



Школа абитуриента
18 ноября 2010 г.

Решение планиметрических задач С4

по материалам
ЕГЭ – 2010

Наумова Л.Г.
МОУ СОШ №3



Теория и практика

Задачи

№1

№2

№3

№4

№5

№6



Теория

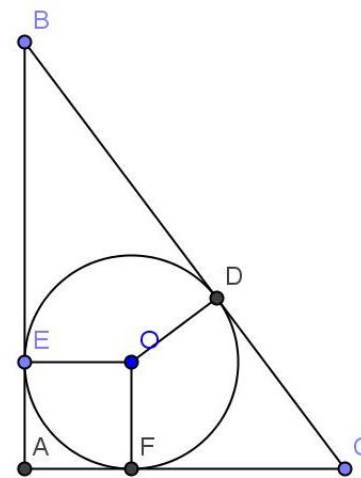
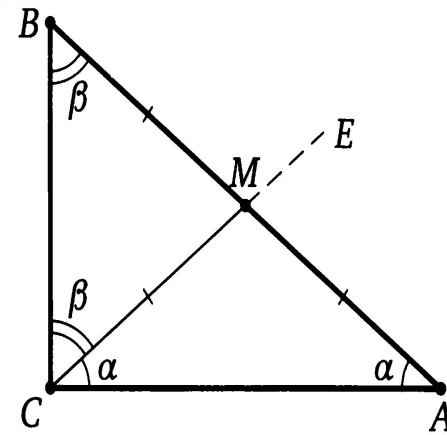
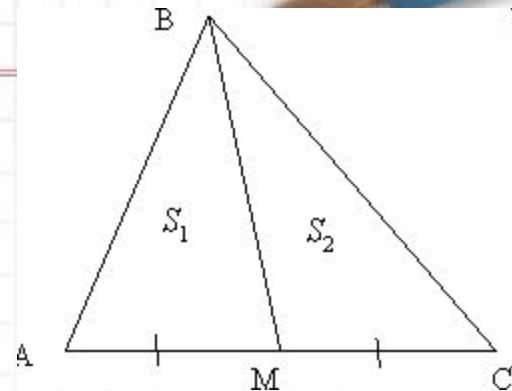
Теорема. Медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника.

Теорема. Медиана прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы.

Теорема (обратная). Если медиана треугольника равна половине его стороны, к которой она проведена, то треугольник прямоугольный.

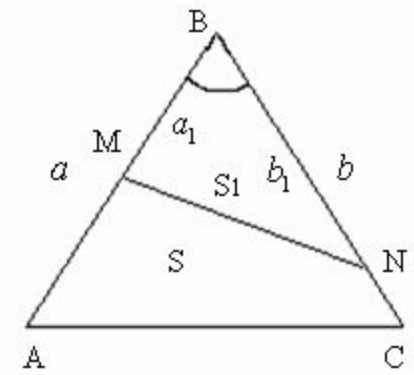
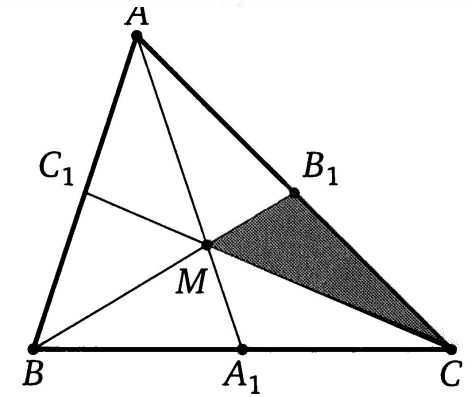
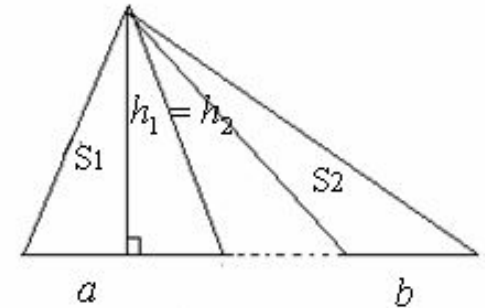
Теорема Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник равен

$$r = \frac{a+b-c}{2} = p-c \quad (\angle C = 90^\circ)$$



Теория

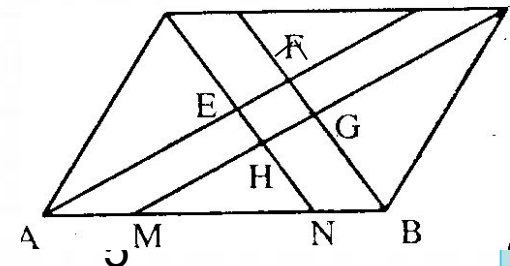
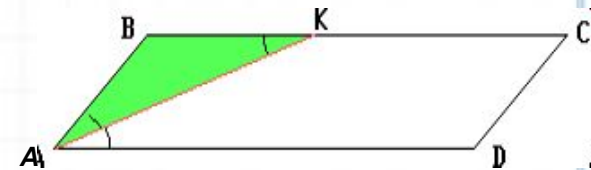
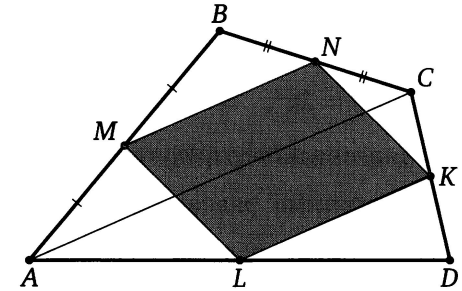
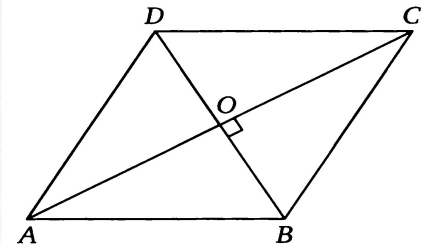
- **Теорема.** Если у двух треугольников равны высоты, то их площади относятся как основания.
- **Теорема.** Каждая медиана делится точкой пересечения в отношении 2:1, считая от вершины.
- **Теорема.** Три медианы делят треугольник на шесть равновеликих треугольников.
- **Теорема.** Отношение площадей треугольников, имеющих общий угол, равно отношению произведений сторон этого угла.



Теория



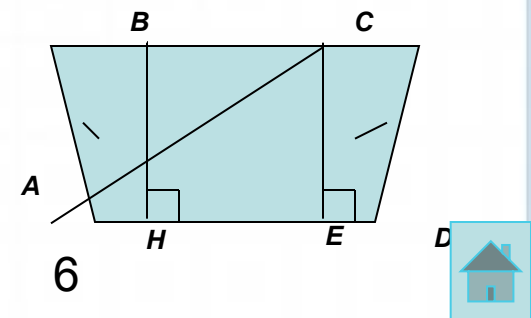
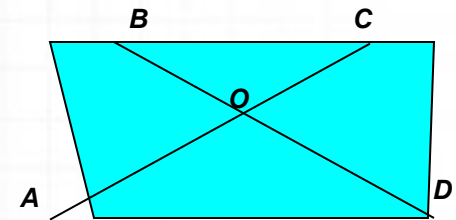
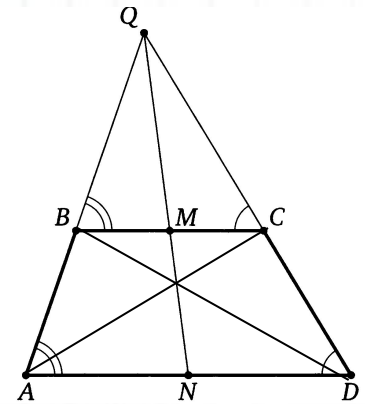
- **Теорема.** Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.
- **Теорема.** Середины сторон любого выпуклого четырехугольника являются вершинами параллелограмма.
- **Теорема.** При проведении биссектрисы угла параллелограмма образуется равнобедренный треугольник.
- **Теорема.** Биссектрисы смежных углов параллелограмма перпендикулярны, а биссектрисы противоположных углов параллельны или лежат на одной прямой.



Теория



- **Теорема** (замечательное свойство трапеции). Точка пересечения диагоналей любой трапеции, точка пересечения продолжений боковых сторон и середины оснований лежат на одной прямой.
- **Теорема.** Трапеция разбивается диагоналями на два равновеликих треугольника (примыкающих к боковым сторонам) и два подобных треугольника (примыкающих к основаниям).
- **Теорема.** Проекция боковой стороны равнобедренной трапеции на большее основание равна полуразности оснований, а проекция диагонали – полусумме оснований (средней линии).



Вспомогательная задача.

Пусть окружность вписана в треугольник ABC. Тогда расстояние от вершины A до точки касания окружности со стороной AB равно

$$x = p - a = \frac{b + c - a}{2}.$$

Доказательство.

Мы знаем, что центр вписанной в треугольник окружности лежит на пересечении биссектрис внутренних углов треугольника, значит $AM = AK = x$, $BM = BN = y$, $CK = CN = z$.

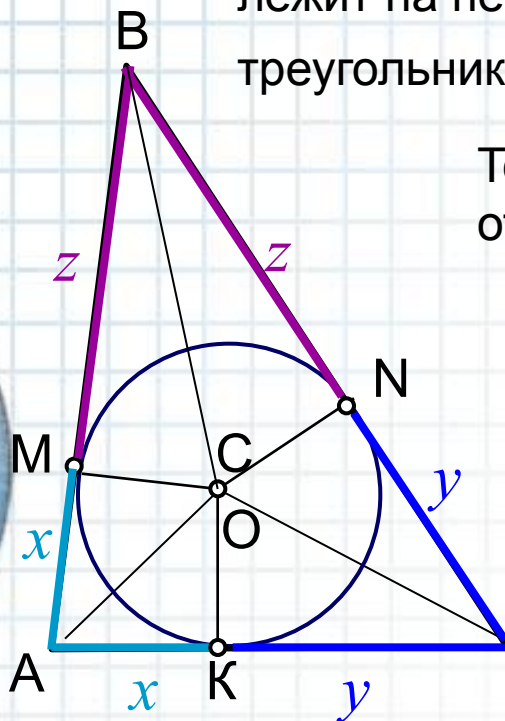
Тогда, периметр $\triangle ABC$ равен:
откуда

$$P = 2x + 2y + 2z$$

$$p = \frac{P}{2} = x + y + z,$$

$$\text{или } x = p - (y + z) = p - a,$$

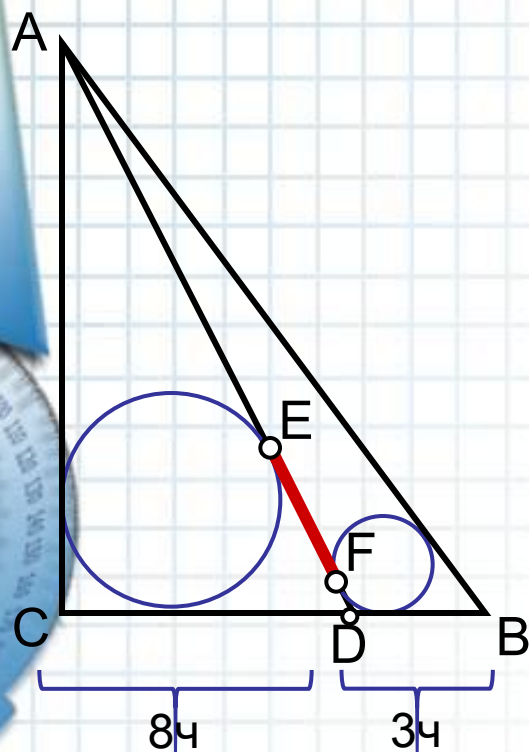
$$x = p - a = \frac{a + b + c}{2} - a = \frac{b + c - a}{2}.$$



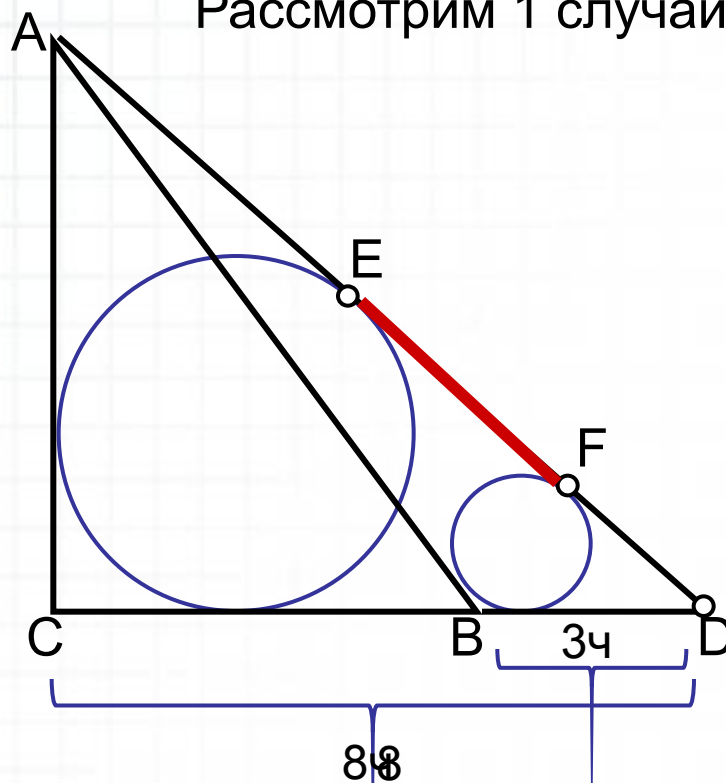
№
1

В треугольнике ABC $AB=15$, $BC = 12$, $CA = 9$. Точка D лежит на прямой BC так, что $BD:DC = 3:8$. Окружности, вписанные в каждый из треугольников ADC и ADB , касаются стороны AD в точках E и F . Найдите длину отрезка EF .

Решение. Возможны два случая: точка D лежит на отрезке BC и точка D лежит вне отрезка BC .



Рассмотрим 1 случай.



№
1

В треугольнике ABC $AB=15$, $BC = 12$, $CA = 9$. Точка D лежит на прямой BC так, что $BD:DC = 3:8$. Окружности, вписанные в каждый из треугольников ADC и ADB , касаются стороны AD в точках E и F . Найдите длину отрезка EF .

Решение. Возможны два случая: точка D лежит на отрезке BC и точка D лежит вне отрезка BC .

Рассмотрим 1 случай.

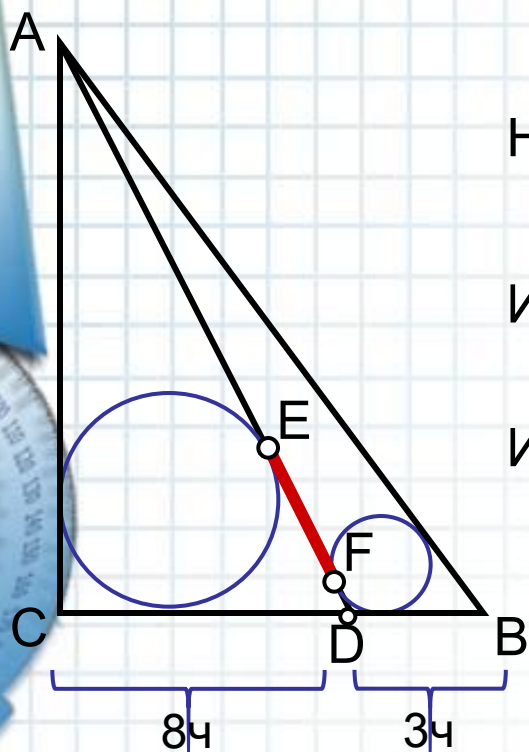
Найдем: $BD = \frac{3}{11} \cdot BC = \frac{36}{11}$, $DC = \frac{8}{11} \cdot BC = \frac{96}{11}$.

Из $\triangle ADC$, $DE = \frac{AD + DC - AC}{2} = \frac{AD + DC - 9}{2}$, ?

Из $\triangle ADB$, $DF = \frac{AD + BD - AB}{2} = \frac{AD + BD - 15}{2}$.

Значит,

$$EF = DE - DF = \frac{6 + DC - BD}{2} = \frac{63}{11}.$$



№
1

В треугольнике ABC $AB=15$, $BC = 12$, $CA = 9$. Точка D лежит на прямой BC так, что $BD:DC = 3:8$. Окружности, вписанные в каждый из треугольников ADC и ADB , касаются стороны AD в точках E и F . Найдите длину отрезка EF .

Решение. Возможны два случая: точка D лежит на отрезке BC и точка D лежит вне отрезка BC .

Рассмотрим 2 случай.

$$BC = \frac{5}{8} \cdot DC = 12, \quad DC = \frac{96}{5},$$

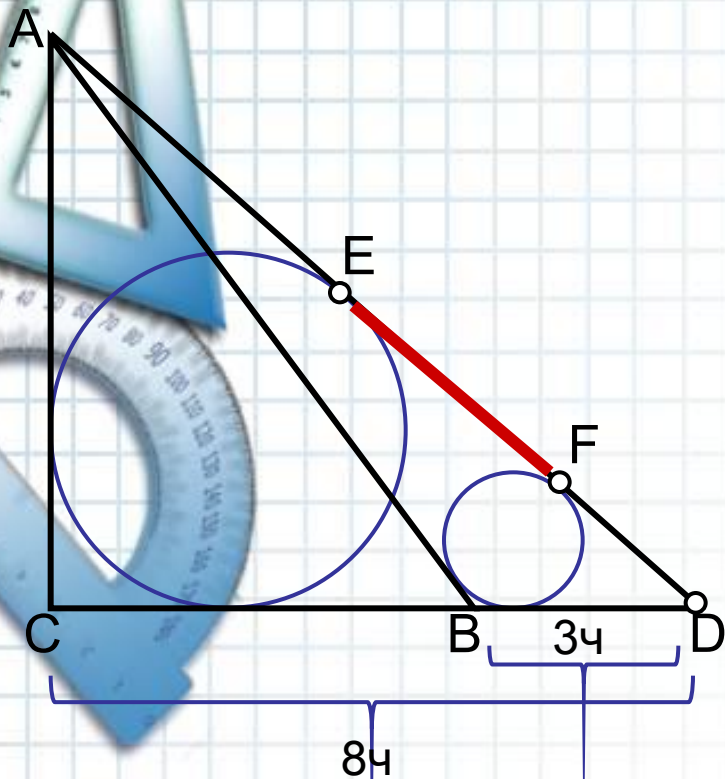
$$BD = DC - BC = \frac{96}{5} - 12 = \frac{36}{5}.$$

$$\text{Из } \triangle ADC, \quad DE = \frac{AD + DC - AC}{2} = \frac{AD + DC - 9}{2},$$

$$\text{Из } \triangle ADB, \quad DF = \frac{AD + BD - AB}{2} = \frac{AD + BD - 15}{2}.$$

$$\text{Значит, } EF = DE - DF = \frac{6 + DC - BD}{2} = 9.$$

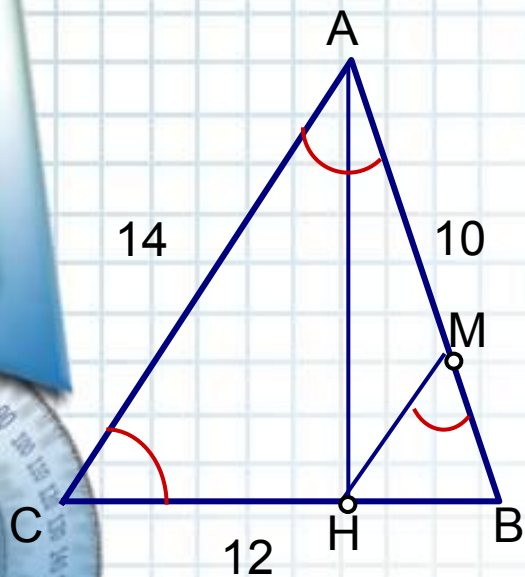
Ответ: 9 или $\frac{63}{11}$. 10



№
2

Точка H – основание высоты треугольника со сторонами 10, 12, 14, опущенной на сторону, равную 12. Через точку H проведена прямая, отсекающая от треугольника подобный ему треугольник и пересекающая сторону, равную 10, в точке M . Найдите HM .

Решение.



Пусть $AB = 10$, $BC = 12$, $AC = 14$.

$$\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC} = \frac{100 + 144 - 196}{2 \cdot 10 \cdot 12} = \frac{1}{5}.$$

$\triangle ABH$ – прямоугольный, $BH = AB \cdot \cos B = 2$.

По условию $\triangle ABC \sim \triangle HBM$, и имеют общий угол B , значит возможны два случая.

1 случай. $\angle BMH = \angle BAC$; $k = \frac{BH}{BC} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$,

значит, $HM = \frac{1}{6} \cdot AC = \frac{1}{6} \cdot 14 = \frac{7}{3}$.

$k = \frac{BH}{AB} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$, значит, $HM = \frac{1}{5} \cdot AC = \frac{1}{5} \cdot 14 = \frac{14}{5}$.

2 случай. $\angle BMH = \angle ACB$;

Ответ: $\frac{7}{3}$ или $\frac{14}{5}$.



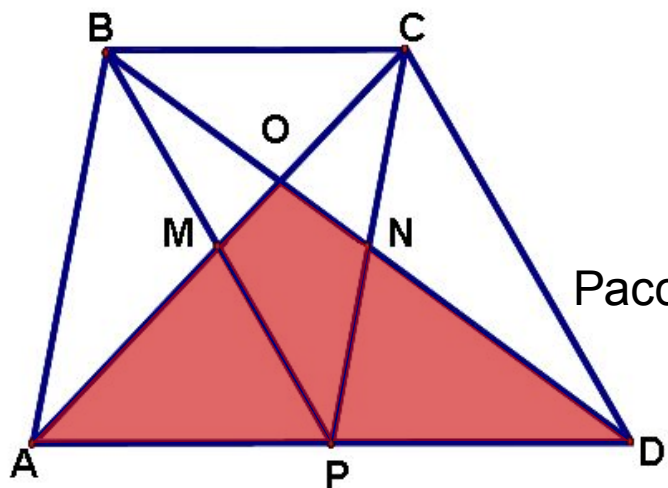
№
3

Площадь трапеции $ABCD$ равна 240. Диагонали пересекаются в точке O , отрезки, соединяющие середину P основания AD с вершинами B и C , пересекаются с диагоналями трапеции в точках M и N . Найдите площадь четырехугольника $OMPN$, если одно из оснований трапеции втрое больше другого.

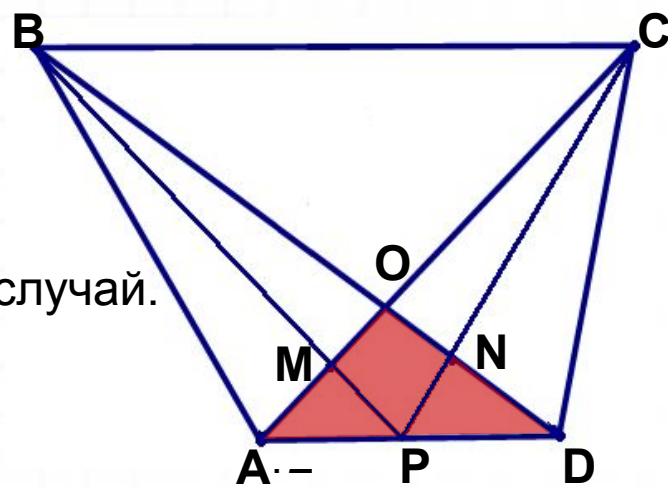
Решение. Возможно два вида трапеции. В обоих случаях:

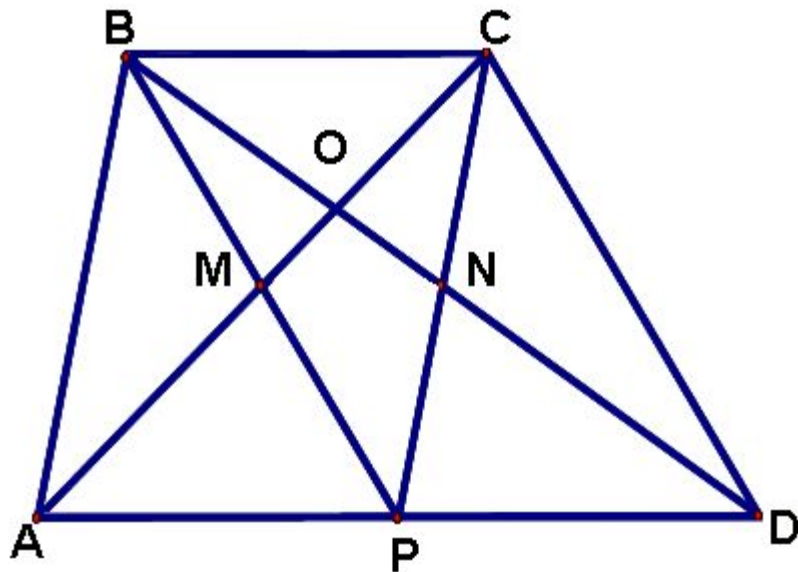
$$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot h = \begin{cases} 1) \text{ нижнее основание вдвое больше верхнего, } BC = a, AD = 3a, & \frac{a + 3a}{2} \cdot h = 2ah = 240, ah = 120 \\ 2) \text{ верхнее основание вдвое больше нижнего, } AD = a, BC = 3a. & \frac{3a + a}{2} \cdot h = 2ah = 240, ah = 120 \end{cases}$$

Найдем площадь $OMPN$: $S_{MONP} = S_{\Delta AOD} - S_{\Delta AMP} - S_{\Delta PND}$.



Рассмотрим первый случай.





по условию $BC = a$, $AD = 3a$, $ah = 120$.

$$S_{MONP} = S_{\Delta AOD} - S_{\Delta AMP} - S_{\Delta PND}$$

1) $\Delta BOC \sim \Delta AOD$, по трем углам

$$k = \frac{BC}{AD} = \frac{a}{3a} = \frac{1}{3}$$

значит высота ΔAOD равна $\frac{3}{4}h$, тогда:

$$S_{\Delta AOD} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot \frac{3}{4}h = \frac{3}{8} \cdot 3ah = \frac{9}{8} \cdot 120 = 135.$$

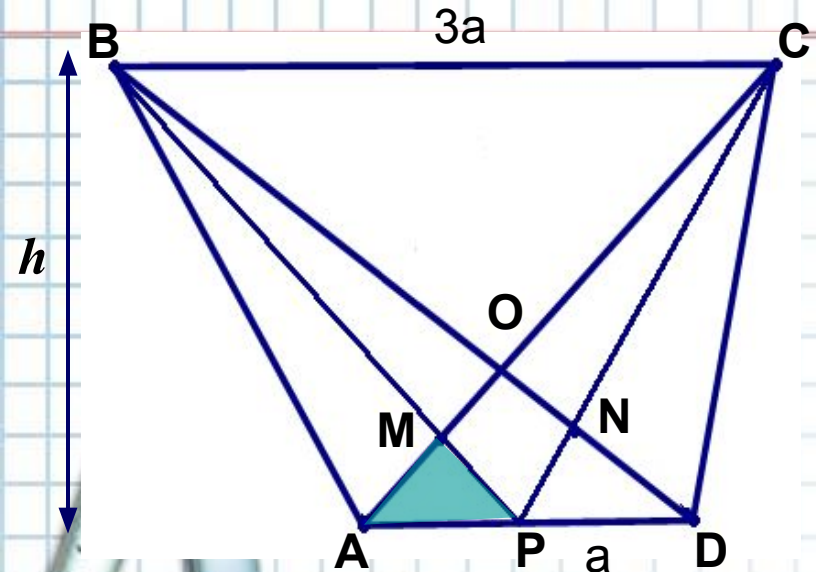
2) $\Delta BMC \sim \Delta AMP$, по трем углам, $k = \frac{BC}{AP} = \frac{a}{3a/2} = \frac{2}{3}$.

Тогда высота треугольника AMP равна $\frac{3}{5}$ высоты трапеции.

$$S_{\Delta AMP} = S_{\Delta PND} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot \frac{3}{5}h = \frac{1}{2} \cdot \frac{3a}{2} \cdot \frac{3}{5}h = \frac{9}{20} \cdot 120 = 54.$$

3) Находим искомую площадь: $S_{MONP} = S_{\Delta AOD} - 2S_{\Delta AMP} = 135 - 2 \cdot 54 = 27$.





По условию $BC = 3a$, $AD = a$, $ah = 120$.

$$S_{MONP} = S_{\Delta AOD} - S_{\Delta AMP} - S_{\Delta PND}$$

1) $\Delta BOC \sim \Delta AOD$, по трем углам

$$k = \frac{BC}{AD} = \frac{3a}{a} = 3.$$

Значит высота ΔAOD равна $\frac{1}{4}h$, тогда:

$$S_{\Delta AOD} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot \frac{1}{4}h = \frac{1}{8} \cdot ah = \frac{1}{8} \cdot 120 = 15.$$

2) $\Delta BMC \sim \Delta AMP$, по трем углам, $k = \frac{BC}{AP} = \frac{3a}{a/2} = 6.$

Тогда высота треугольника AMP равна $1/7$ высоты трапеции.

$$S_{\Delta AMP} = S_{\Delta PND} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot \frac{1}{7}h = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{7}h = \frac{1}{28} \cdot 120 = \frac{30}{7}.$$

3) Находим искомую площадь: $S_{MONP} = S_{\Delta AOD} - 2S_{\Delta AMP} = 15 - 2 \cdot \frac{30}{7} = 5.$

Ответ: 27 или 5.

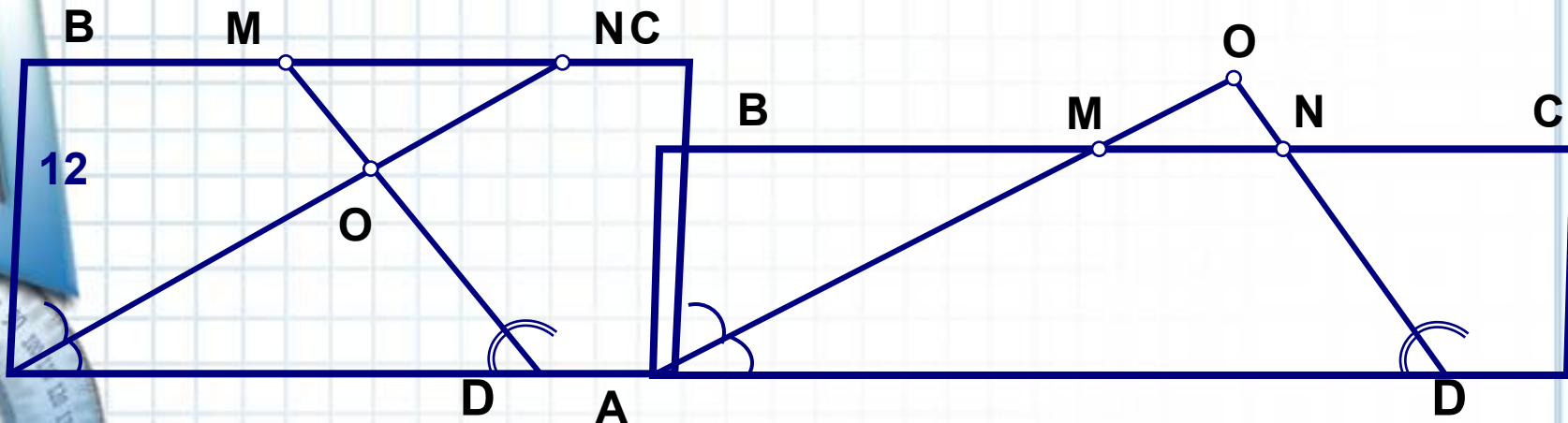


№
4

В параллелограмме ABCD $AB=12$, биссектрисы углов при стороне AD делят сторону BC точками M и N, так что $BM:MN=1:7$. Найдите BC.

Решение. Пусть O – точка пересечения биссектрис.

По условию $\frac{BM}{MN} = \frac{1}{7} < 1$, значит M лежит между точками B и N.



Возможны два случая.

- 1) точка O – лежит внутри параллелограмма;
- 2) точка O – лежит вне параллелограмма.

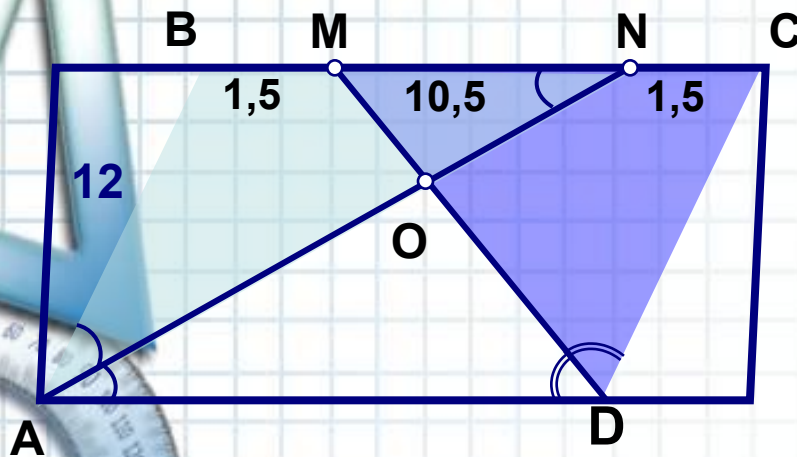
Рассмотрим первый случай.

№
4

В параллелограмме $ABCD$ $AB=12$, биссектрисы углов при стороне AD делят сторону BC точками M и N , так что $BM:MN=1:7$.
Найдите BC .

Решение. Пусть O – точка пересечения биссектрис.

По условию $\frac{BM}{MN} = \frac{1}{7} < 1$, значит M лежит между точками B и N .



1) $\triangle ABN$ – равнобедренный, т.к.
 $\angle BNA = \angle NAD$ – накрест лежащие;
 AN – биссектриса $\angle A$,
значит $\angle BNA = \angle BAN$ и $AB = BN = 12$,
тогда $BM = \frac{1}{8}BN = \frac{1}{8} \cdot 12 = 1,5$.
Найдем $MN = BN - BM = 12 - 1,5 = 10,5$.

2) Аналогично, $\triangle DMC$ – равнобедренный, $MC = DC = 12$.

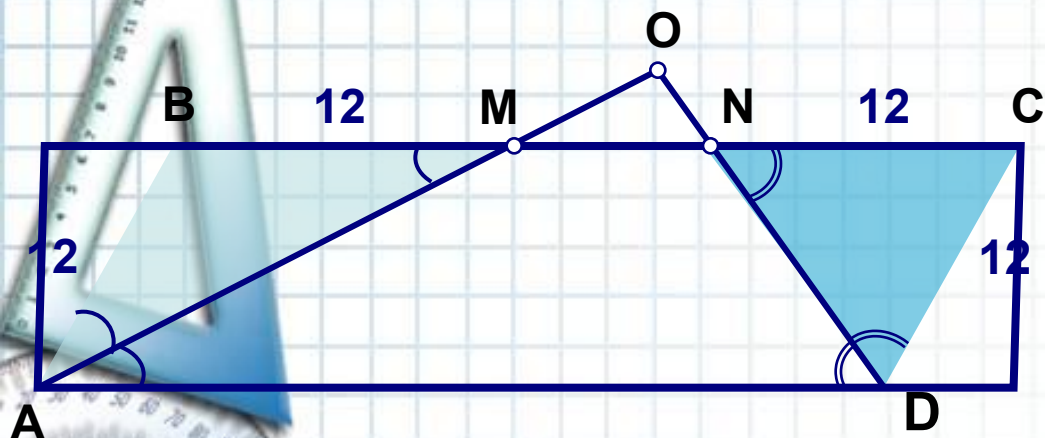
Тогда $NC = MC - MN = 12 - 10,5 = 1,5$.

Значит, $BC = BM + MN + NC = 13,5$.

№
4

В параллелограмме $ABCD$ $AB=12$, биссектрисы углов при стороне AD делят сторону BC точками M и N , так что $BM:MN=1:7$.
Найдите BC .

Решение. Рассмотрим второй случай:
точка O – лежит вне параллелограмма.



1) $\triangle ABM$ – равнобедренный, т.к.

$\angle BMA = \angle MAD$ – накрест лежащие

AM – биссектриса $\angle A$,

значит $\angle BMA = \angle BAM$.

Тогда $AB = BM = 12$.

По условию $\frac{BM}{MN} = \frac{1}{7}$, значит $BM = \frac{1}{8}BN, \Rightarrow BN = 8 \cdot 12 = 96$.

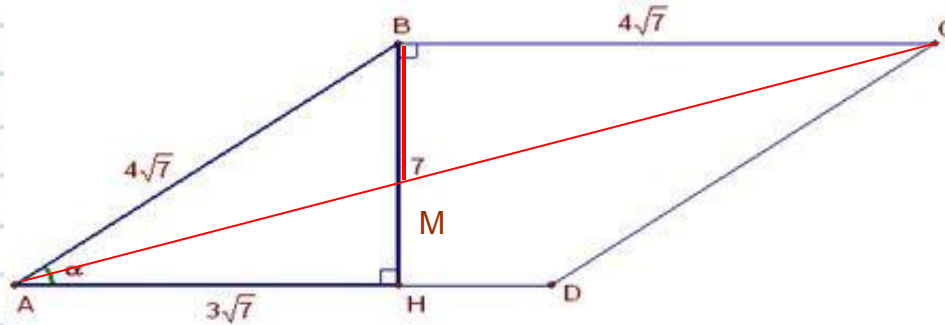
2) Аналогично $\triangle DNC$ – равнобедренный, тогда $NC = DC = 12$.

3) Значит, $BC = BN + NC = 96 + 12 = 108$.

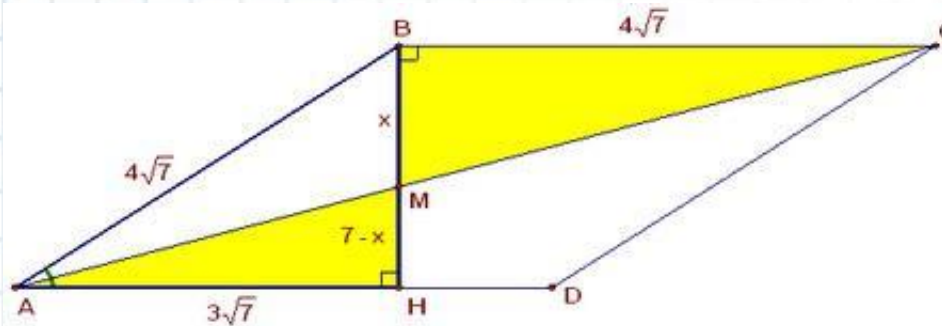
Ответ: 13,5 или 108.



№ 5 Сторона ромба ABCD равна $4\sqrt{7}$, а косинус угла A равен 0,75. Высота BH пересекает диагональ AC в точке M. Найдите длину отрезка BM.



В прямоугольном треугольнике ABH: $AH = AB \cdot \cos \alpha = 4\sqrt{7} \cdot 0,75 = 3\sqrt{7}$,
 $BH^2 = AB^2 - AH^2 = 112 - 63 = 49$; $BH = 7$.



Два прямоугольных треугольника BMC и MHA подобны по двум углам. Составим пропорцию: $BM : HM = BC : AH = 4 : 3$

Пусть $BM = x$, тогда $HM = 7 - x$;

$$x : (7 - x) = 4 : 3; \quad 3x = 28 - 4x; \quad x = 4.$$

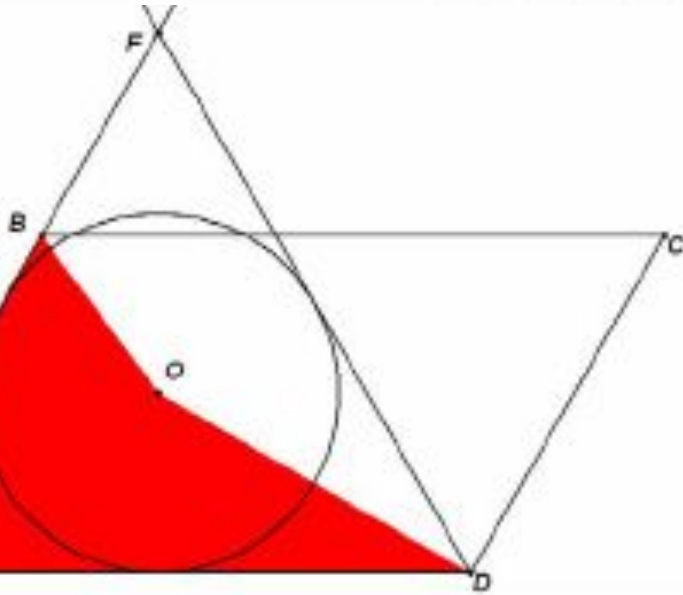
Ответ: 4



№
6

Дан параллелограмм ABCD, AB=2, BC=3, угол A равен 60° . Окружность с центром в точке O касается биссектрисы угла D и двух сторон параллелограмма, исходящих из вершины одного его острого угла. Найдите площадь четырехугольника ABOD.

Решение: 1) окружность с центром O вписана в угол с вершиной A.



Треугольник ADF равнобедренный. Так как угол A равен 60° , то этот треугольник равносторонний со стороной 3. Радиус вписанной окружности равен

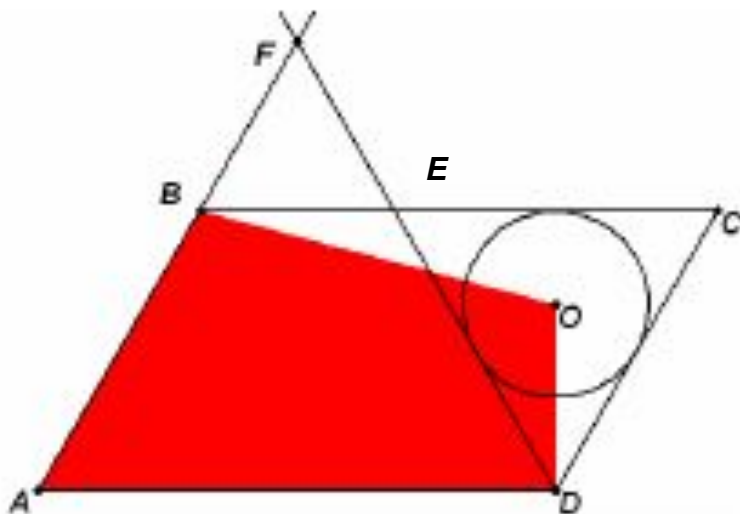
$$r = \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Находим площадь $S_{ABOD} = S_{AOB} + S_{AOD} =$

$$= \frac{1}{2} AB \cdot r + \frac{1}{2} AD \cdot r = \frac{5\sqrt{3}}{4}.$$

№
6

Дан параллелограмм ABCD, AB=2, BC=3, угол A равен 60°. Окружность с центром в точке O касается биссектрисы угла D и двух сторон параллелограмма, исходящих из вершины одного его острого угла. Найдите площадь четырехугольника ABOD.



2) окружность вписана в угол с вершиной C. Треугольник ADY равнобедренный. Так как угол A равен 60°, то этот треугольник равносторонний со стороной 2. Радиус вписанной окружности равен $r = \frac{2}{2 \operatorname{tg} 60^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Находим площадь $S_{ABOD} = S_{ABCD} - S_{BOC} - S_{DOC}$
 В треугольниках BOC и DOC высота равна радиусу окружности, значит

$$S_{ABOD} = AB \cdot AD \cdot \sin 60^\circ - \frac{1}{2} BC \cdot r - \frac{1}{2} CD \cdot r = 3\sqrt{3} - 0,5 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} - 0,5 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{13\sqrt{3}}{3}$$





Использованные ресурсы

Тексты задач взяты с сайта Александра Ларина

<http://alexlarin.narod.ru/ege.html>

Рисунок на слайде №2

<http://office.microsoft.com/ru-ru/images/results.aspx?qu=%D1%81%D0%BC%D0%B0%D0%B9%D0%BB%D1%8B>

Для создания шаблона презентации использовалась картинка

http://www.box-m.info/uploads/posts/2009-04/1238954029_1.jpg

