*Московский государственный гуманитарный университет им. М. А. Шолохова*

*M. A. Sholokhov Moscow State University for the Humanities*


- И. А. Шилин
- А. А. Александров
- Г. Н. Холин
- И. Е. Богуславец
- С. Ф. Субочев

- Ilya Shilin
- Alexander Alexandrov
- George Holin
- Irina Boguslavec
- Sergey Subochev

# Компьютерное исследование групп гомоморфизмов конечных групп, гомоморфной устойчивости и топологий конечных множеств

***Отчет о первом этапе исследования***

Работа выполняется в рамках ФЦП
«Научные и научно-педагогические
кадры инновационной России»
на 2009 – 2013 годы

# The Investigation of Homomorphism Groups of Finite Groups, Homomorphic Stability and the Topologies of Finite Sets with PC

***The first phase review of the research***

The research is supporting by the Federal Program 'Scholars and teachers of the innovational Russia' for 2009 - 2013

## Цели исследования

- Построение групп $\mathrm{Hom}(G,H)$ для всех пар групп *G* и *H*, где *H* — абелева группа и порядки групп удовлетворяют условию $2 \leqslant |G|,|H| \leqslant 20$
- Построение групп $\mathrm{Aut}\,G$ и $\mathrm{Inn}\,G$ для всех групп *G*, для порядков которых выполняется неравенство $2 \leqslant |G| \leqslant 20$;
- Исследование всех упорядоченных пар групп *G* и *H*, где *H* — абелева группа и $2 \leqslant |G|,|H| \leqslant 20$, на гомоморфную устойчивость;
- Построение алгоритмов и их программных реализаций для перечисления топологий конечных множеств, классификации этих топологий по изоморфности, исследования свойств топологий.

## Aims of the research

- Constructing the groups $\mathrm{Hom}(G,H)$ for all pairs of groups *G* and *H*, where *H* is an abelian group and the orders of groups satisfy the condition $2 \leqslant |G|,|H| \leqslant 20$;
- Constructing the groups $\mathrm{Aut}\,G$ and $\mathrm{Inn}\,G$ for all groups *G* under the condition $2 \leqslant |G| \leqslant 20$;
- The verification of the homomorphic stability of any ordered pair of groups *G* and *H*, where *H* is an abelian group and the orders of groups satisfy the condition $2 \leqslant |G|,|H| \leqslant 20$;
- Constructing the algoritms ans the associated program realizations for the obtaining all topologies of finite sets, classification of isomorphic topologies and investigation of some properties of above topologies.

- Известно, что множество $\mathrm{Hom}(G,H)$ гомоморфизмов группы $(\mathrm{G},\circ)$ в абелеву группу $(\mathrm{H},\bullet)$ является группой относительно операции $\times:\ \mathrm{Hom}^2(G,H)\longrightarrow \mathrm{Hom}(G,H)$, где бинарная операция определена формулой $\phi\times\psi:\ G\longrightarrow H,\ a\longmapsto \phi(a)\bullet\psi(a)$
- Можно показать, что для циклических групп $\mathbb{Z}_n$ выполняется равенство $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_n,\mathbb{Z}_m)=\mathbb{Z}_{\mathrm{gcd}(n,m)}$, где gcd — наибольший общий делитель. Посчитаны группы $\mathrm{Hom}(G,H)$ для некоторых пар групп *G* и *H*. Однако общий случай требует либо сложных аналитических вычислений, либо компьютерных вычислений.

- It is known that the set $\mathrm{Hom}(G,H)$ homomorhisms of a group $(\mathrm{G},\circ)$ into an abelian group $(\mathrm{H},\bullet)$ is the group with respect to the operation $\times:\ \mathrm{Hom}^2(G,H)\longrightarrow \mathrm{Hom}(G,H)$,
where above binary operation is defined by the formula
$\phi\times\psi:\ G\longrightarrow H,\ a\longmapsto \phi(a)\bullet\psi(a)$.
- It is not too hard to show that for an arbitrary cyclic groups $\mathbb{Z}_n$ the property $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_n,\mathbb{Z}_m)=\mathbb{Z}_{\mathrm{gcd}(n,m)}$ is, where gcd is a greatest common divisor. Some results for the $\mathrm{Hom}(G,H)$ ned for some cases of *G* and *H*. However we need either a difficult analytic approach or research with PC for the general case of *G* and *H*.

- Известно, что для всякого гомоморфизма ϕ группы *G* в группу *H* образ $\mathrm{Im}\,\phi$бражения ϕ является подгруппой в *H*. Упорядоченная пара групп *G* и *H*, где группа *H* абелева, называется *гомоморфно устойчивой*, если множество $\bigcup_{\phi\in\mathrm{Hom}(G,H)} \mathrm{Im}\,\phi$дгруппой в *H*.

  В последнее время гомоморфная устойчивость некоторых классов пар групп интенсивно изучались в работах С. Я. Гриншпона и Т. А. Ельцовой.
- Цель нашей работы — получить в явном виде группы $\bigcup_{\phi\in\mathrm{Hom}(G,H)} \mathrm{Im}\,\phi$

  для всех подходящих пар $(G, H)$ при условии $2 \leqslant |G|, |H| \leqslant 20$ .

- It is known that, for each homomorphism ϕ of a group *G* into an abelian group *H*, the image $\mathrm{Im}\,\phi$ of the map ϕ is a subgroup in *H*. An ordered pair of groups *G* and *H* is said to be a homomorhhic stable pair if the set $\bigcup_{\phi\in\mathrm{Hom}(G,H)} \mathrm{Im}\,\phi$ is a subgroup in *H*.

- The one of the goals of our research is to obtain the explicit result for every admissible pair $(G, H)$ under the condition $2 \leqslant |G|, |H| \leqslant 20$.

- Все автоморфизмы конечной группы $G$ образуют группу $\operatorname{Aut} G$ относительно композиции подстановок. Автоморфизм ϕ, для которого любой нормальный делитель группы $G$ является неподвижной точкой при отображении $2^G \longrightarrow 2^G$, называют внутренним автоморфизмом. Внутренние автоморфизмы формируют подгруппу $\operatorname{Inn} G$ в $\operatorname{Aut} G$. Если $G$ —абелева группа, $\operatorname{Inn} G=\{\mathrm{id}\}$, где id —тождественная подстановка группы $G$.
- Мы планируем получить группы $\operatorname{Inn} G$ и $\operatorname{Aut} G$ для случая $2 \leqslant |G| \leqslant 20$.

- All automorphisms of a finite group $G$ form the group $\operatorname{Aut} G$ with respect to the composition of permutations of $G$. Let ϕ be an automorphism of $G$ such that any normal divisor of $G$ is a fixed point of the map $2^G \longrightarrow 2^G$. Under this condition, we ϕ is called an inner automorphism of $G$. All inner automorphisms form the subgroup $\operatorname{Inn} G$ in $\operatorname{Aut} G$. If $G$ is an abelian group, then $\operatorname{Inn} G=\{\mathrm{id}\}$ere id means the identical permutation of $G$.
- We are planning to obtain the groups $\operatorname{Inn} G$ and $\operatorname{Aut} G$ for the case $2 \leqslant |G| \leqslant 20$.

- При вычислении групп $\mathrm{Aut}\,G$ порядки получающихся автоморфизмов не так очевидны, как порядки гомоморфизмов $G \longrightarrow H$. Поэтому в алгоритмах для вычисления групп $\mathrm{Aut}\,G$ будут предусмотрены специальные процедуры для вычисления порядков.
- Главную сложность мы ожидаем при определении генетического кода (то есть системы порождающих элементов и определяющих соотношений) для групп $\mathrm{Aut}\,G$ большого порядка.

- The orders of the automorhisms from $\mathrm{Aut}\,G$ aren't obvious such the orders of the homomorphisms $G \longrightarrow H$. So we will include into our algorithms the special procedures computing the orders.
- We think that the main difficulty is to derive the genetic code (i.e. the system of generating elements and relations) of a group $\mathrm{Aut}\,G$ of large order.

- Топологическую структуру на множестве *S* можно дать разными способами. Один из них — через аксиоматическое указание открытых подмножеств. Другой способ (по Куратовскому) заключается, напротив, в указании замкнутых множеств с помощью введения замыкания $2^S \longrightarrow 2^S$, неподвижные точки которого объявляются замкнутыми подмножествами. Последнее определение более эффективно для создания алгоритма и соответствующей программы для нахождения всех топологий на конечном множестве *S*.

- There are some ways to define a topological structure on a set *S*. On of these ways is to define all open subsets by the well known axiomatic method. Another approach arrows to Kuratovsky. The main idea of this approach is to define all close subsets with a help of closure $2^S \longrightarrow 2^S$, this way, we define a close subset as a fixed point of closure. The second definition is more effective for the construct the algorithm and the related program for the obtaining of all topologies on a finite set *S*.

Отображение $f : 2^S \longrightarrow 2^S$еделяет топологию на непустом множестве *S*, если *f* является замыканием, то есть выполняются условия:

- **a**) $\varnothing$ —неподвижная точка отображения *f*;
- **b**) $A \subset f(A)$;
- **c**) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;
- **d**) $f^2 = f$ (то есть *f* —идемпотент множества $(2^S, \cdot)$, где точка обозначает композицию.

A map $f : 2^S \longrightarrow 2^S$ defines the related topology on a nonempty set *S* if *f* is a closure of $2^S$, i.e. the following conditions hold:

- **a**) $\varnothing$ —is a fixed point of *f*;
- **b**) $A \subset f(A)$;
- **c**) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
- **d**) $f^2 = f$ (*f* is an idempotent of $(2^S, \cdot)$ with respect to the composition .

Планируется составить соответствующие программы на следующих языках (и/или):

- C++
- Turbo Pascal
- QBasic

We are planning to make the programs in (and/or)

- C++
- Turbo Pascal
- QBasic

Одна из наших прежних статей содержала, например, следующие таблицы, построенные по результатам компьютерного исследования:

One of our previous papers contains, for example, the following tables, which were constructed after the research with PC:

| $G$ | $\mathbf{Z}_2$ | $\mathbf{Z}_3$ | $\mathbf{Z}_4$ | $\mathbf{Z}_2^2$ | $\mathbf{Z}_5$ | $\mathbf{Z}_6$ | $\mathbf{D}_3$ | $\mathbf{Z}_7$ | $\mathbf{Z}_8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Aut $G$ | {id} | $\mathbf{Z}_2$ | $\mathbf{Z}_2$ | $\mathbf{D}_3$ | $\mathbf{Z}_4$ | $\mathbf{Z}_2$ | $\mathbf{Z}_2$ | $\mathbf{Z}_6$ | $\mathbf{Z}_2^2$ |
| Inn $G$ | {id} | {id} | {id} | {id} | {id} | {id} | {id} | {id} | {id} |

| $G$ | $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_4$ | $\mathbf{Z}_2^3$ | $\mathbf{D}_4$ | Q | $\mathbf{Z}_9$ | $\mathbf{Z}_3^2$ | $\mathbf{Z}_{10}$ | $\mathbf{D}_5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Aut $G$ | $\mathbf{D}_4$ | PSL(2,7) | $\mathbf{D}_4$ | $\mathbf{S}_4$ | $\mathbf{Z}_6$ | $U$ | $\mathbf{Z}_4$ | $V$ |
| Inn $G$ | {id} | {id} | $\mathbf{Z}_2^3$ | $\mathbf{Z}_2^2$ | {id} | {id} | {id} | $\mathbf{D}_5$ |

$$U = \langle \ a, b, c, d \mid a^2 = b^2 = c^4 = d^4 = acad^3 =$$

$$= bcdb^2d^3 = c^3dcd = bd^3b^2c^3 = abab = e \ \rangle,$$

$$V = \langle \ s, t \mid s^4 = t^5 = e, \ ts = st^2 \ \rangle,$$

$$\mathrm{PSP}(2,7) = \langle \ (2-3-5-4), (1-2-3-4-5) \ \rangle \in \mathbf{S}_7.$$

Результаты наших исследований будут отражены в курсовых и дипломных работах студентов.

Our research results will be a support of a coursework and a M. Sc thesis of some our students.

Благодарим за обсуждение темы исследования и содействие

- С. В. Васекина
- Г. Г. Ильюту

We thank

- Sergey Vasekin
- Gennady Il’uta

for the discussion and assistance in the research.