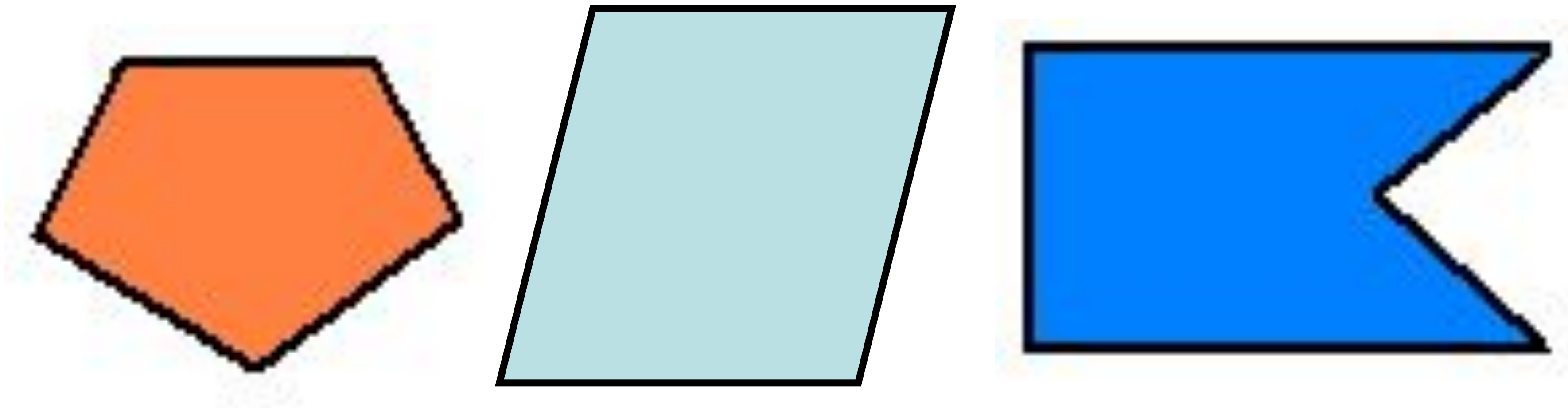
Площади

Геометрия
8 класс

(к учебнику «Геометрия 7-9», авторы Л.С. Атанасян,
В.Ф. Бутузов и другие)

Остроухова Елена Геннадьевна, учитель математики ВКК, МОУ СОШ №54 с углубленным изучением предметов социально-гуманитарного цикла города Новосибирска

Понятие площади многоугольника



Площадь многоугольника –

это величина той части плоскости, которую занимает многоугольник.

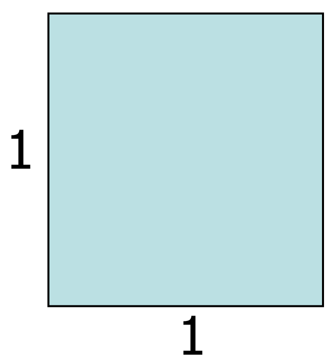
Единицы измерения площади

За единицу измерения площади

принимают площадь квадрата,

сторона которого равна единице измерения отрезков.

S = 1 кв. ед.



1 дм^2= 100 см^2;   1м^2 = 10 000 см^2

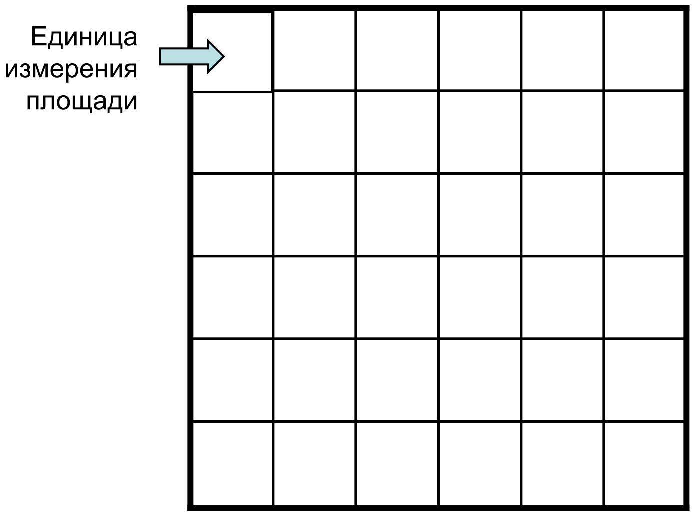
1 см^2 = 100 мм^2;   1 м^2 = 100 дм^2

Измерение площади палеткой

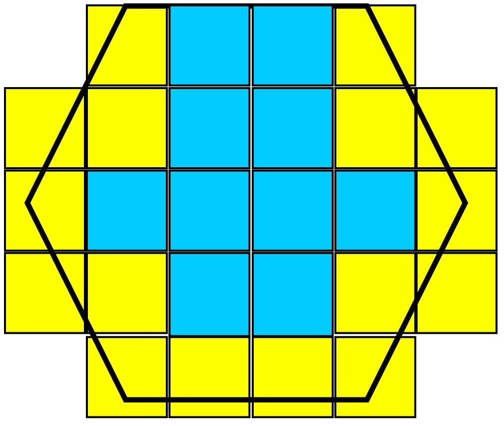
Площадь многоугольника выражается положительным числом.

Это число показывает
сколько раз единица измерения площади и её части
укладываются в данном многоугольнике.

Палетка



Многоугольник

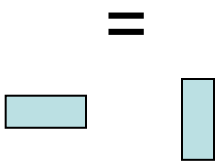


$$S_{\text{фигуры}} = \text{Число целых квадратов} + \frac{1}{2} \bullet \text{число частей квадратов}$$

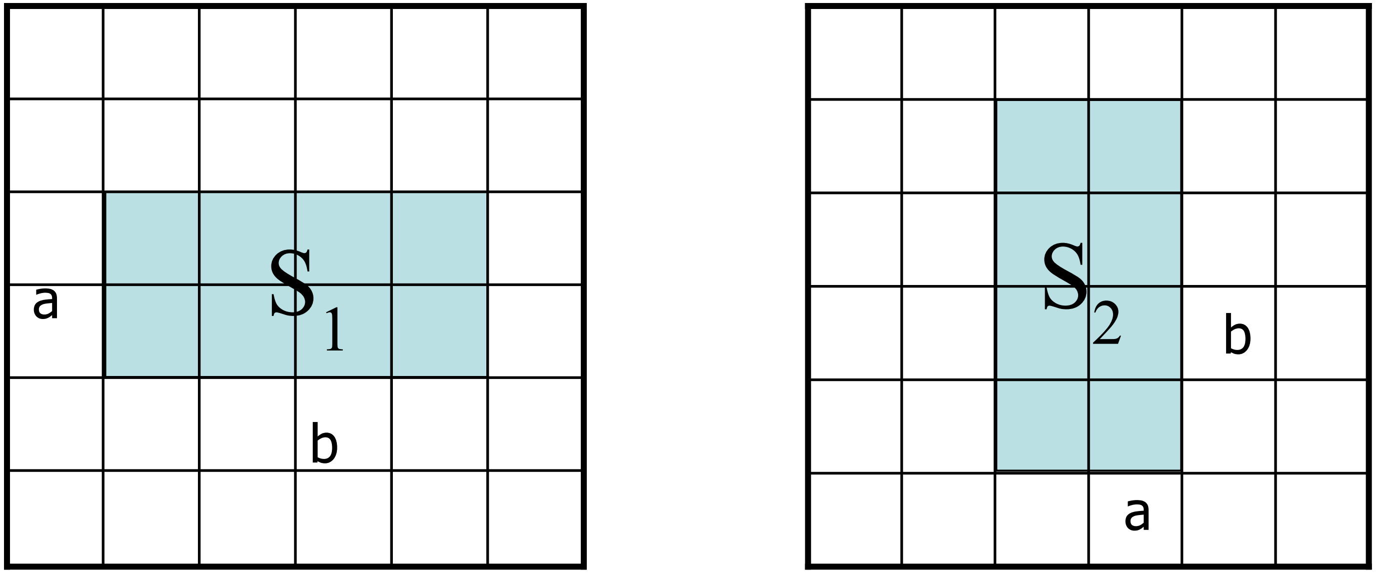
$$S_{\text{фигуры}} = 10 + \frac{1}{2} \bullet 16 \approx 18 \text{ (кв. ед.)}$$

Свойства площадей

1. Равные многоугольники имеют равные площади.



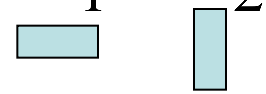
Палетка



Свойства площадей

1. Равные многоугольники имеют равные площади.

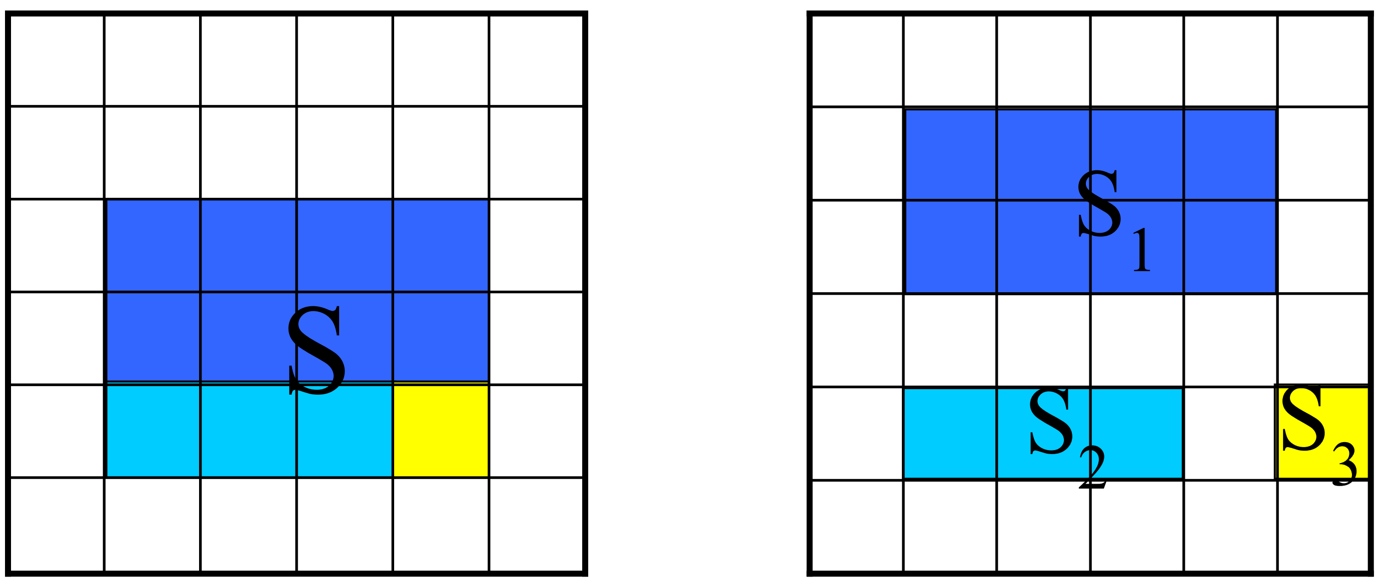
$$S_1 = S_2$$



2. Если многоугольник составлен из нескольких многоугольников, то его площадь равна сумме площадей этих многоугольников.

$$S = S_1 + S_2 + S_3$$

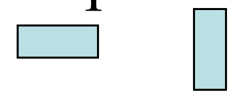
Палетка



Свойства площадей

1. Равные многоугольники имеют равные площади.

$$S_1 = S_2$$

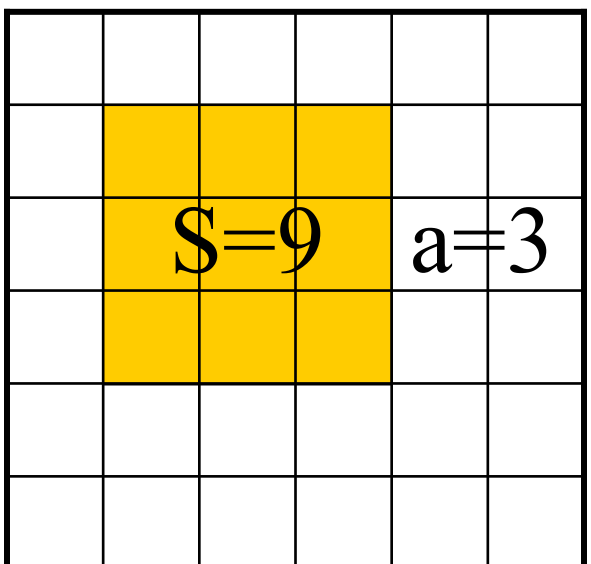


2. Если многоугольник составлен из нескольких многоугольников, то его площадь равна сумме площадей этих многоугольников.

$$S = S_1 + S_2 + S_3$$

3. Площадь квадрата равна квадрату его стороны.

Палетка

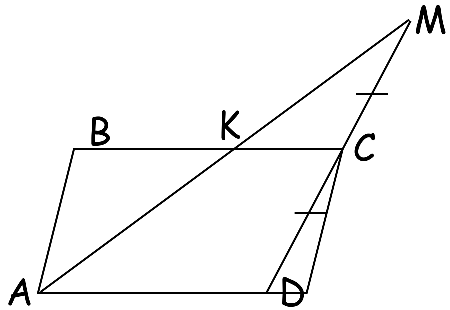


$$S=a^2$$

Примеры решения задач (1)

№1. На продолжении стороны DC параллелограмма ABCD за точку C отмечена точка M так, что DC=CM.

Доказать, что $S_{ABCD}=S_{AMD}$



Дано:

ABCD – параллелограмм

MC = CD

Доказать:

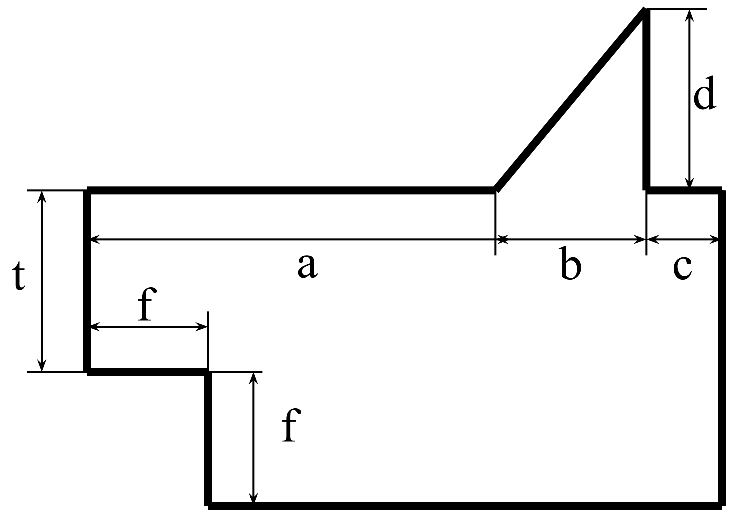
$S_{ABCD} = S_{AMD}$

Решение:

Обозначим точку пересечения отрезков AM и BC точкой K.
Параллелограмм ABCD состоит из двух фигур: треугольника ABK и трапеции AKCD.
Треугольник AMD состоит из двух фигур: треугольника KMC и трапеции AKCD.
Значит, по свойству площадей
$S_{ABCD}=S_{ABK}+S_{AKCD}$
$S_{AMD}=S_{KMC}+S_{AKCD}$
Рассмотрим ΔABK и ΔKMC
MC=CD (по условию)
AB=CD (как противоположные стороны параллелограмма)
Значит, MC=AB
$AB \parallel DC$, следовательно, $\angle ABK = \angle KMC$ как накрест лежащие при секущей BC.
BK=KC (по теореме Фалеса)
Следовательно, $\Delta ABK = \Delta MCK$,
следовательно, $S_{ABK}=S_{MCK}$,
следовательно, $S_{ABCD}=S_{AMD}$

Примеры решения задач (2)

№2. Составить формулу для вычисления площади фигуры, изображенной на чертеже



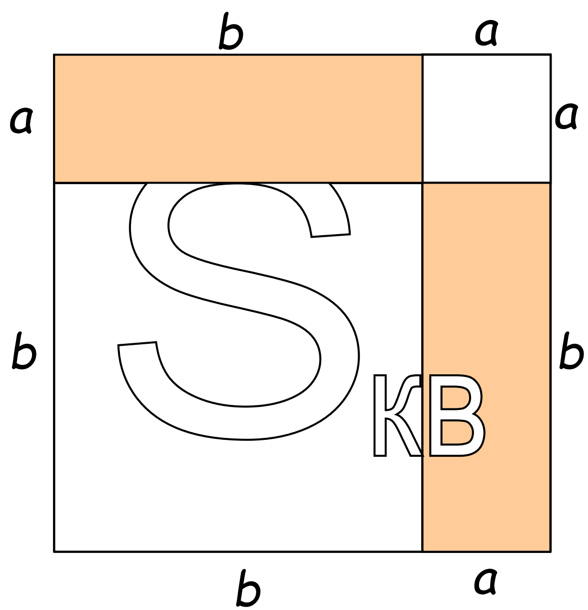
№3. На продолжении стороны квадрата AD квадрата ABCD за вершину A взята точка M,

MC=20 дм, ∠ CMD=30^0.

Найти площадь квадрата.

Площадь прямоугольника

Площадь прямоугольника равна произведению его смежных сторон.



Дано:

a, b – стороны прямоугольника

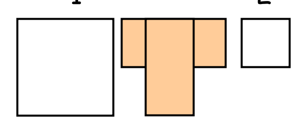
Доказать:

S = ab

Доказательство:

$S_{кв} = (a + b)^2$

$S_{кв} = S_1 + 2S + S_2$



$S_1 = b^2, \quad S_2 = a^2$

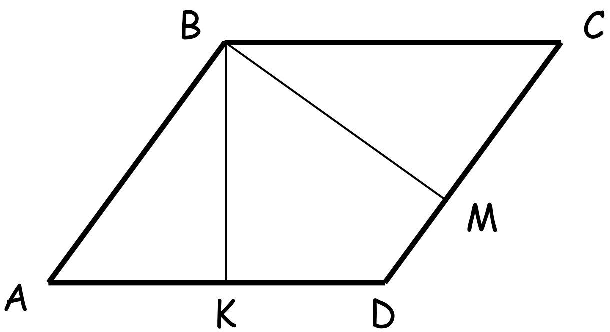
$(a + b)^2 = b^2 + 2S + a^2$

$a^2 + 2ab + b^2 = b^2 + 2S + a^2$

$S = ab$

Площадь параллелограмма

Площадь параллелограмма равна произведению стороны на высоту, к ней проведенную.

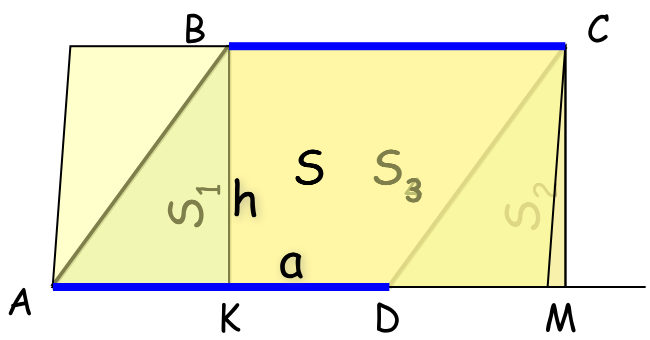


$S = AD \cdot BK$

$S = CD \cdot BM$

Площадь параллелограмма

Площадь параллелограмма равна произведению стороны на высоту, к ней проведенную.



S – площадь параллелограмма ABCD
S_1 – площадь треугольника ABK
S_2 – площадь треугольника DCM
S_3 – площадь прямоугольника KBCM
S_4 – площадь трапеции ABCM

$$\boxed{S = a \cdot h}$$

Доказать:

$S = AD \cdot BK$

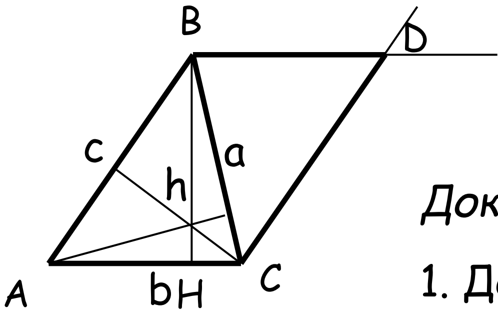
Доказательство:

BK = CM (почему?)
ABCM - трапеция (почему?)

$S_4 = S_1 + S_3$ по свойству площадей
или
$S_4 = S + S_2$
$S_1 + S_3 = S + S_2$
Докажите, что $S_1 = S_2$
$S_3 = S$
$S_3 = BC \cdot BK$
Значит, и $S = BC \cdot BK$
Но $BC = AD$
Поэтому $S = AD \cdot BK$

Площадь треугольника

Площадь треугольника равна
половине произведения стороны на высоту, к ней проведенную.



$$S=\frac{1}{2}\cdot b\cdot h$$

Доказательство:

1. Достроим треугольник ABC до параллелограмма ABDC.

2. Докажите, что $\Delta ABC = \Delta BDC$

3. Что можно сказать о площадях этих треугольников?

4. Чему равна площадь параллелограмма ABDC?

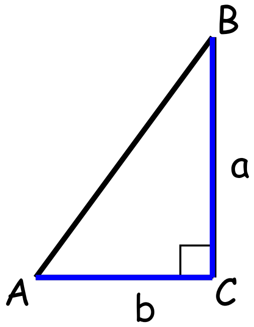
5. Сравните площади параллелограмма ABDC и треугольника ABC.

6. $$S_{\Delta}=\frac{1}{2}\cdot S_{ABDC}=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BH$$

$$\boxed{S_{\Delta}=\frac{1}{2}\cdot a\cdot h,}\ \text{где } AD=a,\ BH=h$$

Частные случаи площади треугольника

Площадь прямоугольного треугольника



BC - высота ΔABC

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC$$

AC и BC – катеты прямоугольного треугольника ΔABC,

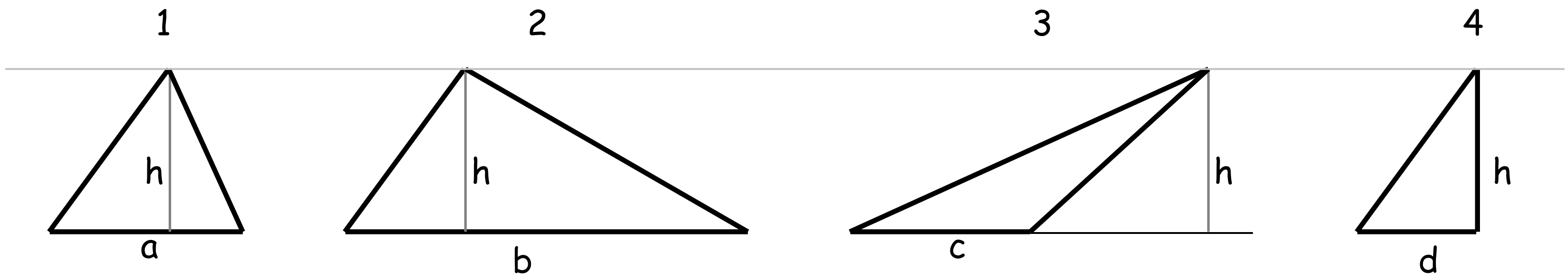
$AC = b$, $BC = a$

значит, $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$

Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения катетов.

Частные случаи площади треугольника

Площади треугольников с одинаковой высотой



Треугольники, изображенные выше имеют одинаковую высоту h и разные основания.
Площади каждого треугольника равны:

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h \qquad S_2 = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h \qquad S_3 = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h \qquad S_4 = \frac{1}{2} \cdot d \cdot h$$

Найдите отношение площадей:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot a \cdot h}{\frac{1}{2} \cdot b \cdot h} = \frac{a}{b} \qquad \frac{S_1}{S_3} = \frac{a}{c} \qquad \frac{S_1}{S_4} = \frac{a}{d} \qquad \frac{S_2}{S_3} = \frac{b}{c}$$

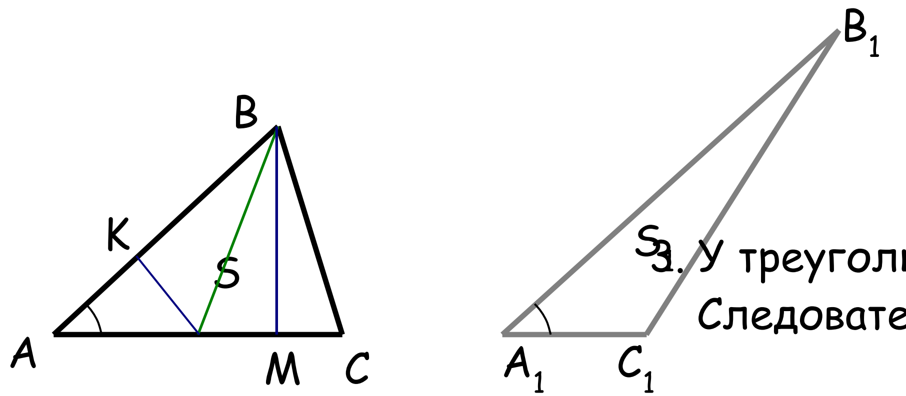
Сделайте вывод:
Отношение площадей треугольников, имеющих равную высоту равно …

отношению их оснований.

Частные случаи площади треугольника

Если треугольники имеют равные углы, то их площади относятся, как произведения сторон, содержащих эти углы.

$$\boxed{\frac{S}{S_1} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}}$$



1. Наложим треугольники, совместив равные углы.

2. Проведем отрезок BC_1.
   Получили вспомогательный треугольник ABC_1.

3. У треугольников ABC_1. и $A_1B_1C_1$ одна высота C_1K. Следовательно,

$$\frac{S_{ABC_1}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{AB}{A_1B_1}$$

4. У треугольников ABC_1. и ABC одна высота BM. Следовательно,

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ABC_1}} = \frac{AC}{AC_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$$

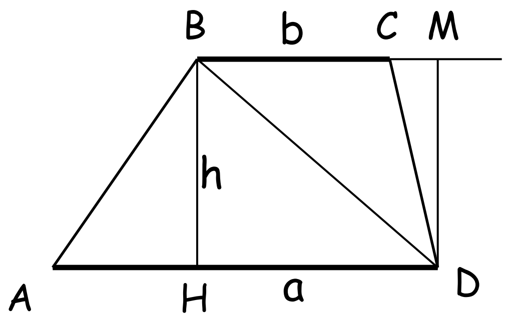
5. Найдем произведение этих отношений площадей:

$$\frac{S_{ABC_1}}{S_{A_1B_1C_1}} \cdot \frac{S_{ABC}}{S_{ABC_1}} = \frac{AB}{A_1B_1} \cdot \frac{AC}{A_1C_1}$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}$$

Площадь трапеции

Площадь трапеции равна
произведению полусуммы оснований на высоту.



$$S = \frac{AD + BC}{2} \cdot BH$$

$$S = \frac{a + b}{2} \cdot h$$

Доказательство:

1. Проведем диагональ трапеции BD.

2. По свойству площадей
   площадь трапеции равна $S = S_{\Delta ABD} + S_{\Delta BCD}$

3. Проведем ещё одну высоту DM к основанию BC.

   Равны ли BH и DM? Почему?

4. $S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot BH \qquad S_{\Delta BCD} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot DM$

$$S = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot BH + \frac{1}{2} \cdot BC \cdot DM = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot BH + \frac{1}{2} \cdot BC \cdot BH$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot (AD + BC) \cdot BH = \frac{AD + BC}{2} \cdot BH$$