Теорема Пифагора и способы ее доказательства

Геометрия владеет двумя сокровищами:
одно из них — это теорема Пифагора...
Иоганн Кеплер.

Трудно найти человека, у которого имя Пифагора не ассоциировалось бы с теоремой Пифагора. Без преувеличения можно сказать, что это самая известная теорема геометрии, так как о ней знает подавляющее большинство населения планеты. Причин такой популярности три: простота, красота, широчайшая применимость.

В самом деле, теорема Пифагора проста, но не очевидна. Это сочетание двух противоречивых начал и придает ей особую притягательную силу, делает ее красивой. Кроме того, теорема Пифагора имеет огромное значение: она применяется в геометрии буквально на каждом шагу. Существует около 500 различных доказательств этой теоремы.

Пифагор Самосский.
(Pythagoras of Samos)
570 – 475г до н.э.

Великий ученый Пифагор родился 570 г. до н.э. на острове Самосе. Пифагора был Мнесарх, резчик драгоценным камням.

Будущий великий математик и философ уже в детстве обнаружил большие способности к наукам. У своего первого учителя Гермодамаса Пифагор получает знания основ музыки и живописи. По совету своего учителя Пифагор решает продолжить свое образование в Египте.

Учеба Пифагора в Египте способствует тому, что он сделался одним из самых образованных людей своего времени.

Древние источники.

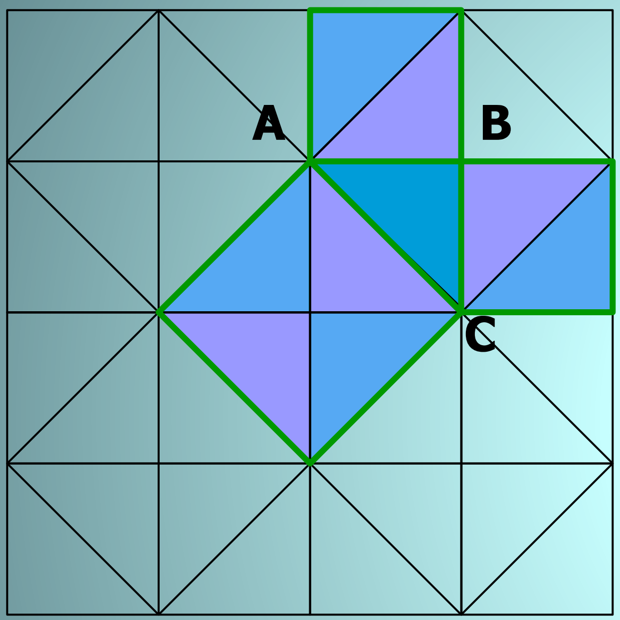
В таблице представлена хронология развития теоремы до Пифагора:

№	Историческое место	Дата
1	**Древний Китай** (математическая книга Чу-пей)	2400г.до н. э.
2	**Древний Египет** (гарпедонапты или "натягиватели веревок")	2300г.до н. э.
3	**Вавилон** (Хаммураби)	2000г.до н. э.
4	**Древняя Индия** (сборник Сульвасутра)	600г. до н.э.
5	**Пифагор**	570г. до н.э.

В настоящее время известно, что эта теорема не была открыта Пифагором. Однако полагают, что Пифагор первым дал ее полноценное доказательство.

Не алгебраические доказательства теоремы Пифагора.

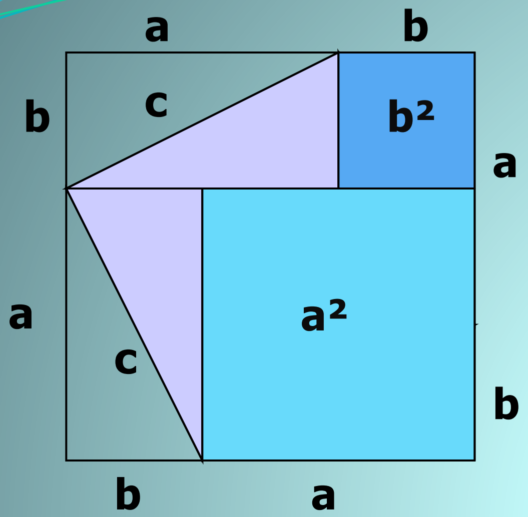
Простейшее доказательство.



«Квадрат, построенный на гипотенузе прямоугольного треугольника, равновелик сумме квадратов, построенных на его катетах."

Простейшее доказательство теоремы получается в случае равнобедренного прямоугольного треугольника. Достаточно просто посмотреть на мозаику равнобедренных прямоугольных треугольников, чтобы убедиться в справедливости теоремы. Например, для ∆ ABC: квадраты, построенные на катетах AB и BC, содержат по 2 исходных треугольника, а квадрат, построенный на гипотенузе AC — 4 таких же треугольника. Теорема доказана.

Древнеиндийское доказательство.



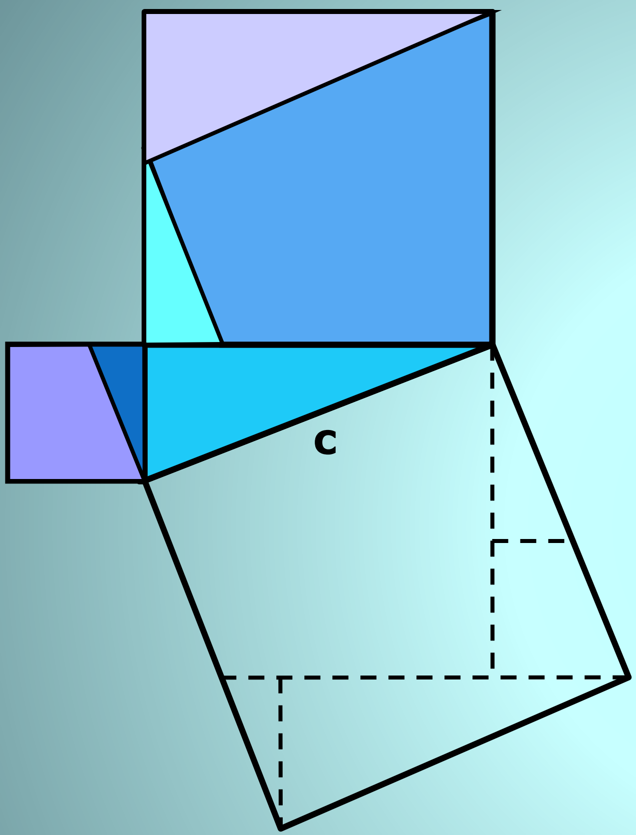
В трактате крупнейшего индийского математика Бхаскары помещен чертеж с характерным для индийских доказательств словом «смотри!»

Как мы видим, если в квадрате со стороной **c** *два заштрихованных треугольника отрезать и приложить гипотенузами к двум другим гипотенузам, то легко обнаружить, что полученная фигура, которую иногда называют «креслом невесты», состоит из двух квадратов со сторонами a и b, т.е. $c^2 = a^2 + b^2$.*

Аддитивные доказательства (доказательства методом разложения).

Существует целый ряд доказательств теоремы Пифагора, в которых квадраты, построенные на катетах и на гипотенузе, разрезаются так, что каждой части квадрата, построенного на гипотенузе, соответствует часть одного из квадратов, построенных на катетах. Во всех этих случаях для понимания доказательства достаточно одного взгляда на чертеж; рассуждение здесь может быть ограничено единственным словом: "Смотри!", как это делалось в сочинениях древних индусских математиков.

Доказательство ан-Найризия.

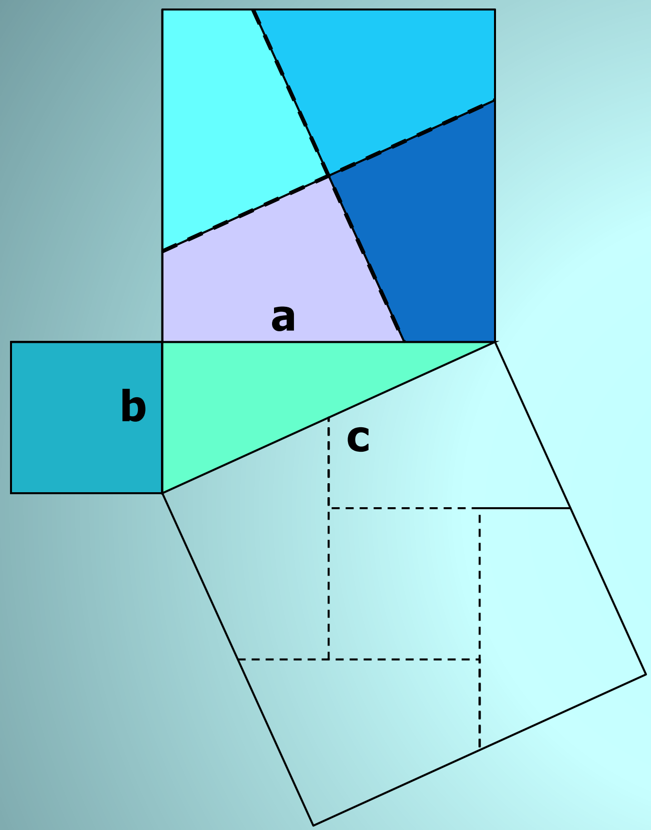


На рисунке приведено доказательство теоремы Пифагора с помощью разбиения ан-Найризия – средневекового багдадского комментатора «Начал» Евклида.

В этом разбиении квадрат, построенный на гипотенузе, разбит на 3 треугольника и 2 четырехугольника. Квадрат на большем катете разбит на 2 треугольника и 1 четырехугольник, а квадрат на меньшем – на 1 треугольник и 1 четырехугольник.

Это разложение квадратов интересно тем, что его попарно равные части отображаются друг на друга параллельным переносом.

Доказательство Перигаля.



В учебниках нередко встречается разложение, указанное на рисунке (так называемое "колесо с лопастями").

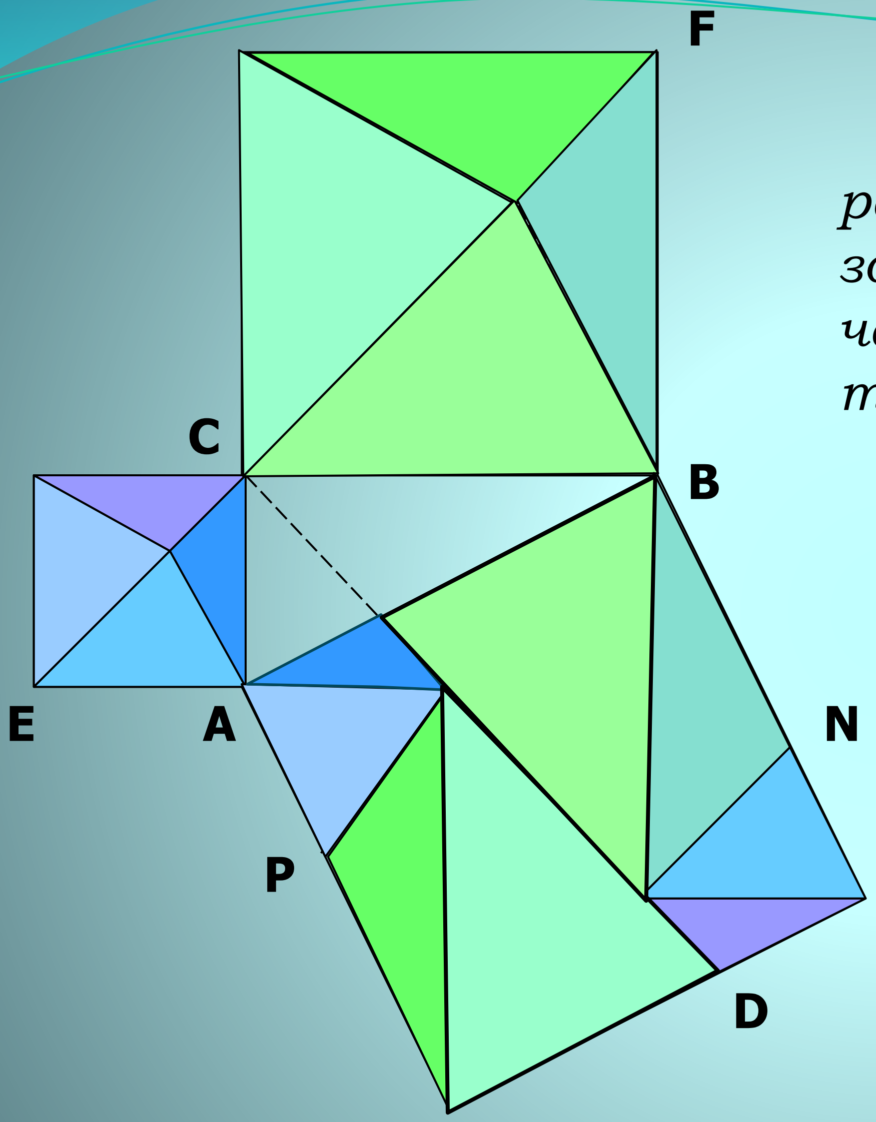
Через центр квадрата, построенного на большем катете провели две прямые:

перпендикулярную и

параллельную гипотенузе.

В этом разложении квадратов попарно равные четырехугольники так же могут быть отображены друг на друга параллельным переносом.

Доказательство Эпштейна.



Преимуществом данного разложения является то, что здесь в качестве составных частей разложения фигурируют только треугольники.

ABC – прямоугольный треугольник.

CD перпендикулярна EF,

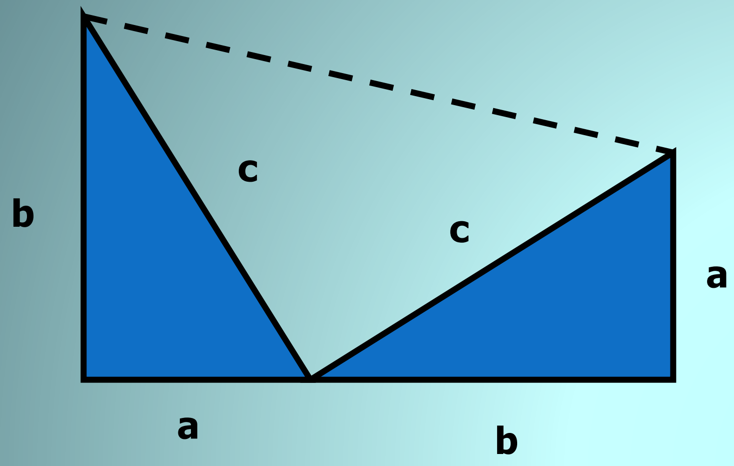
C принадлежит EF,

PO и KN параллельны EF.

В данном разложении части квадратов, расположенных на катетах образуют квадрат на гипотенузе.

Геометрический метод доказательства.

Доказательство Гарфилда.



На рисунке три прямоугольных треугольника составляют трапецию. Поэтому площадь этой фигуры можно находить по формуле площади прямоугольной трапеции, либо как сумму площадей трех треугольников. В первом случае $S=\frac{1}{2}(a+b)(a+b)$, во втором $S=\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}c^2$ приравнивая эти выражения получим:

$$\frac{1}{2}(a^2+2ab+b^2)=ab+\frac{1}{2}c^2;$$

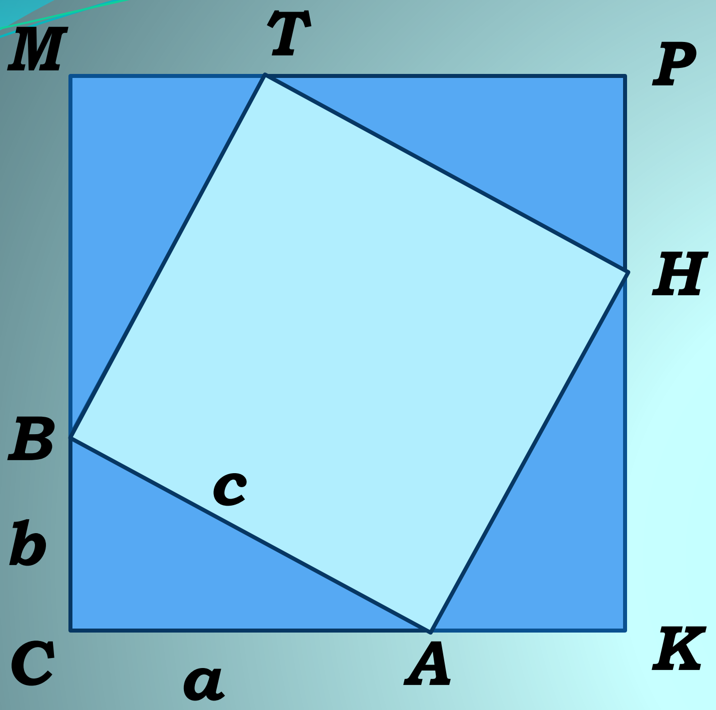
$$\frac{1}{2}a^2+ab+\frac{1}{2}b^2=ab+\frac{1}{2}c^2;$$

$$\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2=\frac{1}{2}c^2;$$

$$a^2+b^2=c^2.$$

Теорема доказана.

Алгебраический метод доказательства.



Дано: △ ABC, ∠ C = 90, BC = b,
AC = a, AB = c

Доказать: $c^2 = a^2 + b^2$

Доказательство:

Достроим △ ABC до квадрата CMPK со стороной (a + b), тогда $S_{CMPK} = (a+b)^2$ С другой стороны площадь квадрата равна сумме площадей 4 равных прямоугольных △, площадь каждого из которых равна ½ab, и площади квадрата со стороной равной c, поэтому $S_{CMPK} = 4\cdot ½ab + c^2$. Таким образом $(a + b)^2 = 4\cdot ½ab + c^2$,

$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$,

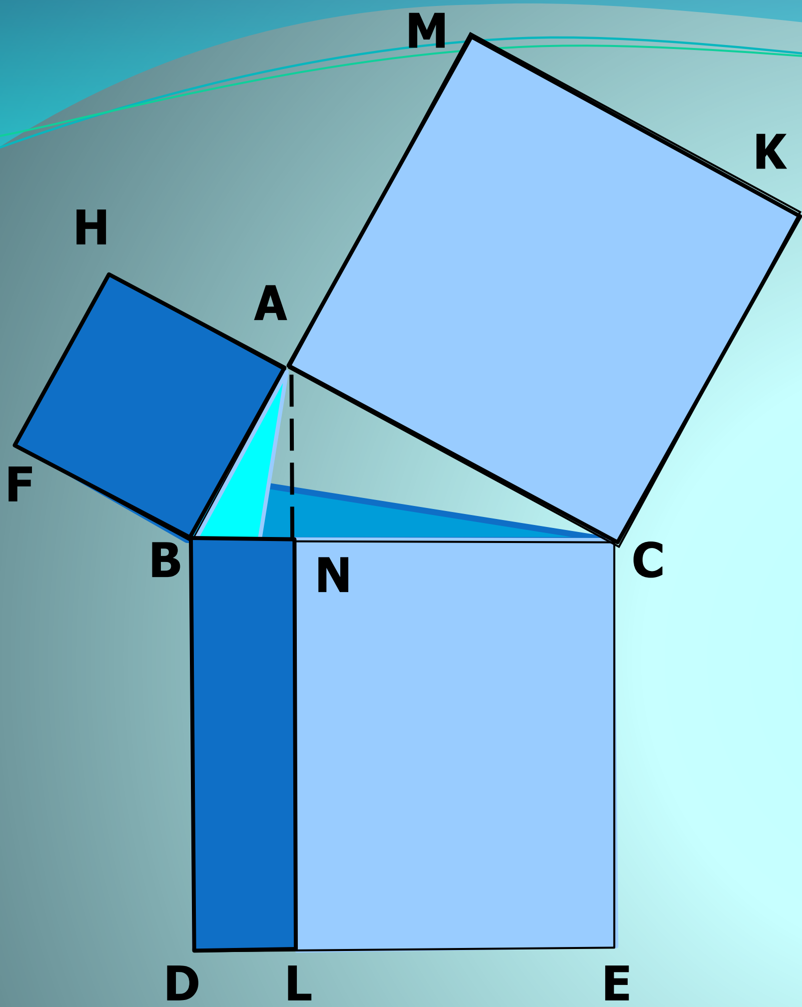
$a^2 + 2ab + b^2 – 2ab = c^2$,

$a^2 + b^2 = c^2$. *Теорема доказана.*

Другие доказательства.

Доказательство Евклида.

Это доказательство было приведено Евклидом в его "Началах". По свидетельству Прокла (Византия), оно придумано самим Евклидом. Доказательство Евклида приведено в предложении 47 первой книги "Начал".



На гипотенузе и катетах прямоугольного треугольника ABC строятся соответствующие квадраты и доказывается, что прямоугольник BNLD равновелик квадрату BFHA, а прямоугольник NCEL - квадрату AMKC. Тогда сумма площадей квадратов на катетах будет равна площади квадрата на гипотенузе.

В самом деле, треугольники ABD и BFC равны по двум сторонам и углу между ними: FB=AB; BC=BD; ∟ABD=∟FBC=∟ABC+90º

S_{ABD} = ½ S_{BNLD} = ½BD · LD;

S_{BFC}= ½ S_{BFHA} = ½BF · BA.

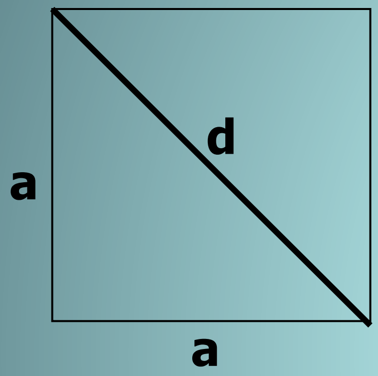
Значит прямоугольник BNLD равновелик квадрату BFHA.

Аналогично доказывается, что S_{NCEL}=S_{AMKC}.

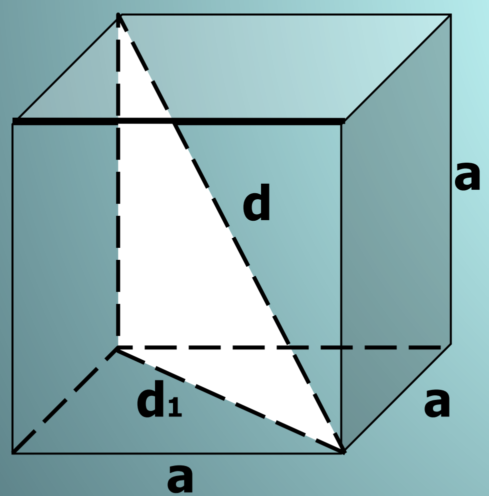
Итак, S_{ABFH}+S_{AMKC}=S_{BNLD}+S_{NCEL}=S_{BCED}. Теорема доказана.

Применение теоремы.

Рассмотрим примеры практического применения теоремы Пифагора. Определим возможности, которые дает теорема Пифагора для вычисления длин отрезков некоторых фигур.



1. *Пусть d диагональ квадрата со стороной a. Ее можно рассматривать как гипотенузу прямоугольного равнобедренного треугольника с катетом a. Таким образом* $d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$, $d = a\sqrt{2}$.



2. *Диагональ куба d является гипотенузой прямоугольного треугольника, заштрихованного на рисунке. Катетами треугольника служат ребро куба и диагональ квадрата, лежащего в основании* ($d_1 = a\sqrt{2}$). *Отсюда имеем:*

$d^2 = a^2 + 2a^2$, $d^2 = 3a^2$, $d = a\sqrt{3}$

Заключение.

В заключении еще раз хочется сказать о важности теоремы. Значение ее состоит прежде всего в том, что из нее или с ее помощью можно вывести большинство теорем геометрии.

Теорема и уравнение Пифагора на протяжении тысячелетий привлекают внимание математиков, являясь источником плодотворных идей и открытий.

Спасибо за внимание