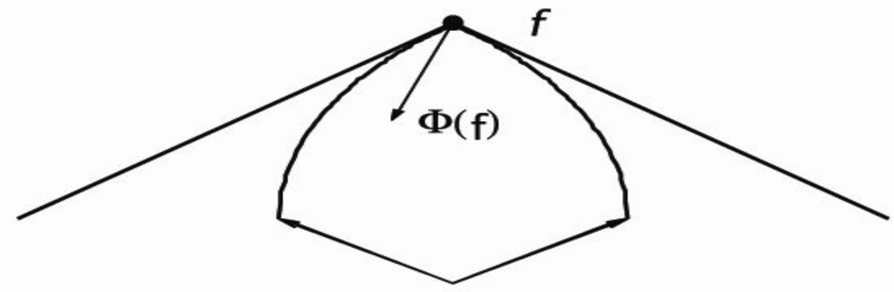
$$f(0) = f_0$$

в области $U \subset R^k$ и зададим тот же вопрос: когда решение системы (10) останется в X? Пусть ∂X – граница выпуклого множества X. В общем случае, когда X содержит внутренние точки, это будет выпуклая нерегулярная гиперповерхность. В точке $f \in \partial X$ мы определяем касательный конус $T_f X$ как наименьший выпуклый конус с вершиной f, который содержит X. $T_f X$ есть пересечение замкнутых полупространств, содержащих X и гиперплоскости, ограничивающие эти полупространства, проходят через точку $f \in \partial X$. Если точка f – есть гладкая точка гиперповерхности ∂X, то $T_f X$ совпадает с замкнутым полупространством, содержащим X, которое ограничивает касательная плоскость в точке $f \in \partial X$.

Теорема. Решение системы (10) с начальными данными f_0 в замкнутом выпуклом множестве X останется в X тогда и только тогда, когда $\Phi(f) \in T_f X$ для всех $f \in \partial X$.

Легко видеть, что эта теорема есть прямой нерегулярный аналог теоремы устойчивости Ляпунова. Здесь гиперповерхность ∂X заменяет гиперповерхности уровня $F(\varepsilon)$, а касательный конус $T_f X$ заменяет замкнутое полупространство, которое ограничивает касательная гиперплоскость к $F(\varepsilon)$.

И в гладкой точке условие теоремы эквивалентно $< n, \Phi(f) > \leq 0$, где n– нормаль к гиперповерхности ∂X в точке $f \in \partial X$.



А из предыдущей теоремы непосредственно следует

Теорема. Если решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений (10) остается в X , то решение системы (9) уравнений с частными производными также остается в X .