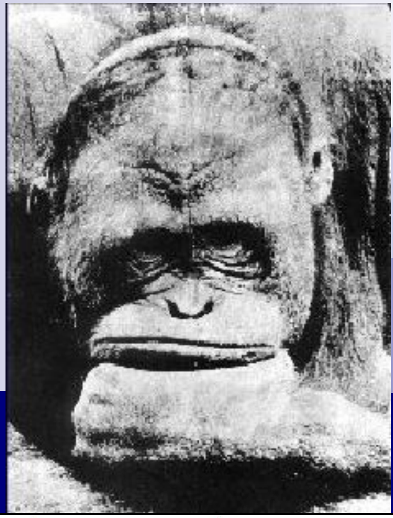
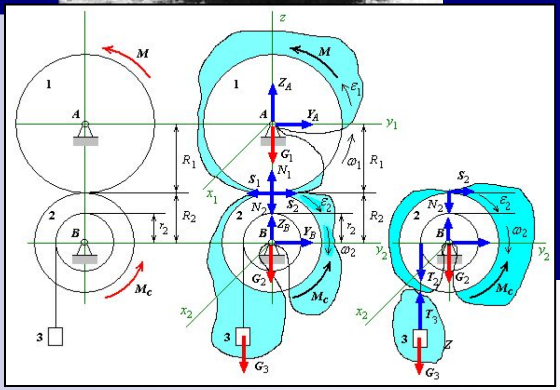
Московский государственный университет путей сообщения (МИИТ)
Кафедра теоретической механики
Научно-технический центр транспортных технологий

Бондаренко А.Н.





Курс лекций по теоретической механике

Динамика (I часть)

Электронный учебный курс написан на основе лекций, читавшихся автором для студентов, обучавшихся по специальностям СЖД, ПГС и СДМ в НИИЖТе и МИИТе (1974-2006 гг.). Учебный материал соответствует календарным планам в объеме трех семестров.

Для полной реализации анимационных эффектов при презентации необходимо использовать средство просмотра Power Point не ниже, чем встроенный в Microsoft Office операционной системы Windows-XP Professional.

Замечания и предложения можно послать по e-mail: bond@miit.ru .

Москва - 2007

- Лекция 7.

Импульс силы. Количество движения. Теорема об изменении количества движения. Законы сохранения. Теорема Эйлера.

Пример решения задачи на использование теоремы об изменении количества движения.

Момент количества движения. Теорема об изменении момента количества движения..

Лекция 7

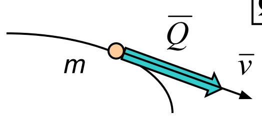
- **Импульс силы** – **мера механического взаимодействия**, характеризующая передачу механического движения со стороны действующих на точку сил за данный промежуток времени: $\boxed{\bar{S} = \int_{t_1}^{t_2} \bar{F} dt}$ В проекциях на координатные оси: $\boxed{(x): S_x = \int_{t_1}^{t_2} X dt; \quad (y): S_y = \int_{t_1}^{t_2} Y dt; \quad (z): S_z = \int_{t_1}^{t_2} Z dt.}$

  В случае постоянной силы: $\boxed{\bar{S} = \bar{F}(t_2 - t_1).}$ В проекциях на координатные оси: $\boxed{S_x = X(t_2 - t_1); \quad S_y = Y(t_2 - t_1); \quad S_z = Z(t_2 - t_1);}$

- **Импульс равнодействующей** – **равен геометрической сумме импульсов приложенных к точке сил за один и тот же промежуток времени**: $\boxed{\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \ldots + \bar{F}_n.}$ Умножим на *dt*: $\bar{R}dt = \bar{F}_1 dt + \bar{F}_2 dt + \ldots + \bar{F}_n dt.$

  Проинтегрируем на данном промежутке времени: $\int_{t_1}^{t_2} \bar{R}dt = \int_{t_1}^{t_2} \bar{F}_1 dt + \int_{t_1}^{t_2} \bar{F}_2 dt + \ldots + \int_{t_1}^{t_2} \bar{F}_n dt.$ $\Rightarrow$ $\boxed{\bar{S} = \bar{S}_1 + \bar{S}_2 + \ldots + \bar{S}_n.}$

- **Количество движения точки** – мера механического движения, определяемая вектором, **равным произведению массы точки на вектор ее скорости:** $\boxed{\bar{Q} = m\bar{v}.}$



- **Количество движения системы материальных точек** – **геометрическая сумма количеств движения материальных точек:** $\boxed{\bar{Q} = \bar{Q}_1 + \bar{Q}_2 + \ldots + \bar{Q}_n = \sum \bar{Q}_k.}$

$$\bar{Q} = \sum \bar{Q}_k = \sum m_k \bar{v}_k = \sum m_k \frac{d\bar{r}_k}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum m_k \bar{r}_k\right).$$

По определению центра масс: $\boxed{M\bar{r}_C = \sum m_k \bar{r}_k.}$

Тогда: $\bar{Q} = \frac{d}{dt}(M\bar{r}_c) = M\frac{d\bar{r}_C}{dt} = M\bar{v}_C.$ $\boxed{\bar{Q} = M\bar{v}_C.}$ **Вектор количества движения системы равен произведению массы всей системы на вектор скорости центра масс системы.**

В проекциях на координатные оси: $\boxed{Q_x = M\dot{x}_C; \quad Q_y = M\dot{y}_C; \quad Q_y = M\dot{z}_C.}$

- **Теорема об изменении количества движения системы** – Рассмотрим систему *n* материальных точек. Приложенные к каждой точке силы разделим на внешние и внутренние и заменим их на соответствующие равнодействующие $\boldsymbol{F}_k^e$ и $\boldsymbol{F}_k^i$. Запишем для каждой точки основное уравнение динамики: $\boxed{m_k \bar{a}_k = \bar{F}_k^e + \bar{F}_k^i}$ или $m_k \frac{d\bar{v}_k}{dt} = \bar{F}_k^e + \bar{F}_k^i.$ Просуммируем эти уравнения по всем точкам: $\sum m_k \frac{d\bar{v}_k}{dt} = \boxed{\sum \bar{F}_k^e} + \boxed{\sum \bar{F}_k^i}.$ $\Downarrow \bar{R}^e$ $\quad \Downarrow \bar{R}^i = 0$

  В левой части уравнения внесем массы под знак производной и заменим сумму производных на производную суммы: $\frac{d}{dt}\left(\sum m_k \bar{v}_k\right) = \bar{R}^e.$

  Из определения количества движения системы: $\sum m_k \bar{v}_k = \bar{Q}.$ $\boxed{\frac{d\bar{Q}}{dt} = \bar{R}^e.}$

Производная вектора количества движения системы по времени равна главному вектору внешних сил системы.

В проекциях на координатные оси: $\boxed{\frac{dQ_x}{dt} = R_x^e = \sum X_k^e; \quad \frac{dQ_x}{dt} = R_x^e = \sum X_k^e; \quad \frac{dQ_x}{dt} = R_x^e = \sum X_k^e.}$

Следствия из теоремы об изменении количества движения системы (законы сохранения):

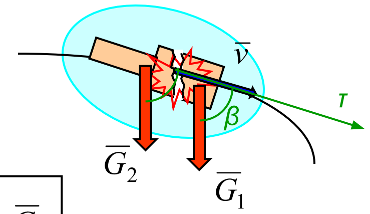
1. Если в интервале времени [t_1, t_2] главный вектор внешних сил системы равен нулю, $\boldsymbol{R^e} = 0$, то вектор количества движения постоянен, $\boldsymbol{Q} = \mathbf{const}$ **– закон сохранения количества движения системы**).

2. Если в интервале времени [t_1, t_2] проекция главного вектора внешних сил системы на ось x равна нулю, $R_x^e = 0$, то проекция количества движения системы на ось x постоянна, $Q_x = \text{const}$.

Аналогичные утверждения справедливы для осей y и z.

Пример: Граната массы M, летевшая со скоростью v, разорвалась на две части. Скорость одного из осколков массы m_1 возросла в направлении движения до величины v_1. Определить скорость второго осколка.

1. Объект движения (граната):
2. Объект – свободная система, связи и их реакции отсутствуют.
3. Добавляем активные силы:



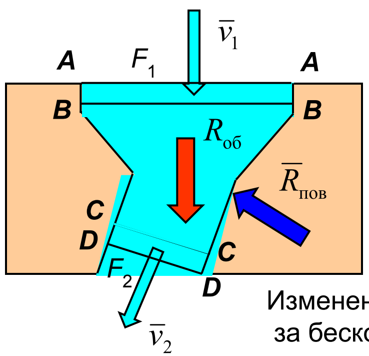
4. Записываем теорему об изменении количества движения: $\boxed{\dfrac{d\bar{Q}}{dt} = \bar{R}^e = \bar{G}_1 + \bar{G}_2.}$

Проецируем на ось τ: $\dfrac{dQ_\tau}{dt} = m_1 g\cos\beta + m_2 g\cos\beta \neq 0.$

Разделяем переменные и интегрируем: $\displaystyle\int_{Q_0}^{Q} dQ_\tau = \int_0^t (m_1 g\cos\beta + m_2 g\cos\beta)dt \approx 0.$ Правый интеграл практически равен нулю, т.к. время взрыва t<<1.

Отсюда *закон сохранения*: $Q_\tau - Q_{\tau 0} \approx 0$ или $Q_{\tau 0} \approx Q_\tau.$ ⇨ $Mv \approx m_1 v_1 + m_2 v_2.$ ⇨ $v_2 = \dfrac{Mv - m_1 v_1}{m_2} v_2.$

- **Теорема Эйлера – Применение теоремы об изменении количества движения системы к движению сплошной среды (воды)** .



1.Выбираем в качестве объекта движения объем воды, находящийся в криволинейном канале турбины:
2. Отбрасываем связи и заменяем их действие реакциями ($\boldsymbol{R}_{\text{пов}}$ – равнодействующая поверхностных сил)
3. Добавляем активные силы ($\boldsymbol{R}_{\text{об}}$ – равнодействующая объемных сил):

Изменение
за бесконе

В проекциях на оси:
$$\boxed{\begin{aligned}&(x): M_{\text{сек}}(v_{2x} - v_{1x}) = R_x^{\text{об}} + R_x^{\text{пов}};\\&(y): M_{\text{сек}}(v_{2y} - v_{1y}) = R_y^{\text{об}} + R_y^{\text{пов}};\\&(z): M_{\text{сек}}(v_{2z} - v_{1z}) = R_z^{\text{об}} + R_z^{\text{пов}}.\end{aligned}}$$

Разность проекций векторов секундных количеств движения жидкости на ось равна сумме проекций главных векторов объемных и поверхностных сил на ту же ось.

Принимая произведение плотности, площади поперечного сечения и скорости за **секундную массу** $\boxed{M_{\text{сек}} = \rho F_1 v_1 = \rho F_2 v_2,}$ получаем:

$$d\bar{Q}_{AB} = (M_{\text{сек}}dt)\bar{v}_1;$$
$$d\bar{Q}_{CD} = (M_{\text{сек}}dt)\bar{v}_2.$$
$$\boxed{d\bar{Q} = M_{\text{сек}}(\bar{v}_2 - \bar{v}_1)dt.}$$

Подставляя дифференциал количества движения системы в теорему об изменении получаем: $\boxed{M_{\text{сек}}(\bar{v}_2 - \bar{v}_1) = \bar{R}_{\text{об}} + \bar{R}_{\text{пов}}.}$

Геометрическая разность векторов секундных количеств движения жидкости равна сумме главных векторов объемных и поверхностных сил.

Лекция 7 (продолжение 7.3)

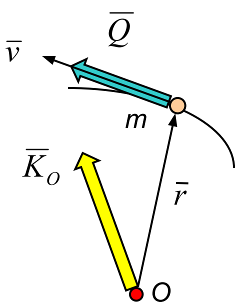
- **Момент количества движения точки или кинетический момент движения относительно некоторого центра** – мера механического движения, определяемая вектором, **равным векторному произведению радиуса-вектора материальной точки на вектор ее количества движения:**

$$\boxed{\bar{K}_O = \bar{r} \times \bar{Q} = \bar{r} \times m\bar{v}.}$$

В проекциях на оси:

$$\bar{K}_O = \bar{r} \times m\bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ mv_x & mv_y & mv_z \end{vmatrix} = [y(mv_z) - z(mv_y)]\bar{i} + [z(mv_x) - x(mv_z)]\bar{j} + [x(mv_y) - y(mv_x)]\bar{k}.$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} K_x &= y(mv_z) - z(mv_y); \\ K_y &= z(mv_x) - x(mv_z); \\ K_z &= x(mv_y) - y(mv_x). \end{aligned}$$



- **Кинетический момент системы материальных точек относительно некоторого центра** – **геометрическая сумма моментов количеств движений всех материальных точек относительно этого же центра:**

$$\boxed{\bar{K}_O = \bar{K}_{1O} + \bar{K}_{2O} + \ldots + \bar{K}_{nO} = \sum \bar{K}_{iO} = \sum \bar{r}_i \times m_i\bar{v}_i.}$$

В проекциях на оси: $\boxed{K_x = \sum K_{ix}; \quad K_y = \sum K_{iy}; \quad K_z = \sum K_{iy}.}$

- **Теорема об изменении момента количества движения системы** – Рассмотрим систему *n* материальных точек. Приложенные к каждой точке силы разделим на внешние и внутренние и заменим их на соответствующие равнодействующие $\boldsymbol{F}_k^e$ и $\boldsymbol{F}_k^i$. Запишем для каждой точки основное уравнение динамики: $\boxed{m_k\bar{a}_k = \bar{F}_k^e + \bar{F}_k^i}$ или $m_k \dfrac{d\bar{v}_k}{dt} = \bar{F}_k^e + \bar{F}_k^i.$

Умножим векторно каждое из равенств на радиус-вектор слева: $\bar{r}_k \times m_k \dfrac{d\bar{v}_k}{dt} = \bar{r}_k \times \bar{F}_k^e + \bar{r}_k \times \bar{F}_k^i.$

Просуммируем эти уравнения по всем точкам: $\sum \bar{r}_k \times m_k \dfrac{d\bar{v}_k}{dt} = \boxed{\sum \bar{r}_k \times \bar{F}_k^e} + \boxed{\sum \bar{r}_k \times \bar{F}_k^i}.$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$\bar{M}_O^e \qquad \bar{M}_O^i = 0$$

Посмотрим, можно ли вынести знак производной за пределы векторного произведения:

$$\frac{d}{dt}(\bar{r}_k \times m_k\bar{v}_k) = \boxed{\frac{d\bar{r}_k}{dt} \times m_k\bar{v}_k} + \bar{r}_k \times m_k \frac{d\bar{v}_k}{dt} = \bar{r}_k \times m_k \frac{d\bar{v}_k}{dt}.$$

$$\bar{v}_k \times m_k\bar{v}_k = 0 \quad (\sin(\bar{v}_k, m_k\bar{v}_k) = 0)$$

Таким образом, получили: $\sum \dfrac{d}{dt}(\bar{r}_k \times m_k\bar{v}_k) = \bar{M}_O^e.$

Заменим сумму производных на производную суммы: $\dfrac{d}{dt}(\sum \bar{r}_k \times m_k\bar{v}_k) = \bar{M}_O^e.$

Выражение в скобках есть момент количества движения системы. Отсюда:

$$\boxed{\frac{d\bar{K}_O}{dt} = \bar{M}_O^e.}$$

Производная вектора момента количества движения системы относительно некоторого центра по времени равна главному моменту внешних сил системы относительно этого же центра.

В проекциях на координатные оси: $\boxed{\dfrac{dK_x}{dt} = M_x^e; \quad \dfrac{dK_y}{dt} = M_y^e; \quad \dfrac{dK_z}{dt} = M_z^e.}$

Производная момента количества движения системы относительно некоторой оси по времени равна главному моменту внешних сил системы относительно этой же оси.