Метод тригонометрических подстановок

Презентацию выполнил:
Ведин Артём

Тригонометрическая подстановка используется в тех случаях, когда область определения исходного уравнения совпадает с областью значения тригонометрической функции или включается в эту область.

Выбор той или иной функции при этом зависит от вида уравнения, неравенства, их систем или алгебраического выражения, которое требуется упростить.

Если из условия задачи следует, что допустимые значения переменной определяются неравенством $|x|\leq1$, то удобны замены $x=\cos a$ или $x=\sin a$.

В первом случае достаточно рассмотреть $a\in[-\pi/2;\pi/2]$, так как на этом промежутке непрерывная функция $y=\sin x$ возрастает, поэтому каждое свое значение принимает ровно в одной точке.

Непрерывная функция $y=\cos x$ убывает на промежутке $[0;\pi]$, поэтому также каждое свое значение принимает ровно в одной точке. Вот почему в случае замены $x=\cos a$, достаточно взять $a \in [0;\pi]$.

В случаях, когда переменная может принимать любые действительные значения, используются замены $x=\mathrm{tg}\ a$, $a\in(-\pi/2;\pi/2)$ или $x=\mathrm{ctg}\ a$, $a\in(0;\pi)$, так как область значения функции $y=\mathrm{tg}\ x$ и $y=\mathrm{ctg}\ x$ на соответствующих промежутках есть множество всех действительных чисел.

Когда выражение зависит от двух переменных x и y, целесообразно положить $x=r\ \sin a$, $y=r\cos a$, где $r\in R$, $r\neq 0$. Такая замена законна. Действительно, для любых x и y существует такое $r\geq 0$, что $x^2+y^2=r^2$. При $r\neq 0$ имеем

$$\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}=1\Leftrightarrow\left(\frac{x}{r}\right)^2+\left(\frac{y}{r}\right)^2=1$$

А числа, сумма квадратов которых равна единице, по модулю не превосходят единицы и их можно рассматривать как *синус* и *косинус* некоторого угла. Геометрический смысл такой замены состоит в следующем: для каждой точки *(x;y)* определяется расстояние *r* до начала координат и угол *α* наклона вектора *(x;y)* к положительному направлению оси абсцисс.

Теперь решим несколько примеров

Пример 1. Решить уравнение

$$\sqrt{1-x^2}=4x^3-3x$$

Конечно, данный пример можно разрешить, возведя в квадрат, не забыв про условие. Но тогда получится уравнение шестой степени, которое решается не совсем просто.

Легче сделать так:

Пусть $x=\cos a$, $a\in[0;\pi]$, тогда

$$\sqrt{1-\cos^2\alpha} = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

$$|\sin\alpha| = \cos 3\alpha$$

$$\left[\begin{array}{l} \alpha = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ \alpha = \dfrac{3\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

Лишь три корня удовлетворяют условию $0 \le a \le \pi$:

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{8}, \alpha_2 = \frac{5\pi}{8}, \alpha_3 = \frac{3\pi}{4}$$

Пример 1

$$x_1 = \cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

$$x_2 = \cos\frac{5\pi}{8} = -\sqrt{\frac{1-\cos\frac{5\pi}{4}}{2}} = -\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = -\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

$$x_3 = \cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ответ: $\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2};\ -\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}};\ \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\right\}$

Пример 2. Решить уравнение

$$1+\sqrt{1-x}=2x\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)$$

Перепишем пример в таком виде:

$$\sqrt{1-x}=2x^2-1+2x\sqrt{1-x^2}$$

Пример 2

$$\sqrt{1-x} = 2x^2 - 1 + 2x\sqrt{1-x^2}$$

Пусть $x = \cos\alpha,\ \ \alpha \in [0;\pi];\ \ \sin\alpha \geq 0;\ \sin\dfrac{\alpha}{2} \geq 0.$

С учетом замены уравнение принимает такой вид:

$$\sqrt{1-x} = 2x^2 - 1 + 2x\sqrt{1-x^2}$$

$$\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2} = \cos 2\alpha + \sin 2\alpha$$

$$\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{2}\sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\frac{\alpha}{2} = 0$$

Используем формулу разности синусов:

$$2\sin$$

$$\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2} = \cos 2\alpha + \sin 2\alpha$$

$$\sin\left(\frac{3}{4}\alpha + \frac{\pi}{8}\right)\cdot\cos\left(\frac{5}{4}\alpha + \frac{\pi}{8}\right) = 0$$

Решение задач

Пример 2

$$\sin\left(\frac{3}{4}\alpha+\frac{\pi}{8}\right)\cdot\cos\left(\frac{5}{4}\alpha+\frac{\pi}{8}\right)=0$$

$$\left[\begin{array}{l}\alpha=-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{4\pi k}{3},\ \ k\in\mathbb{Z}\\ \alpha=\dfrac{3\pi}{10}+\dfrac{4\pi n}{5},\ \ n\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$

Учитывая, что $\alpha\in[0;\pi]$, получаем

$$\alpha=\frac{3\pi}{10}.$$

Итак, $x=\cos\frac{3\pi}{}$

$$\sin\left(\frac{3}{4}\alpha+\frac{\pi}{8}\right)\cdot\cos\left(\frac{5}{4}\alpha+\frac{\pi}{8}\right)=0$$

Ответ: $\left\{\cos\frac{3\pi}{10}\right\}.$

Пример 3. Решить уравнение

$$8x^3 - 6x - \sqrt{3} = 0$$

Поделим все члены уравнения на 2. Уравнение примет вид

$$4x^3 - 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Пример 3

$$4x^3 - 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Докажем, что все корни данного уравнения по модулю не превосходят единицы.

Пусть $|x|>1$, тогда $|4x^2-3|>1$, $|x(4x^2-3)|>1$. Получили, что при $|x|>1$ левая част

$$4x^3 - 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

одулю больше ед – меньше единицы, что невозможно.

Пример 3

$$4x^3 - 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Положим $x = \cos a$, $a \in [0;\pi]$. Уравнение примет вид

$$4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Пример 3

$$4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 3\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\alpha = \pm\frac{\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$$

Услови

$$4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

оряют три значения

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{18}, \alpha_2 = \frac{11\pi}{18}, \alpha_3 = \frac{13\pi}{18}$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = \cos\dfrac{\pi}{18} \\ x_2 = \cos\dfrac{11\pi}{18} \\ x_3 = \cos\dfrac{13\pi}{18} \end{array}\right.$$

Поскольку кубическое уравнение не может иметь больше трех различных корней, то мы нашли все решения.

Ответ: $\left\{\cos\dfrac{\pi}{18}; \cos\dfrac{11\pi}{18}; \cos\dfrac{13\pi}{18}\right\}.$

Пример 4. Решить уравнение

$$2^{3x} - 3 \cdot 2^{x} - \sqrt{3} = 0$$

Пусть $x=t+1$, тогда уравнение перепишется в виде

$$2^{3(t+1)} - 3 \cdot 2^{t+1} - \sqrt{3} = 0$$

$$8 \cdot 2^{3t} - 6 \cdot 2^{t} - \sqrt{3} = 0$$

$$4 \cdot 2^{3t} - 3 \cdot 2^{t} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

Введем замену $2^{t} = q, \;\; q > 0$

$$4q^{3} - 3q - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$4q^3 - 3q - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

Это уравнение мы уже решали. Его корни

$$\left[\begin{array}{l} q_1 = \cos\frac{\pi}{18} \\ q_2 = \cos\frac{11\pi}{18} \\ q_3 = \cos\frac{13\pi}{18} \end{array}\right.$$

Два последних значения меньше нуля, поэтому нам подходит только

$$4q^3 - 3q - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$q = \cos\frac{\pi}{18}$$

Перейдем к переменной *t*, а затем к переменной *x*

$$2^t = \cos\frac{\pi}{18}$$

$$t = \log_2 \cos\frac{\pi}{18}$$

$$x = \log_2 \cos\frac{\pi}{18} + 1 = \log_2\left(2\cos\frac{\pi}{18}\right)$$

$$q = \cos\frac{\pi}{18} \qquad \text{Ответ: } \log_2\left(2\cos\frac{\pi}{18}\right)$$

Пример 5. При каких a неравенство имеет решение.

$$3xy - 4x^2 < a(x^2 + y^2)$$

$x=y=0$ не является решением неравенства, поэтому поделим обе части неравенства на x^2+y^2.

$$\frac{3xy - 4x^2}{x^2 + y^2} < a$$

Неравенство имеет решение при a большем наименьшего значения выражения

$$\frac{3xy - 4x^2}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{3xy - 4x^2}{x^2 + y^2}$$

Положим $x = r\cos a$, $y = r\sin a$, $a \in [0;\pi]$, тогда

$$A = \frac{3r^2 \sin\alpha \cdot \cos\alpha - 4r^2 \cos^2\alpha}{r^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)} =$$

$$= \frac{3}{2}\sin 2\alpha - 4\cos^2\alpha =$$

$$= \frac{3}{2}\sin 2\alpha - 2\cos 2\alpha - 2 =$$

$$= \frac{5}{2}\left(\frac{3}{5}\sin 2\alpha - \frac{4}{5}\cos 2\alpha\right) - 2 =$$

$$= \frac{5}{2}\sin(2\alpha \frac{3xy - 4x^2}{x^2 + y^2} \text{где } \cos\varphi = \frac{3}{5}, \sin\varphi = \frac{4}{5}.$$

Пример 5

Оценим выражение $\frac{5}{2}\sin(2\alpha-\varphi)-2$

$$-1 \le \sin(2\alpha-\varphi) \le 1$$

$$-\frac{5}{2} \le \frac{5}{2}\sin(2\alpha-\varphi) \le \frac{5}{2}$$

$$-\frac{9}{2} \le \frac{5}{2}\sin(2\alpha-\varphi)-2 \le \frac{1}{2}$$

$$-\frac{9}{2} \le A \le \frac{1}{2}$$

Наименьшее значение выражения равно −4,5. Значит, при *a*>−4,5 неравен $\frac{5}{2}\sin(2\alpha-\varphi)-2$ ение.

Ответ: *a*>−4,5

Презентация окончена

Спасибо за внимание.