

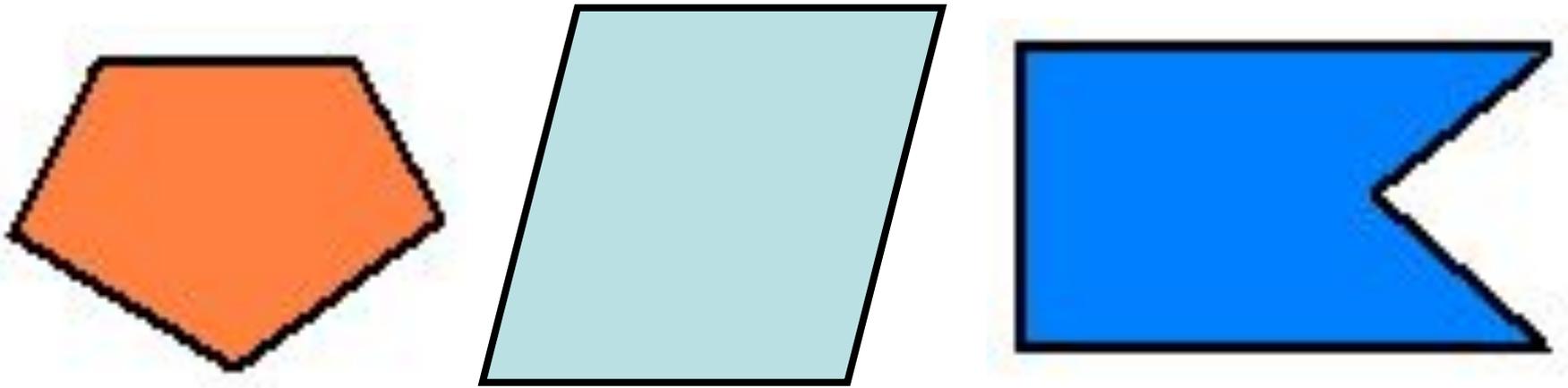
Площади

Геометрия 8 класс

(к учебнику «Геометрия 7-9», авторы Л.С. Атанасян,
В.Ф. Бутузов и другие)

Остроухова Елена Геннадьевна, учитель математики ВКК, МОУ СОШ №54 с углубленным изучением
предметов социально-гуманитарного цикла города Новосибирска

Понятие площади многоугольника



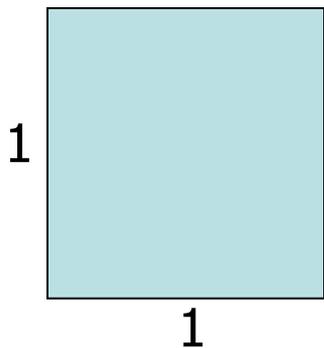
Площадь многоугольника –

это величина той части плоскости, которую занимает многоугольник.

Единицы измерения площади

За единицу измерения площади
принимают площадь квадрата,
сторона которого равна единице измерения отрезков.

$$S = 1 \text{ кв. ед.}$$



$$1 \text{ дм}^2 = 100 \text{ см}^2;$$

$$1 \text{ м}^2 = 10\,000 \text{ см}^2$$

$$1 \text{ см}^2 = 100 \text{ мм}^2;$$

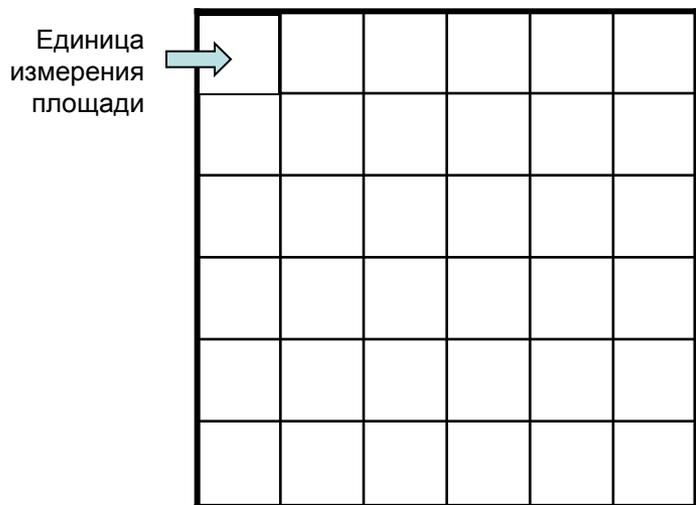
$$1 \text{ м}^2 = 100 \text{ дм}^2$$

Измерение площади палеткой

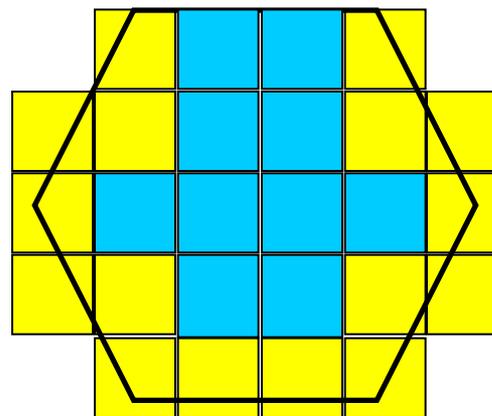
Площадь многоугольника выражается положительным числом.

Это число показывает сколько раз единица измерения площади и её части укладываются в данном многоугольнике.

Палетка



Многоугольник

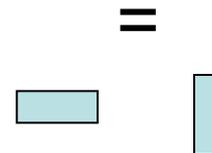


$$S_{\text{фигуры}} = \text{Число целых квадратов} + \frac{1}{2} \bullet \text{число частей квадратов}$$

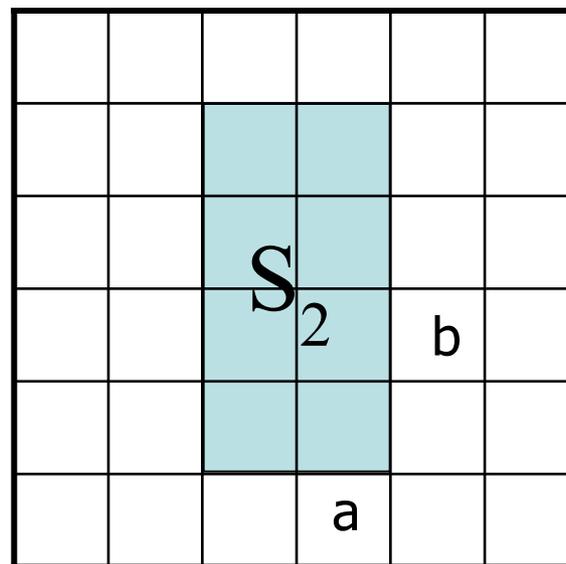
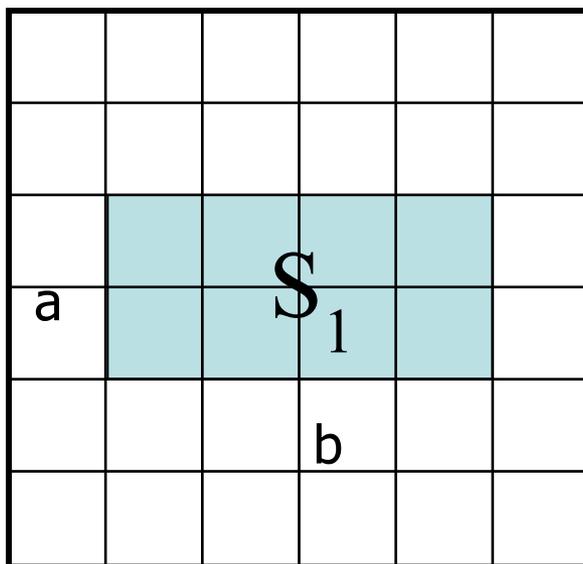
$$S_{\text{фигуры}} = 10 + \frac{1}{2} \bullet 16 \approx 18 \text{ (кв. ед.)}$$

Свойства площадей

1. Равные многоугольники имеют равные площади.

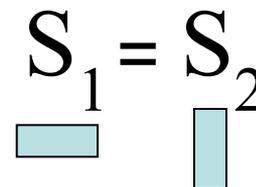


Палетка

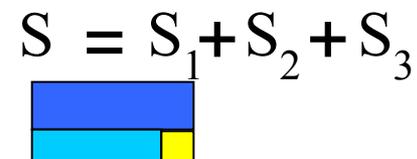


Свойства площадей

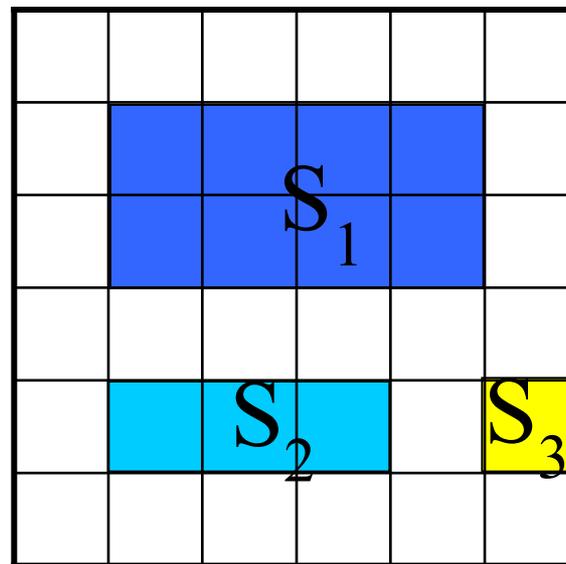
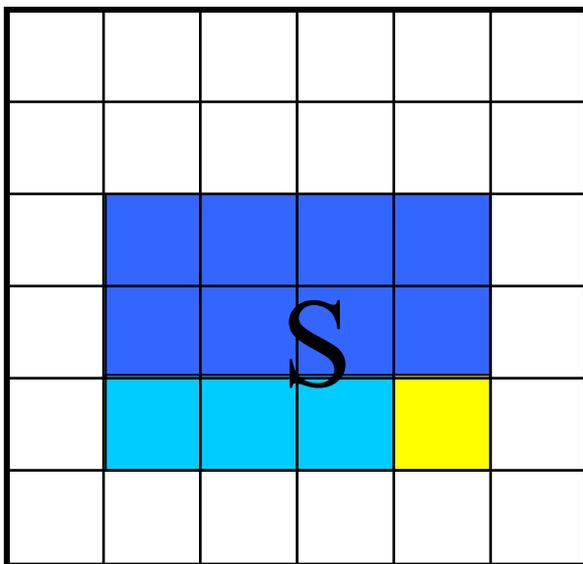
1. Равные многоугольники имеют равные площади.



2. Если многоугольник составлен из нескольких многоугольников, то его площадь равна сумме площадей этих многоугольников.



Палетка



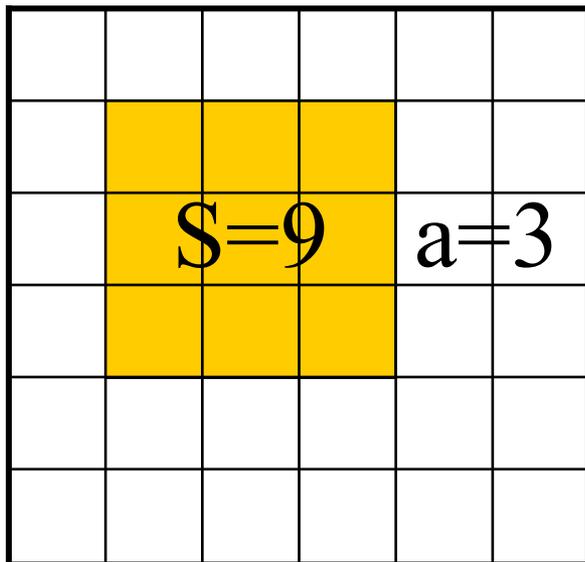
Свойства площадей

1. Равные многоугольники имеют равные площади.
2. Если многоугольник составлен из нескольких многоугольников, то его площадь равна сумме площадей этих многоугольников.
3. Площадь квадрата равна квадрату его стороны.

$$S_1 = S_2$$


$$S = S_1 + S_2 + S_3$$


Палетка

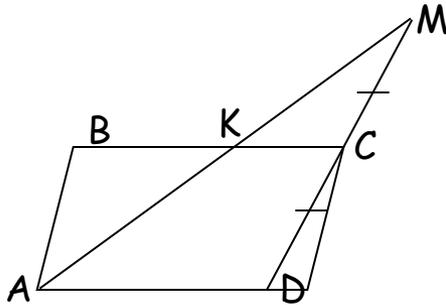


$$S=a^2$$

Примеры решения задач (1)

№1. На продолжении стороны DC параллелограмма ABCD за точку C отмечена точка M так, что $DC=CM$.

Доказать, что $S_{ABCD} = S_{AMD}$



Дано:

$ABCD$ - параллелограмм

$MC = CD$

Доказать:

$S_{ABCD} = S_{AMD}$

Решение:

Обозначим точку пересечения отрезков AM и BC точкой K .

Параллелограмм $ABCD$ состоит из двух фигур: треугольника ABK и трапеции $AKCD$.

Треугольник AMD состоит из двух фигур: треугольника KMC и трапеции $AKCD$.

Значит, по свойству площадей

$$S_{ABCD} = S_{ABK} + S_{AKCD}$$

$$S_{AMD} = S_{KMC} + S_{AKCD}$$

Рассмотрим $\triangle ABK$ и $\triangle KMC$

$MC = CD$ (по условию)

$AB = CD$ (как противоположные стороны параллелограмма)

Значит, $MC = AB$

$AB \parallel DC$, следовательно, $\angle ABK = \angle KMC$ как накрест лежащие при секущей BC .

$BK = KC$ (по теореме Фалеса)

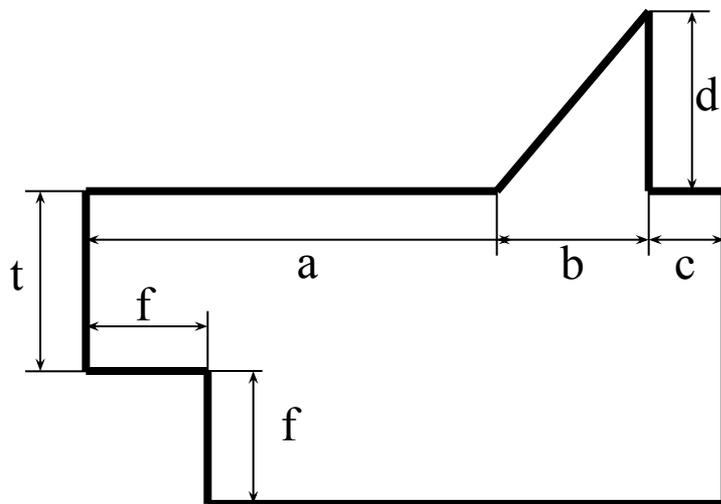
Следовательно, $\triangle ABK = \triangle KMC$,

следовательно, $S_{ABK} = S_{KMC}$,

следовательно, $S_{ABCD} = S_{AMD}$

Примеры решения задач (2)

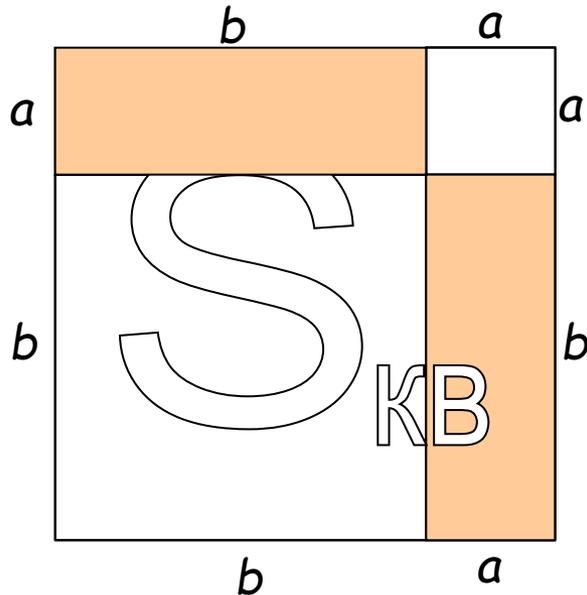
№2. Составить формулу для вычисления площади фигуры, изображенной на чертеже



№3. На продолжении стороны квадрата AD квадрата ABCD за вершину A взята точка M, $MC=20$ дм, $\angle CMD=30^\circ$.
Найти площадь квадрата.

Площадь прямоугольника

Площадь прямоугольника равна
произведению его смежных сторон.



Дано:

a, b - стороны прямоугольника

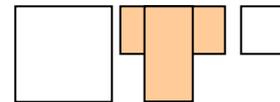
Доказать:

$$S = ab$$

Доказательство:

$$S_{\text{КВ}} = (a + b)^2$$

$$S_{\text{КВ}} = S_1 + 2S + S_2$$



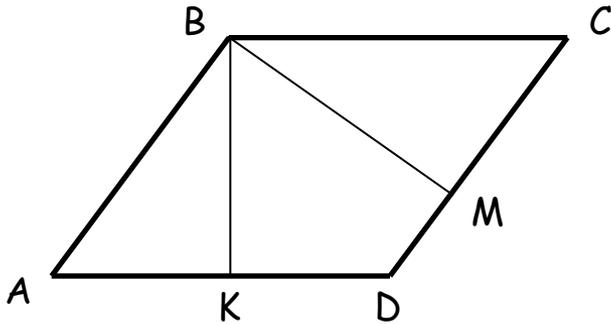
$$S_1 = b^2, \quad S_2 = a^2$$

$$(a + b)^2 = b^2 + 2S + a^2$$

$$\underline{a^2} + 2ab + \underline{b^2} = \underline{b^2} + 2S + \underline{a^2}$$
$$S = ab$$

Площадь параллелограмма

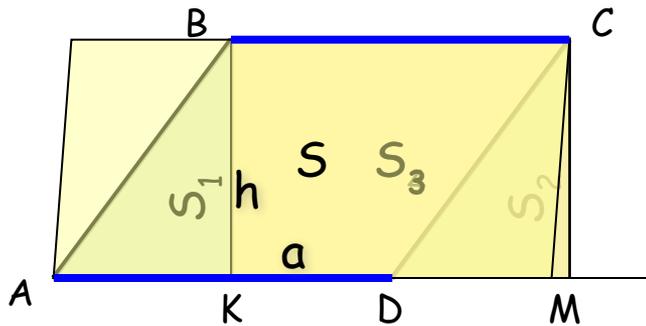
Площадь параллелограмма равна произведению стороны на высоту, к ней проведенную.



$$S = AD \cdot BK$$

Площадь параллелограмма

Площадь параллелограмма равна произведению стороны на высоту, к ней проведенную.



Доказать:

$$S = AD \cdot BK$$

Доказательство:

$$BK = CM \text{ (почему?)}$$

ABCM - трапеция (почему?)

$$S_4 = S_1 + S_3 \text{ по свойству площадей}$$

или

$$S_4 = S + S_2$$

$$S_1 + S_3 = S + S_2$$

Докажите, что $S_1 = S_2$

$$S_3 = S$$

$$S_3 = BC \cdot BK$$

Значит, и $S = BC \cdot BK$

Но $BC = AD$

Поэтому $S = AD \cdot BK$

S - площадь параллелограмма ABCD

S_1 - площадь треугольника ABK

S_2 - площадь треугольника DCM

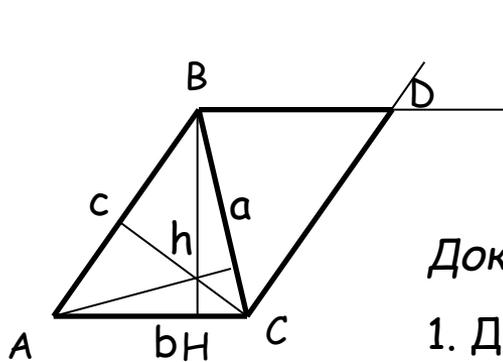
S_3 - площадь прямоугольника KBMC

S_4 - площадь трапеции ABCM

$$S = a \cdot h$$

Площадь треугольника

Площадь треугольника равна половине произведения стороны на высоту, к ней проведенную.



$$S = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h$$

Доказательство:

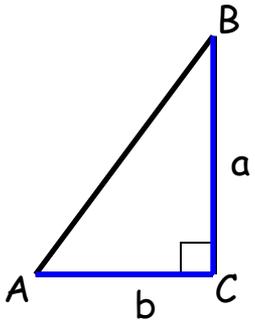
1. Построим треугольник ABC до параллелограмма ABDC.
2. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle BDC$
3. Что можно сказать о площадях этих треугольников?
4. Чему равна площадь параллелограмма ABDC?
5. Сравните площади параллелограмма ABDC и треугольника ABC.

$$6. S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot S_{ABDC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BH$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h, \text{ где } AD = a, BH = h$$

Частные случаи площади треугольника

Площадь прямоугольного треугольника



BC - высота $\triangle ABC$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC$$

AC и BC - катеты прямоугольного треугольника $\triangle ABC$,

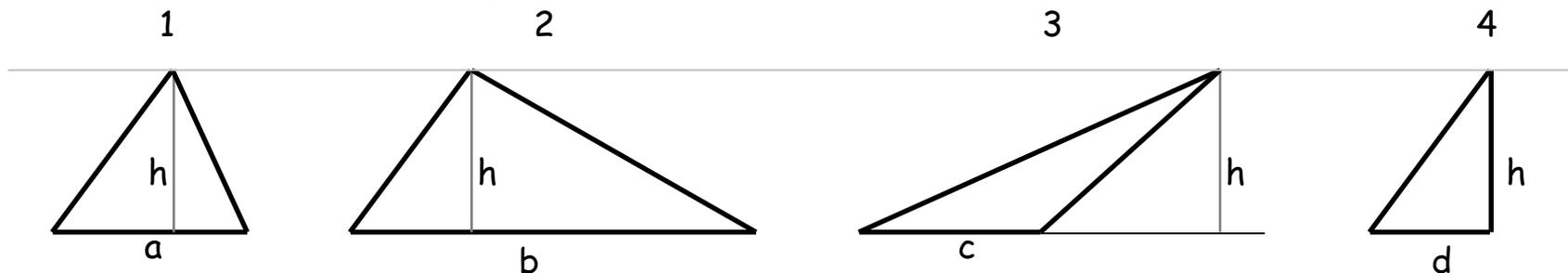
$$AC = b, BC = a$$

значит,
$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$$

Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения катетов.

Частные случаи площади треугольника

Площади треугольников с одинаковой высотой



Треугольники, изображенные выше имеют одинаковую высоту h и разные основания.

Площади каждого треугольника равны:

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h \quad S_2 = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h \quad S_3 = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h \quad S_4 = \frac{1}{2} \cdot d \cdot h$$

Найдите отношение площадей:

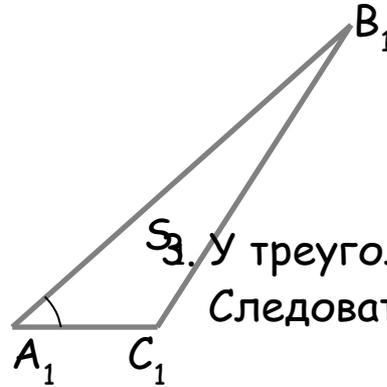
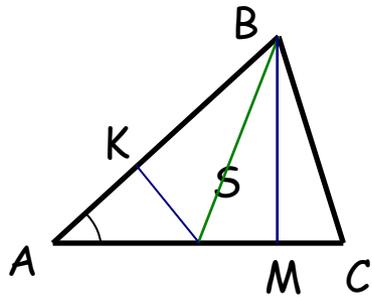
$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot a \cdot h}{\frac{1}{2} \cdot b \cdot h} \quad \frac{S_1}{S_3} = \frac{a}{c} \quad \frac{S_1}{S_4} = \frac{a}{d} \quad \frac{S_2}{S_3} = \frac{b}{c}$$

Сделайте вывод:

Отношение площадей треугольников, имеющих равную высоту равно ...
отношению их оснований.

Частные случаи площади треугольника

Если треугольники имеют равные углы, то их площади относятся, как произведения сторон, содержащих эти углы.



$$\frac{S}{S_1} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}$$

1. Наложим треугольники, совместив равные углы.

2. Проведем отрезок BC_1 .

Получили вспомогательный треугольник ABC_1 .

3. У треугольников ABC_1 и $A_1B_1C_1$ одна высота C_1K .

Следовательно,

$$\frac{S_{ABC_1}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{AB}{A_1B_1}$$

4. У треугольников ABC_1 и ABC одна высота BM .

Следовательно,

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ABC_1}} = \frac{AC}{AC_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$$

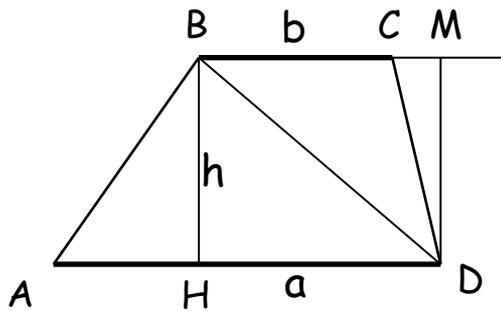
5. Найдем произведение этих отношений площадей:

$$\frac{S_{ABC_1}}{S_{A_1B_1C_1}} \cdot \frac{S_{ABC}}{S_{ABC_1}} = \frac{AB}{A_1B_1} \cdot \frac{AC}{A_1C_1}$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}$$

Площадь трапеции

Площадь трапеции равна
произведению полусуммы оснований на высоту.



$$S = \frac{AD + BC}{2} \cdot BH$$

$$S = \frac{a + b}{2} \cdot h$$

Доказательство:

1. Проведем диагональ трапеции BD.
2. По свойству площадей
площадь трапеции равна $S = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BCD}$
3. Проведем ещё одну высоту DM к основанию BC.

Равны ли BH и DM? Почему?

$$4. S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot BH \quad S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot DM$$
$$S = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot BH + \frac{1}{2} \cdot BC \cdot DM = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot BH + \frac{1}{2} \cdot BC \cdot BH$$
$$S = \frac{1}{2} \cdot (AD + BC) \cdot BH = \frac{AD + BC}{2} \cdot BH$$