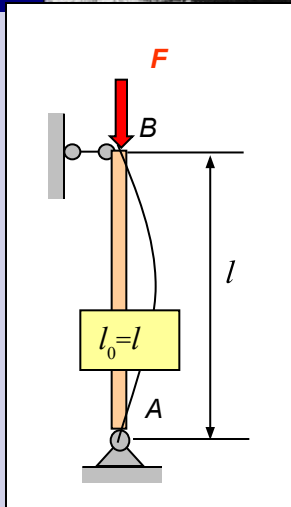


Бондаренко А.Н.

# Курс лекций по сопротивлению материалов



## Часть 2.2

Электронный учебный курс написан на основе лекций, читавшихся автором для студентов, обучавшихся по специальностям СЖД, ПГС и СДМ в ХабиИЖТе, СГУПСе (1965-2003 гг.). Учебный материал соответствует календарным планам в объеме двух семестров. Для полной реализации анимационных эффектов при презентации необходимо использовать средство просмотра Power Point не ниже, чем встроенный в Microsoft Office операционной системы Windows-XP Professional. Запуск презентации – F5, навигация – Enter, навигационные клавиши, щелчок мыши, кнопки. Завершение – Esc. Замечания и предложения можно послать по e-mail: [bond@miit.ru](mailto:bond@miit.ru).

Москва - 2007

# Содержание

- **Лекция 11.** Понятие об устойчивых и неустойчивых формах равновесия. Формула Эйлера. Учет влияния способов закрепления концов стержня.
- **Лекция 12.** Пределы применимости формулы Эйлера. Формула Ясинского. Порядок определения критической нагрузки. Практический метод расчета сжатых стержней по нормам.
- **Лекция 13.** Понятие о продольно-поперечном изгибе. Расчет по деформированной схеме. Приближенная формула для определения перемещений. Расчет на прочность при продольно-поперечном изгибе.
- **Лекция 14.** Понятие о динамической нагрузке. Динамический коэффициент. Учет сил инерции. Ударное действие нагрузки. Расчетная модель и основные допущения.
- **Лекция 15.** Формула динамического коэффициента при ударе. Продольный и поперечный удар. Приближенный учет массы конструкции при ударе.
- **Лекция 16.** Возникновение и накопление усталостных повреждений. Механизм усталостного разрушения. Циклы напряжений и их параметры. Экспериментальное определение предела выносливости. Симметричный цикл и кривая усталости.
- **Лекция 17.** Асимметричные циклы и диаграмма предельных амплитуд. Факторы, влияющие на усталостную прочность. Диаграмма предельных амплитуд детали. Коэффициент запаса детали.
- **Лекция 18.** *Дополнительные разделы:* Расчет кривых брусьев. Эпюры внутренних усилий. Нормальные напряжения в поперечных сечениях бруса большой кривизны.

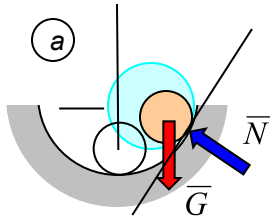
## Рекомендуемая литература

1. Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П. Сопротивление материалов для вузов. М.: Высшая школа. 1995, 2001 г. 560 с.
2. Сборник задач по сопротивлению материалов под ред. Александрова А.В., М.: Стройиздат. 1977г. 335 с.
3. Методические указания к выполнению расчетно-графических работ. Изд. МИИТ.
4. Лабораторные работы по сопротивлению материалов (Методические указания под ред. Александрова А.В., часть 1, МИИТ, 1974 г.)
5. Справочник по сопротивлению материалов / Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. - 2 изд., перераб. и доп. – Киев: Наукова думка, 1988. 736 с.

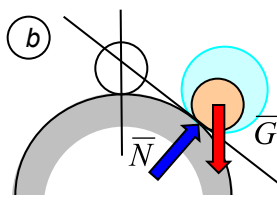
# Лекция 11

**Понятие об устойчивых и неустойчивых формах равновесия** – Соблюдение условий прочности и жесткости еще не гарантируют способности конструкции выполнять предназначенные им функции. В определенных условиях отдельные элементы конструкции могут **потерять устойчивую форму равновесия**, после чего резко изменяется геометрия системы. В результате этого, как правило, изменяется характер нагружения и величина внутренних усилий, что приводит к невозможности дальнейшей эксплуатации конструкции или просто к катастрофическому обрушению.

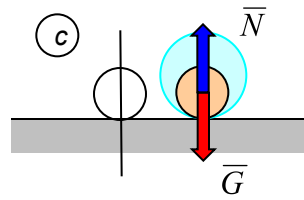
В зависимости от того, как ведет себя система при малом смещении ее из положения равновесия различают а) устойчивое равновесие, б) неустойчивое равновесие и с) безразличное равновесие:



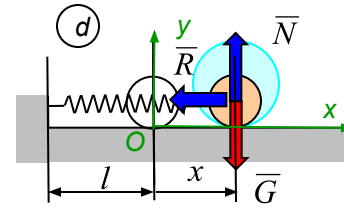
Есть восстанавливающая сила (сила тяжести возвращает шарик к положению равновесия).  
**Положение равновесия устойчивое.**



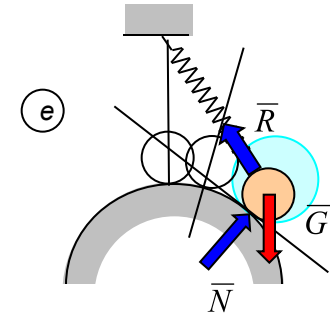
Нет восстанавливающей силы (сила тяжести уведит шарик от положения равновесия).  
**Положение равновесия неустойчивое.**



Восстанавливающей силы нет и нет силы, выводящей шарик из положения равновесия.  
**Положение равновесия безразличное.**



Восстанавливающая сила есть (реакция упругой связи – пружины возвращает шарик к положению равновесия).  
**Положение равновесия устойчивое.**



Есть восстанавливающая сила (реакция пружины) и сила, выводящая шарик из положения равновесия (сила тяжести).  
**Необходим анализ.**

**Определение:** Если при малых возмущениях тело отклоняется от своего невозмущенного (исходного) состояния равновесия незначительно, то такое состояние равновесия называется **устойчивым**. Если же состояние равновесия не обладает таким свойством, то оно называется **неустойчивым**.

Вполне очевидно из приведенных: стремится вернуться в исходное. Малость возмущений является в: положение равновесия, далекое "в большом".

В упруго деформирующихся системах силы упругости препятствуют уходу системы из начального положения равновесия. При малых возмущениях могут возникать силы, выводящие систему из этого положения. Анализ устойчивости заключается в оценке соотношений между этими силами. *Например:* Жесткий стержень АВ длины  $l$ , нагруженный продольной силой  $F$ , удерживается в равновесии упругой связью (пружиной) жесткости  $c$ .

В результате случайного воздействия (возмущения) стержень отклонился от вертикального положения на малый угол  $\delta\phi$  ( $\sin\delta\phi = \delta\phi$ ,  $\delta s_B = l\delta\phi$ ):

Освободим объект от связей и составим моментное уравнение равновесия :

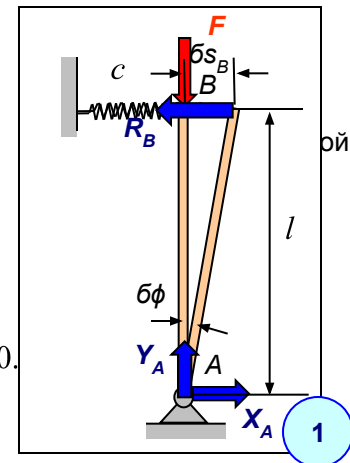
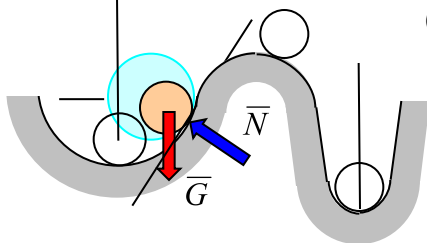
$$\sum M_{iA} = 0; \quad -F\delta s_B + R_B l = 0. \quad \implies \quad (-F + cl)\delta s_B = 0 \quad \text{или} \quad (cl - F)l\delta\phi = 0.$$

Соотношение упругости:

$$R_B = c\delta s_B.$$



При  $\delta\phi \neq 0$  возможно равновесие, если  $F = cl = F^*$  ( $F^*$  - критическая сила).

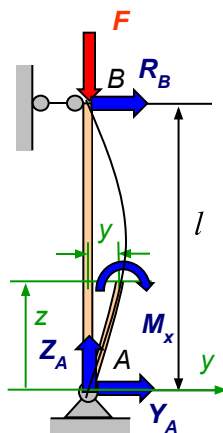
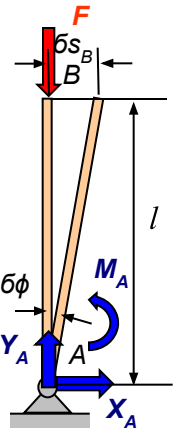


# Лекция 11 (продолжение – 11.2)

- Таким образом, существует критическое значение силы, уводящей систему из положения из начального положения равновесия, при котором возможно другое (отклоненное) положение равновесия, сколь угодно близкое к первому. При значении этой силы меньшем критического ( $F < F^*$ ), система имеет только одно – тривиальное – положение равновесия ( $\delta\phi = 0$ ). При значении этой силы равной критическому ( $F = F^*$ ), система имеет смежные положения равновесия, отклоненные от начального и мало отличающиеся от него ( $\delta\phi \neq 0$ ). При значении этой силы большем критического ( $F > F^*$ ) система не может оставаться в начальном положении равновесия, а будет занимать какие-то другие положения в зависимости от значения силы. Эти положения можно найти решением соответствующего нелинейного уравнения (без предположения о малости перемещений).

**Замечание:** Полученное значение критической силы в рассмотренном примере пропорционально жесткости упругой связи (линейной пружины) и длины жесткой балки. Если рассмотреть пример, приведенный в [1], в котором возвращающее усилие реализуется в виде пары сил (реактивного момента  $M_A = c\delta\phi$ ) от спиральной пружины, то критическая сила получается обратно пропорциональной длине стержня, т.е. при большей длине критическая сила меньше. Это говорит о том, что геометрия системы, характер и место приложения реактивного возвращающего усилия влияет на величину критической силы. Например, если линейная пружина будет поставлена на высоте  $a < l$  от шарнирно неподвижной опоры  $A$ , то критическая сила соответственно уменьшается.

- Формула Эйлера.** При сжатии продольной силой деформируемого стержня его ось может получить малое искривление и в поперечных сечениях его возникнет упругий изгибающий момент, противодействующий дальнейшему искривлению стержня, численно равный моменту сжимающей силы относительно центральной оси поперечного сечения, смещенного на малое расстояние от прямолинейной оси стержня:



$$M_x = -Fy + R_B(l - z) = -Fy; \quad R_B = 0 \text{ по } \sum M = 0$$

Запишем приближенное дифференциальное уравнение при выводе формулы для нормальных координат и подставим значение изгибающего момента:  $EI_x \frac{d^2 y}{dz^2} = -Fy$ .  
Решение полученного однородного дифференциального уравнения и имеет вид:

$$y(z) = C_1 \cos kz + C_2 \sin kz.$$

Постоянные интегрирования определяются из граничных условий:

- $z = 0, y(0) = 0; \Rightarrow 0 = C_1 \cos k0 + C_2 \sin k0. \Rightarrow C_1 = 0.$
- $z = l, y(l) = 0. \Rightarrow 0 = C_2 \sin kl.$

Таким образом,  $F_{кр}$  представляет собой **наименьшую (критическую) сжимающую силу**, при которой наряду с прямолинейной формой равновесия становится возможной другая (изгибная) форма равновесия.  
При  $n=1$  стержень изгибается по полуволне синусоиды. Константа  $C_2$  остается неопределенной (в рамках сделанных предположений о малости прогибов).  
При  $n=2$  изгибная форма представляет собой полную волну синусоиды, при которой величина критической силы увеличивается в 4 (!) раза. Но для реализации такой формы изгиба необходимо поставить дополнительные горизонтальные связи в середине длины сжимаемого стержня.

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EI_x}{l^2}$$

Это уравнение имеет два решения:

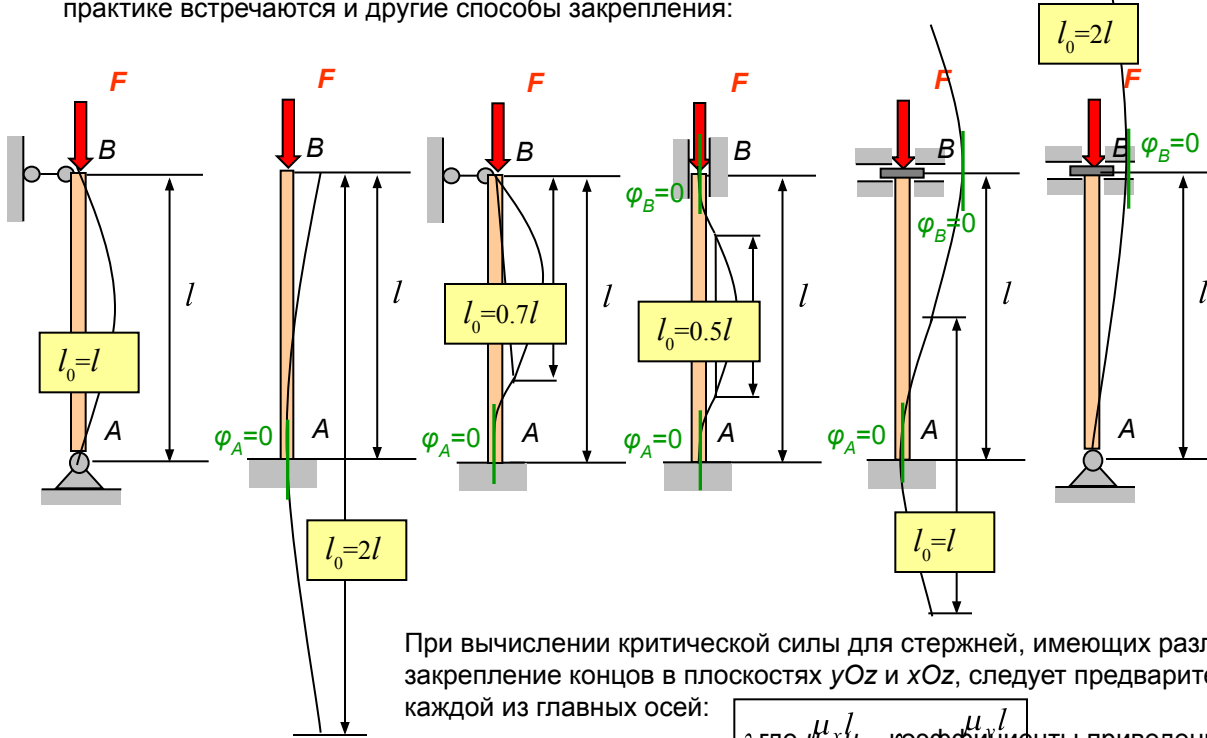
- $C_2 = 0$  – прогиб тождественно равен нулю по всей длине стержня (прямолинейная форма равновесия);
- $C_2 \neq 0$  – тогда  $\sin kl = 0$ . Последнее определяет формы упругой линии  $n = 1, 2, 3, \dots$  (криволинейных форм равновесия):

$$kl = n\pi.$$

При  $n = 1$  получаем наименьшее значение силы:  
**Формула Эйлера**  
 $F_{кр} = \frac{\pi^2 EI_x}{l^2}$

# Лекция 11 (продолжение – 11.3)

- Учет влияния способов закрепления концов стержня. Формула Эйлера получена для шарнирного опирания стержня по концам. На практике встречаются и другие способы закрепления:



Для каждого из таких случаев необходимо задать соответствующие граничные условия, после чего можно получить необходимые значения критической силы. На практике поступают иначе: определяют некоторую *условную длину шарнирно опертого по концам стержня*, для которой критическая сила будет равна критической силе для рассматриваемого стержня. Эта условная длина является длиной полуволны синусоиды, которая может построена так, чтобы граничные условия для данного стержня были выполнены:

Критическая сила для каждого из этих стержней может быть получена по обобщенной формуле:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}$$

где  $\mu$  – коэффициент приведения длины ( $l_0 = \mu l$ ).

При вычислении критической силы для стержней, имеющих различные моменты инерции  $I_x \neq I_y$ , а также различное закрепление концов в плоскостях  $yOz$  и  $xOz$ , следует предварительно определить *гибкость* стержня относительно каждой из главных осей:

$\lambda_x = \frac{\mu_x l}{i_x}$ ,  $\lambda_y = \frac{\mu_y l}{i_y}$  – коэффициенты приведения длины,  
 $i_x, i_y$  – радиусы инерции сечения относительно осей  $x$  и  $y$ .

С использованием гибкости критическая сила определяется выражением:  
**Наименьшая критическая сила вычисляется относительно оси, для которой гибкость стержня оказывается наибольшей.**

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EA}{\lambda^2}$$

**Формула Эйлера в функции от гибкости**

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}; i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

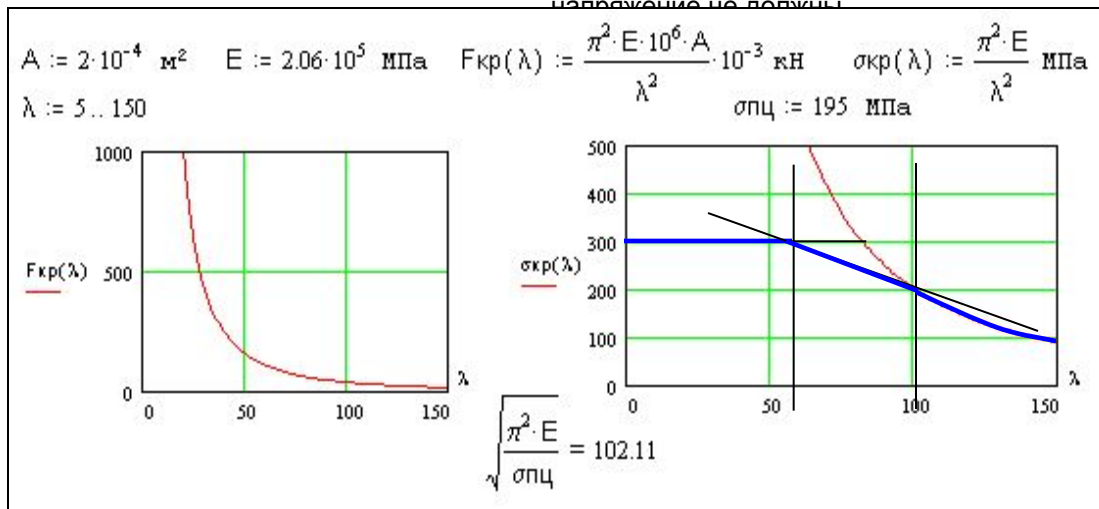
# Лекция 12

## Формула Эйлера

**Пределы применимости формулы Эйлера** – Формула Эйлера была выведена в предположении, что выполняется линейная зависимость деформации от напряжений (закон Гука). Между тем полученная зависимость критической силы от гибкости является *гиперболической*, при которой уменьшение гибкости приводит к таким большим значениям критической силы, что напряжения могут превысить предел пропорциональности  $\sigma_{пц}$ . Таким образом критические

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EA}{\lambda^2}$$

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} < \sigma_{пц}$$



Например, для стали 45  $\sigma_{пц} = 195 \text{ МПа}$ ,  $E = 2.06 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ . Подставляя в это неравенство эти данные получим **предельную гибкость, больше которой нельзя пользоваться формулой Эйлера**:

$$\lambda_{пр} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{пц}}} \Rightarrow \lambda_{пр} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot 2.06 \cdot 10^5}{195}} \approx 102.$$

Таким образом, гиперолой Эйлера можно пользоваться только при гибкости большей предельной, равной для данной стали 102, (показано на графике жирной синей кривой).

Для стержней *малой* гибкости (для сталей  $\lambda < 40-60$ ) разрушение стержня происходит вследствие разрушения самого материала (для сталей – пластическое течение при напряжении  $\sigma = \sigma_{\tau} = 300 \text{ МПа}$ ). Таким образом, критические напряжения для таких стержней ограничиваются уровнем этого предельного напряжения (показано на графике жирной синей линией).

Для стержней *средней* гибкости (для сталей  $40-60 < \lambda < 102$ ) теоретическое исследование устойчивости вследствие необходимости учета нелинейности существенно усложняется. Для практических расчетов Ф.С. Ясинским была предложена эмпирическая линейная зависимость, полученная на основе обработки экспериментальных данных, в виде:  $\sigma_{кр} = a - b\lambda$ , где  $a$  и  $b$  – константы, зависящие от материала

(сталь:  $a = 310 \text{ МПа}$ ,  $b = 1.14 \text{ МПа}$ ,  
 дерево:  $a = 29.3 \text{ МПа}$ ,  $b = 0.194 \text{ МПа}$ ).

Таким образом, критические напряжения для стержней средней гибкости ограничиваются наклонной прямой (показано на графике жирной синей линией, соединяющей предыдущие участки). В целом безопасные напряжения с учетом потери устойчивости находятся внутри области, очерченной синим на графике.

Поскольку величина критической силы зависит от максимальной гибкости в одной из плоскостей, а применяемые формулы (Эйлера или Ясинского) – в зависимости от диапазона, в который попадает гибкость (средняя или большая гибкость), то **порядок определения критической силы** следующий:

1. Определяются коэффициенты приведения длины и максимальная гибкость из двух гибкостей относительно осей  $x$ ,  $y$ .
2. Определяется для данного материала предельная гибкость и сравнивается с максимальной.
3. Если максимальная гибкость больше предельной, то используется формула Эйлера, если меньше – формула Ясинского. (Для стержней малой гибкости критическая сила не вычисляется).



# Лекция 12 (продолжение – 12.2)

- Практический метод расчета сжатых стержней.** При расчете сжатых и растянутых стержней условие прочности имеет вид:  $\sigma = \frac{N}{A_{нт}} \leq R$ .  
Здесь  $N$  – нормальное усилие в стержне,  $R$  – расчетное сопротивление материала,  $A_{нт}$  – площадь поперечного сечения (нетто).  
С учетом ограничения напряжения, связанного с потерей устойчивости, должно выполняться неравенство:  
Здесь  $A_{бр}$  – площадь поперечного сечения брутто (без учета местных ослаблений – отверстия, канавки и пр.)  $\sigma = \frac{N}{A_{бр}} < \sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A_{бр}}$ .

Условие обеспечения определенного запаса по устойчивости стержня:  $\sigma \leq \frac{\sigma_{кр}}{n_y} = [\sigma_y]$  где  $n_y$  – нормативный или требуемый коэффициент запаса,  $[\sigma_y]$  – допускаемое напряжение при расчете на устойчивость.

Представим правую часть неравенства как некоторую долю расчетного сопротивления:  $\frac{\sigma_{кр}}{n_y} = [\sigma_y] = \varphi R$ .

Здесь коэффициент  $\varphi < 1$  определяет степень снижения расчетного сопротивления и называется **коэффициентом продольного изгиба** или **коэффициентом уменьшения расчетного сопротивления для сжатых стержней**. Поскольку он связан с величиной критических напряжений, то он зависит от гибкости стержня.

Значения коэффициента установлены Строительными нормами и правилами (СНИП) и приводятся в виде таблицы в функции от гибкости для различных марок стали и других материалов (чугун, дерево).  
Справа приведен фрагмент **таблицы коэффициентов  $\varphi$** :

Гибкость $\lambda$	Сталь 4	Дерево
10	0.99	0.99
20	0.96	0.97
30	0.94	0.93
40	0.92	0.87
50	0.89	0.80
60	0.86	0.71
70	0.81	0.60
80	0.75	0.48
90	0.69	0.38
100	0.60	0.31
110	0.52	0.25

Таким образом, условие обеспечения определенного запаса по устойчивости стержня можно записать в виде, аналогичном условию прочности:

или

**Замечания:** 1. Во втором виде записи условия коэффициент  $\varphi$  уменьшает площадь поперечного сечения и иногда его называют **коэффициентом снижения грузоподъемности**.

2. Во всех случаях коэффициент  $\varphi$  учитывает уровень критических напряжений (или гибкости) в соответствии с изложенными выше правилами использования формулы Эйлера (или Ясинского). Следовательно, здесь не нужно находить предельную гибкость.

- Подбор сечения сжатых стержней.** При подборе сечения оказывается, что одно условие содержит два неизвестных: площадь поперечного сечения и значение коэффициента продольного изгиба, поскольку  $\varphi = \varphi(\lambda)$ , а гибкость зависит от размеров сечения (конкретно радиуса инерции).  
Всюду в литературе, в том числе в [1], описана последовательность подбора сечения сжатых стержней методом последовательных приближений:

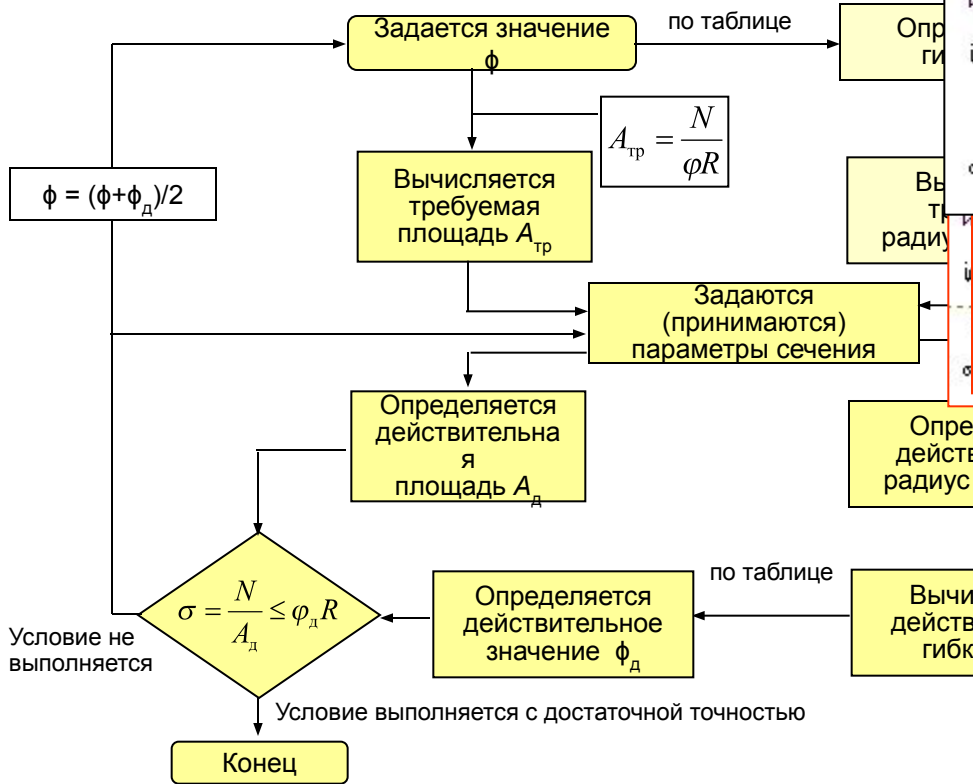
1. Задается значение  $\varphi$ , например,  $\varphi = 0.5$ . 2. Вычисляется **т р е б у е м а я** **п л о щ а д ь**:  $A_{тр} = \frac{N}{\varphi R}$  и **н а з н а ч а ю т с я** размеры.

3. Определяется радиус инерции:  $i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$ . 4. Вычисляется гибкость:  $\lambda_x = \frac{\mu_x l}{i_x}$ .

5. По получившейся гибкости из таблицы определяется действительное значение  $\varphi_d$ . 6. Сравнивается полученное  $\varphi_d$  с заданным ранее  $\varphi$  и выполняется шаг 1 с заданием нового значения  $\varphi$ , например, равным среднему (полусумме) из них.

# Лекция 12 (продолжение – 12.3)

- Быстрый алгоритм подбора сечения. Рассмотренный метод последовательного вычисления двух требуемых характеристик сечения (плоская высота, номер прокатного профиля) могут приниматься исходя из некоторых характеристик. Таким образом, уже в середине расчета выполняется алгоритм. Алгоритм может быть представлен в виде следующей блок-схемы:



MathCAD fragments illustrating the iterative selection of a rectangular section for a wooden post.

**Iteration 1:**

$$\phi_{t0} := \frac{\phi_{t0} + \phi_{t1}}{2} \quad \phi_{t0} = 0.246$$

Требуемый  $b$  по площади, м: Given  $h = 3 \cdot b$   $b \cdot h = \frac{N}{\phi_{t0} \cdot R}$   $\begin{pmatrix} b \\ h \end{pmatrix} := \text{Find}(b, h)$   $b = 0.091$

Действ. площадь и момент инерции:  $A_d := b \cdot h$   $A_d = 0.025$   $I_d := \frac{b^3 \cdot h}{12}$   $I_d = 1.723 \cdot 10^{-5}$

$i_d := \sqrt{\frac{I_d}{A_d}}$   $i_d = 0.026$  м  $\lambda_d := \frac{\mu \cdot l}{i_d}$   $\lambda_d = 114.051$  - действ. гибкость

$\phi_{t1} := y(\lambda_d, 0.25, 0.22, 110, 120)$   $\phi_{t1} = 0.238$  - действ. коэффициент  $\phi$

$\sigma_t := \frac{N}{\phi_{t1} \cdot A_d}$   $\sigma_t = 8.279 \cdot 10^6$  - действ. напряжение, Па  $\frac{\sigma_t - R}{R} \cdot 100 = 3.491$

**Iteration 2:**

$$i_d := \sqrt{\frac{I_d}{A_d}} \quad i_d = 0.025 \quad \lambda_d := \frac{\mu \cdot l}{i_d} \quad \lambda_d = 119.627$$

$\phi_{t1} := y(\lambda_d, 0.22, 0.18, 120, 130)$   $\phi_{t1} = 0.221$  - действ. коэффициент  $\phi$

$\sigma_t := \frac{N}{\phi_{t1} \cdot A_d}$   $\sigma_t = 9.781 \cdot 10^6$  - действ. напряжение, Па  $\frac{\sigma_t - R}{R} \cdot 100 = 22.267$

**Iteration 3:**

по площади, м: Given  $h = 3 \cdot b$   $b \cdot h = \frac{N}{\phi_{t0} \cdot R}$   $\begin{pmatrix} b \\ h \end{pmatrix} := \text{Find}(b, h)$   $b = 0.073$

Действ. площадь и момент инерции:  $A_d := b \cdot h$   $A_d = 0.016$   $I_d := \frac{b^3 \cdot h}{12}$   $I_d = 6.936 \cdot 10^{-6}$

$i_d := \sqrt{\frac{I_d}{A_d}}$   $i_d = 0.021$  м  $\lambda_d := \frac{\mu \cdot l}{i_d}$   $\lambda_d = 143.19$  - действ. гибкость

$\phi_{t1} := y(\lambda_d, 0.16, 0.14, 140, 150)$   $\phi_{t1} = 0.154$  - действ. коэффициент  $\phi$

$\sigma_t := \frac{N}{\phi_{t1} \cdot A_d}$   $\sigma_t = 2.021 \cdot 10^7$  - действ. напряжение, Па  $\frac{\sigma_t - R}{R} \cdot 100 = 152.573$

Фрагменты документа MathCAD, иллюстрируют подбор прямоугольного сечения (соотношения сторон 1/3) деревянной стойки, сжатой силой 5 т (49 кН). Расчетное сопротивление  $R = 8$  МПа. 5% точность достигнута за 3 итерации:

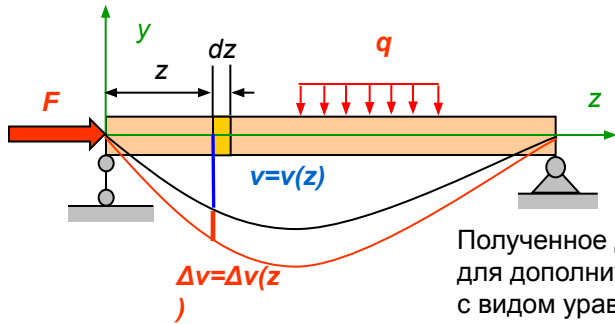
Т.к. коэффициент  $\phi$  и гибкость могут изменяться в каждой из итераций необходимо корректировать аргументы в функции линейной интерполяции (см. например, определение коэффициента  $\phi$  с использованием функции во второй и третьей итерациях).

Поскольку ускоренный алгоритм содержит большее число операций, то после первого приближения можно ограничиться лишь заданием параметров сечения по требуемой площади, но число итераций будет больше.



# Лекция 13

**Понятие о продольно-поперечном изгибе** – Продольно-поперечным изгибом называется сочетание поперечного изгиба со сжатием или растяжением бруса. В отличие от предыдущего рассмотрения сложного сопротивления здесь **учитываются прогибы оси бруса**, которые вызывают дополнительные изгибающие моменты в сечениях и дополнительные прогибы:



$$M_x = M_x^q + Fv. \quad \text{Полный прогиб: } v(z) = v(z) + \Delta v(z).$$

Поскольку при растягивающей силе прогибы уменьшаются, то далее рассматривается только лишь действие сжимающей силы. Дифференциальное уравнение упругой линии ( $y < 0$ ):

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{M_x}{EI_x} = \frac{M_x^q + Fv}{EI_x} = \frac{M_x^q - Fy}{EI_x} \Rightarrow \frac{d^2 y}{dz^2} \left[ \frac{M_x^q}{EI_x} \right] = \frac{-Fy}{EI_x} \Rightarrow \frac{d^2 (y - y^q)}{dz^2} = \frac{-Fy}{EI_x}$$

Полученное дифференциальное уравнение для дополнительных прогибов совпадает с видом уравнения, составленного для сжатой стойки при рассмотрении ее устойчивости:

$$EI_x \frac{d^2 y}{dz^2} = -Fy \Rightarrow \frac{d^2 y^q}{dz^2} \quad \text{или} \quad \frac{d^2 \Delta y}{dz^2} = \frac{-Fy}{EI_x}$$

$$k^2 = \frac{F}{EI_x} \quad \text{или} \quad kl = n\pi$$

Следовательно, решение полученного уравнения аналогично рассмотренному:

Подставим решение

в дифференциальное уравнение:  $\frac{d^2 (C_2 \sin kz)}{dz^2} = \frac{-Fy}{EI_x}$

$$\Rightarrow -k^2 C_2 \sin kz = \frac{-Fy}{EI_x} \Rightarrow k^2 \Delta y = \frac{Fy}{EI_x} \quad \text{или} \quad k^2 (y - y^q) = \frac{Fy}{EI_x}$$

Отсюда полный прогиб:  $y - \frac{F}{EI_x k^2} y = y^q \Rightarrow y = \frac{y^q}{1 - \frac{F}{EI_x k^2}} \Rightarrow y = \frac{y^q}{1 - \frac{F l^2}{EI_x n^2 \pi^2}}$

Изгибающий момент с учетом возникновения дополнительных прогибов:

$$M_x = M_x^q + \frac{Fy^q}{1 - \frac{F}{F_{кр}}}$$

Выражение  $\frac{n^2 \pi^2 EI_x}{l^2}$  при  $n = 1$

совпадает с формулой Эйлера для критической силы.

Наибольшие нормальные напряжения с учетом возникновения дополнительных прогибов:

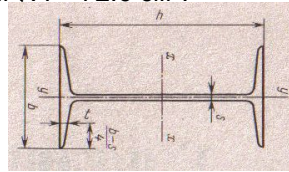
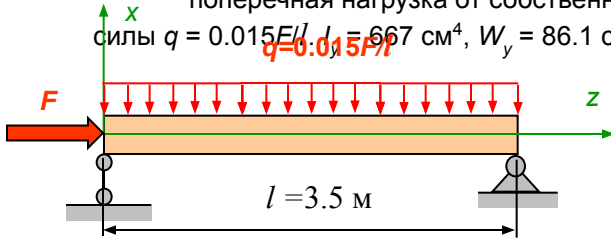
$$\sigma = -\frac{F}{A} - \frac{M_x^q}{W_x} - \frac{Fy^q}{W_x \left( 1 - \frac{F}{F_{кр}} \right)}$$

- Замечания:**
- Не следует отождествлять критическую силу в полученной формуле для прогибов с критической силой, определяемой при расчете на устойчивость, т.к.:
    - здесь она вычисляется с использованием момента инерции относительно нейтральной оси, *перпендикулярной* плоскости действия поперечной нагрузки, т.е. не относительно оси с максимальной гибкостью, как это должно делаться при расчете на устойчивость.
    - здесь величина критической силы *не ограничивается предельной гибкостью*, как это делается с кривой Эйлера.
  - Если величина продольной сжимающей силы приближается к ее критическому значению, то прогиб балки стремится к бесконечности. Напомним, что при выводе использовалось *приближенное* уравнение упругой линии, которое справедливо лишь для малых прогибов. Полученная формула справедлива для практических расчетов лишь при  $F < 0.8 F_{кр}$ .

Таким образом, **нормальные напряжения при продольно-поперечном изгибе нелинейно зависят от величины сжимающей силы.**

# Лекция 13 (продолжение – 13.2)

**Пример [1].** Рассмотрим определение максимальных нормальных напряжений в распорке стенок котлована, выполненной из стального двутавра №40 (стенка в горизонтальном положении, опирание на стенки - шарнирное). На распорку действует сжимающая сила  $F$  и поперечная нагрузка от собственного веса и временного настила, заданная как доля от сжимающей силы  $q = 0.015 F/l$ .  $I_y = 667 \text{ см}^4$ ,  $W_y = 86.1 \text{ см}^3$ .  $A = 72.6 \text{ см}^2$ .

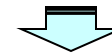


Максимальное сжимающее напряжение с учетом поперечной нагрузки определяется выражением (вертикальная ось обозначена как x):

$$|\sigma|_{\max} = \frac{F}{A} + \frac{M_y^q}{W_y} + \frac{F x^q}{W_y \left(1 - \frac{F}{F_{\text{кр}}}\right)}$$

Обозначим соотношение сжимающей силы и критической силы как:

$$\frac{F}{F_{\text{кр}}} = \alpha$$



$$|\sigma|_{\max} = \frac{F}{A} + \frac{0.015 F l}{8 \cdot W_y} + \frac{0.075 F^2 l^3}{384 \cdot W_y (1 - \alpha)}$$

$$\sigma_{\max FO}(F) := \frac{F}{A} + \frac{0.015 \cdot F \cdot l}{8 \cdot W_y} \quad \text{без учета дополнительного изгибающего момента, МПа}$$

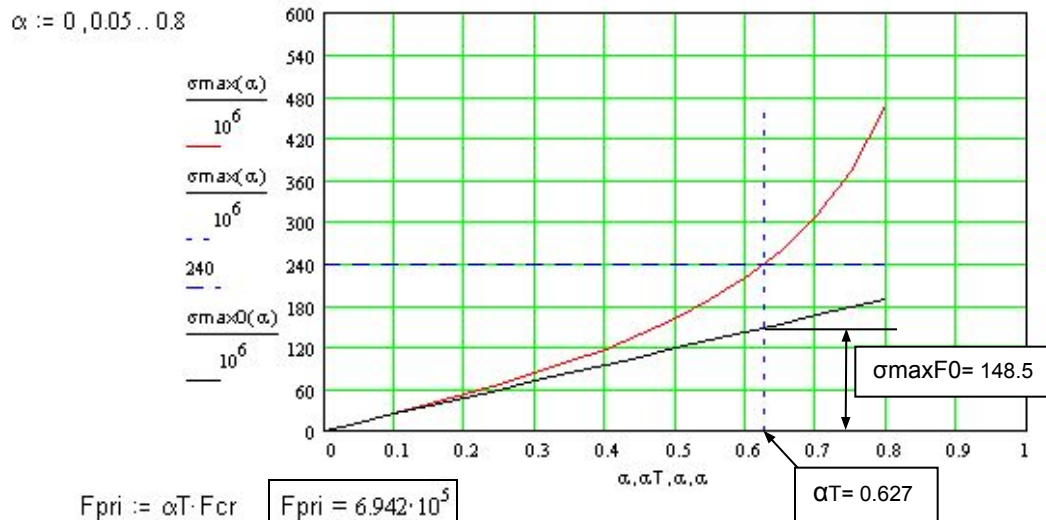
$$\frac{\sigma_{\max FO}(F_{\text{pri}})}{10^6} = 148.53$$

Погрешность от неучета дополн. изгибающего момента:  $\frac{\sigma_T - \sigma_{\max FO}(F_{\text{pri}})}{\sigma_T} \cdot 100 = 38.113$

$F := 1000$  Given  $\sigma_{\max FO}(F) = \sigma_T$  Find(F) =  $1.122 \cdot 10^6$

$$\sigma_{\max}(\alpha) := \frac{\alpha \cdot F_{\text{кр}}}{A} + \frac{0.015 \cdot \alpha \cdot F_{\text{кр}} \cdot l}{8 \cdot W_y} + \frac{0.075 \cdot (\alpha \cdot F_{\text{кр}})^2 \cdot l^3}{384 \cdot E \cdot I_y \cdot W_y \cdot (1 - \alpha)}$$

$\alpha := 0.5$  Given  $\sigma_{\max}(\alpha) = \sigma_T$   $\alpha_T := \text{Find}(\alpha)$   $\alpha_T = 0.627$



Предельное значение сжимающей силы для данного сечения только от сжатия ограничивается пределом текучести ( $\sigma_T = 240 \text{ МПа}$ ):  $F_{\text{пр}} = \sigma_T A = 1742 \text{ кН}$ .

Величина критической силы при этом составляет  $F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E I_y}{l^2} = 1107 \text{ кН}$ . ( $E = 2.06 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ):

В системе MathCAD исследуем зависимость максимального нормального напряжения от соотношения  $\alpha$ :

1. Красная кривая  $\sigma_{\max}(\alpha)$  показывает нелинейный рост напряжений при увеличении соотношения  $\alpha$ .
2. Черная прямая  $\sigma_{\max 0}(\alpha)$  - изменение напряжения без учета дополнительного изгибающего момента.
3. В блоке Given найдено значение параметра  $\alpha = 0.627$ , при котором напряжения достигают предела текучести. Величина сжимающей силы при этом составляет  $694.2 \text{ кН}$ .

В следующем фрагменте вычислено напряжение от этой силы, получаемая без учета дополнительного изгибающего момента, и погрешность (38.1%). Ниже вычислено значение предельной сжимающей силы, если доп. изгиб. момент не учитывается.

# Лекция 13 (продолжение – 13.3)

- Изменение максимального прогиба в функции от коэффициента  $\alpha$ . Максимальный прогиб балки при продольно-поперечном изгибе определяется по приближенной формуле, полученной ранее:

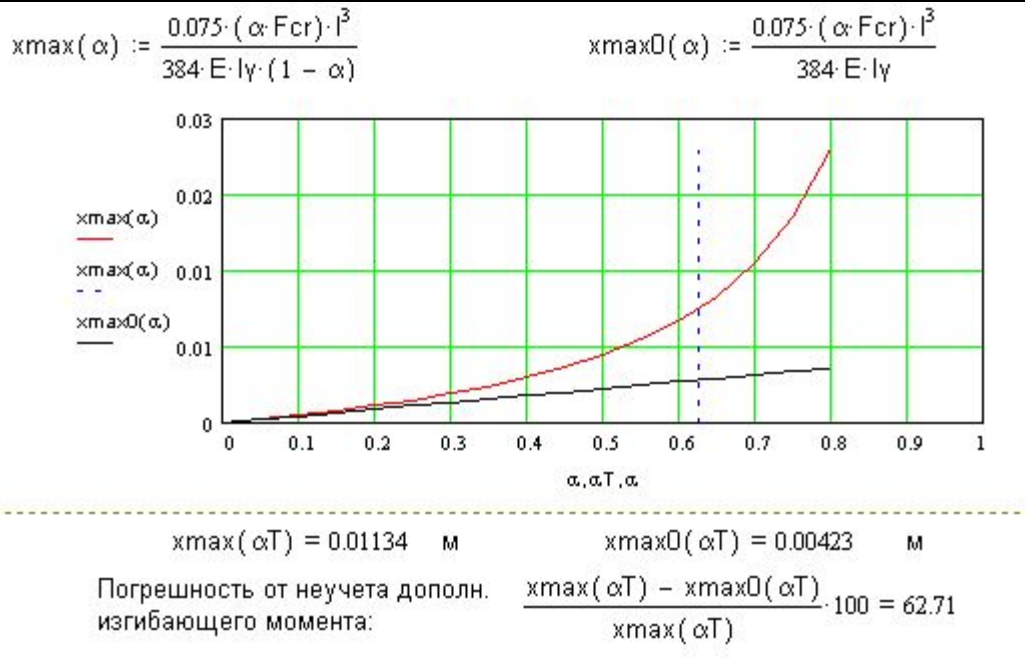
$$y = \frac{y^q}{1 - \frac{F}{F_{кр}}}$$

где  $y^q$  – прогиб от поперечной нагрузки  
 Для рассмотренного примера [1]:

$$v^q = x_{\max}^q = \frac{5ql^4}{384EI_y} = \frac{0.075Fl^3}{384EI_y}$$

$$v = x_{\max} = \frac{0.075Fl^3}{384EI_y(1-\alpha)}$$

Таким образом, максимальный прогиб для этого примера:



В системе MathCAD получаем зависимость максимального прогиба при продольно-поперечном изгибе от соотношения  $\alpha$ :

На этом же графике для сравнения построена линейная зависимость максимального прогиба без учета влияния продольной силы (дополнительного изгибающего момента) от соотношения  $\alpha$ .

Ниже графиков вычислены прогибы, определяемые с помощью нелинейной и линейной зависимостей при действии силы, при которой напряжения достигают предела текучести ( $\alpha_T = 0.627$ ) – 11.3 мм и 4.23 мм соответственно. Погрешность вычисления прогибе без учета влияния сжимающей силы составляет 62.7%.

Таким образом, полученные погрешности при вычислении напряжений и прогибов показывают что, **сжимающая сила имеет существенное влияние на напряженное и деформированное состояние балок при продольно-поперечном изгибе.**

# Лекция 14

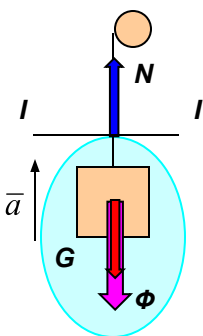
- Понятие о динамической нагрузке** – **Динамической нагрузкой** является такая нагрузка, которая быстро меняет свое значение и/или место приложения. В результате действия динамической нагрузки возникают колебания системы (при наличии положения равновесия и достаточных возвращающих сил). До сих пор предполагалось, что увеличение нагрузки, например, в предыдущем разделе, происходит медленно (постепенно) и в каждый момент времени существует точное равновесие между внешними силами и внутренними силами (упругости). При резком изменении нагрузки материальным точкам системы сообщается некоторое ускорение и система выводится из состояния равновесия и далее, в общем случае, точки системы движутся неравномерно по некоторым траекториям. При этом упругие связи между ними испытывают динамические воздействия (меняющиеся во времени), возникающие внутренние силы, напряжения и деформации могут превышать в несколько раз расчетные значения, определенные при статическом действии нагрузки.
- Согласно **принципу Даламбера** движущуюся неравномерно (с ускорениями) систему **можно рассматривать как систему, находящуюся в равновесии, если к заданным силам добавить соответствующие силы инерции**. Если это сделано, то при расчете используются известные уравнения равновесия и другие соотношения, полученные из них, однако такой расчет (с учетом сил инерции) называют **динамическим расчетом**, поскольку получаемые результаты содержат динамические составляющие усилий, зависящие от движения точек системы (ускорений) и, значит, от параметров действующей динамической нагрузки.

**Динамический коэффициент** – есть величина, сопоставляющее *динамическое* значение некоторого фактора (усилия, напряжения, перемещения) с соответствующим *статическим* значением этого фактора, в виде отношения:

$$k_d = \frac{S_d}{S_{ст}}$$

**Пример 1:** Кабина лифта весом  $G$  поднимается тросом с ускорением  $a$ . Определить усилие в тросе.

1. Проводим сечение  $I-I$ .
2. Выбираем объект (кабина лифта, нижняя часть троса).
3. Заменяем действие отброшенной части усилием  $N$ .
4. Добавляем к действующим силам силу инерции:  $\bar{\Phi} = -m\bar{a}$ .
5. Составляем уравнение равновесия:  $\sum Y_i = 0; N - G - \Phi = 0$ .



Таким образом, **динамическое значение усилия определяется через статическое значение посредством динамического коэффициента** как

Определяем усилие в тросе:  $N = G + \Phi = G + \frac{G}{g} a_y = G \left[ 1 + \frac{a_y}{g} \right]$ .

Получено **динамическое** значения усилия, зависящее от величины ускорения подъема кабины. При отсутствии ускорения ( $a_y = 0$ , кабина находится в статическом равновесии) усилие (**статическое**) в тросе равно весу кабины:  $N_{ст} = G$ .

Динамический коэффициент равен:

$$k_d = \frac{N_d}{N_{ст}} = \frac{G \left[ 1 + \frac{a_y}{g} \right]}{G} = 1 + \frac{a_y}{g}$$

$N_d = k_d N_{ст}$  в общем случае:

$$S_d = k_d S_{ст}$$

- Ударное действие нагрузки** – При падении груза на упругую конструкцию в момент контакта между соударяемыми телами развиваются силы взаимодействия, характеризующиеся быстрым ростом их величины за очень малый отрезок времени и последующим быстрым спадом. Закон изменения этих сил установить чрезвычайно сложно, поэтому такие динамические задачи решаются с помощью теорем динамики, которые позволяют связать исходное и конечное состояние системы без детального рассмотрения быстро протекающих процессов между этими состояниями.

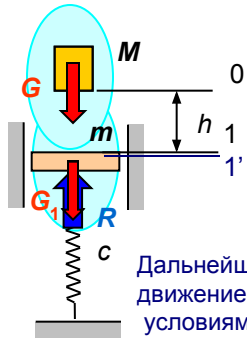
Основной гипотезой при решении динамических задач для упругих систем является допущение, что связь между усилиями и деформациями сохраняется при *динамическом* действии нагрузки такой же, как и при *статическом* ее действии, т.е.

$$\delta_d = \frac{F_d}{c} \quad \text{и} \quad \delta_{ст} = \frac{F_{ст}}{c}, \quad \text{где } c \text{ – жесткость упругой связи.}$$

# Лекция 14 (продолжение – 14.2)

**Пример 2. Удар падающего груза на упругую конструкцию.** Основное назначение введенного динамического коэффициента состоит в приведении динамической задачи к статической, как это было сделано в примере 1. Здесь покажем процедуру определения динамического коэффициента для достаточно простой, но практически важной упругой системы – жесткая платформа на упругих опорах (пружинах).

- Допущения:**
1. Масса упругих связей не учитывается (инерционные силы не возникают, волны упругих деформаций не возникают).
  2. Соударение считаем абсолютно неупругим (нет отскока, после удара обе массы движутся совместно с одинаковой скоростью).
  3. Время удара (от момента касания до момента совместного движения) равно нулю.
  4. Удар считаем центральным, движение платформы поступательным (в этом случае массу платформы  $m$  можно считать точечной массой, а пружины заменить одной пружинной с эквивалентной жесткостью  $c$ , равной сумме жесткостей пружин).



1. Определим скорость подлета падающей массы, используя теорему об изменении кинетической энергии:

$$T_1 - T_0 = A_{01} \quad T_0 = 0, \quad T_1 = \frac{Mv_1^2}{2}, \quad A_{01} = Gh = Mgh. \quad \implies \quad v_1 = \sqrt{2gh}$$

2. Определим скорость движения системы сразу после удара, используя теорему об изменении количества движения:

$$Q_{1'} - Q_1 = \int_0^{t \ll 1} (G + G_1 - R) dt \approx 0 \quad \text{Считая время удара } t = 0: \quad Q_{1'} = Q_1, \quad Mv_1 = (M + m)v_1', \quad \implies \quad v_1' = \frac{Mv_1}{(M + m)}$$

Дальнейшее движение системы  $(M + m)$  будет происходить как движение упругой системы с одной степенью свободы с начальными условиями  $y_0 = 0$  и  $v_0 = v_1'$  - колебание относительно положения равновесия,  $y = -\lambda_{ст}$ , с амплитудой  $a$ , зависящей от скорости  $v_0$  и круговой частоты  $k$ . Здесь и далее  $\lambda_{ст}$  - статическая деформация от веса груза, поскольку начало координат принято совпадающим с положением платформы до падения груза, т.е. пружина уже имела статическую деформацию от веса платформы.

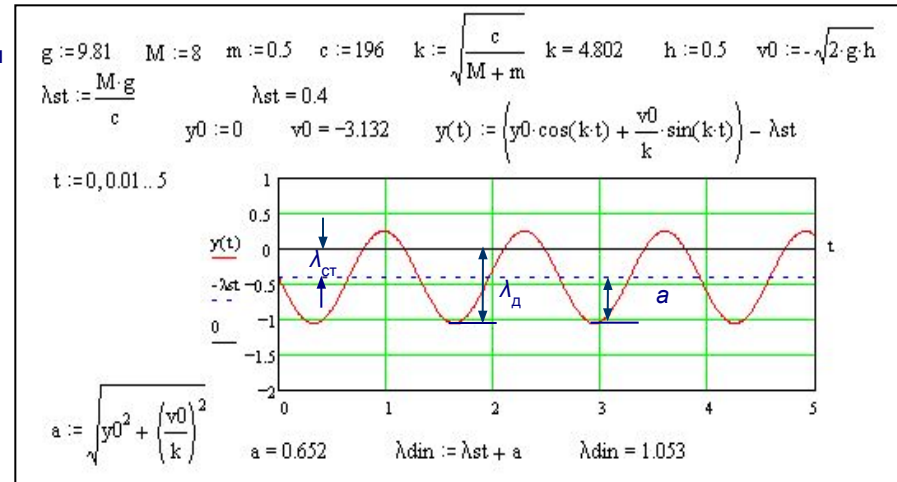
Наибольшее усилие в пружине  $N_d = R_d$  возникает в положении максимального сжатия. В этот момент скорость движения падает до нуля и кинетическая энергия системы обращается в ноль.

Связь между деформацией  $\lambda$  и усилием  $N$  в общем виде:  $\lambda = \frac{N}{c}$ .

Статическая деформация (при равновесии):  $\lambda_{ст} = \frac{N_{ст}}{c} = \frac{Q}{c}$ .

Максимальная (динамическая) деформация:  $\lambda_d = \frac{N_d}{c}$ .

Из последних соотношений видно, что **все факторы при ударе (усилия, деформации) пропорциональны этим факторам, определенным при статическом действии нагрузки (равновесии)**. Коэффициентом пропорциональности является динамический коэффициент, который и следует определить.



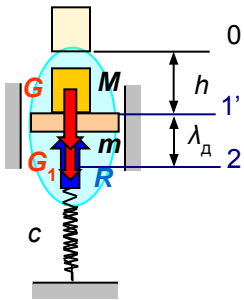


# Лекция 14 (продолжение – 14.3)

## Пример 2. Удар падающего груза на упругую конструкцию (продолжение).

3. Запишем теорему об изменении кинетической энергии для двух состояний  $\lambda = 0$  и  $\lambda = \lambda_d$ :

$$T_2 - T_1' = A_{1'2}$$



**Кинетическая энергия**

для состояния  $\lambda = 0$ :

$$T_1' = \frac{(M + m)(v_1')^2}{2}$$

Ранее было получено:

$$v_1' = \frac{Mv_1}{(M + m)}$$

$$v_1 = \sqrt{2gh}$$

$$T_1' = \frac{M^2 gh}{M + m}$$

$$v_1' = \frac{M\sqrt{2gh}}{(M + m)}$$

Кинетическая энергия для состояния  $\lambda = \lambda_d$  равна 0 (при достижении максимальной деформации скорость упала до нуля):

$$T_2 = 0.$$

**Работа внешних и внутренних сил системы**

при переходе из состояния  $\lambda = 0$  в состояние  $\lambda = \lambda_d$ :

$$A_{1'2} = A_G + A_{G0} + A_R = G\lambda_d + G_1\lambda_d - \int_0^{\lambda_d} R d\lambda.$$

Работа упругой реакции пружины, зависящей от деформации, равна: Здесь  $R_1$  – величина реакции пружины до удара, равная весу платформы  $G_1$  (равновесное положение).

$$A_R = - \int_0^{\lambda_d} (R_1 + c\lambda) d\lambda = -R_1\lambda_d - c\frac{\lambda_d^2}{2}.$$

Подстановка работы упругой реакции пружины с учетом  $R_1 = G_1$ , сокращения и заменой  $G = c\lambda_{ct}$  в выражение для работ дает:

$$A_{1'2} = c\lambda_{ct}\lambda_d - c\frac{\lambda_d^2}{2}$$

Подставим полученные выражения в теорему об изменении кинетической энергии:

$$0 - \frac{M^2 gh}{M + m} = c\lambda_{ct}\lambda_d - c\frac{\lambda_d^2}{2} \implies \lambda_d^2 - 2\lambda_{ct}\lambda_d - 2h\frac{M}{M + m}\lambda_{ct} = 0$$

- приведенное квадратное уравнение относительно  $\lambda_d$

## Пример 3. Удар падающего груза на упругую балку.

В отличие от рассмотренного примера 2 теперь ударяемое тело не является жестким, масса его распределена по длине, его точки по длине имеют скорости и ускорения.

А почему при идеализации заменяется масса балки половинной массой? Об этом см. на следующей лекции.

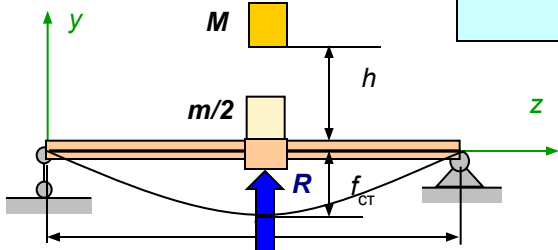
$$\frac{MGh}{M + m} = \frac{M(c\lambda_{ct})h}{M + m} \implies \lambda_d = \lambda_{ct} \pm \sqrt{\lambda_{ct}^2 + 2h\frac{M}{M + m}\lambda_{ct}} \text{ или } \lambda_d = \lambda_{ct} \left( 1 \pm \sqrt{1 + \frac{2h}{\lambda_{ct}} \frac{M}{M + m}} \right)$$

коэффициент: коэффициент динамический

$$k_d = \frac{\lambda_d}{\lambda_{ct}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\lambda_{ct}} \frac{M}{M + m}}$$

Теперь реактивное усилие пропорционально прогибу балки и динамический коэффициент имеет вид:

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{f_{ct}} \frac{M}{M + m/2}}$$



балки ( $m = 0$ ) или сосредоточить ее в середине пролета, а остальную часть заменить упругой безмассовой связью, работающей на изгиб:

Силы упругости изгибаемой балки препятствуют изменению кривизны ее оси, а значит и прогибу балки в месте удара. При такой идеализации балки получаем расчетную схему, совпадающей со схемой в рассмотренном примере 2:



# Лекция 15

**Динамический коэффициент при ударе** – Примеры 2 и 3 показывают путь решения задач при ударе для упругих конструкций. Полученная формула для динамического коэффициента может использоваться в различных других практических случаях (продольный, поперечный удар при изгибе, удар с кручением) и в более общем случае имеет вид:

$$k_d = \frac{\lambda_d}{\lambda_{ст}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g\lambda_{ст}}\eta}$$

Здесь использована скорость падающего груза вместо высоты падения. Это позволяет отказаться от стереотипа падающего груза и решать другие интересные задачи, в которых скорость подлета ударяющей массы вычисляется иначе.

Коэффициент  $\eta$  учитывает соотношение ударяемой и ударяющих масс (при кручении соотношение моментов инерции масс).

Для каждого из частных случаев используется соответствующие характеристики деформации (продольное перемещение, прогиб, угол закручивания), определенные при статическом действии динамической нагрузки.

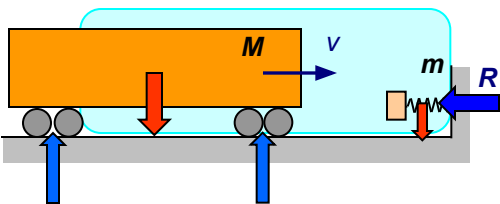
**Замечания:** 1. Еще более общий вид формулы для динамического коэффициента можно получить с использованием кинетической энергии ударяющей массы  $T = Mv^2/2$  и потенциальной энергии деформации при статическом приложении нагрузки  $U_{ст} = G\lambda_{ст}/2 = Mg\lambda_{ст}/2$ :

Таким образом, теперь формула не содержит особенностей, связанных с характером ударного воздействия и видом деформации.

$$v^2 = \frac{2T}{M}, \quad g\lambda_{ст} = \frac{2U_{ст}}{M} \Rightarrow k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{T}{U_{ст}}\eta}$$

2. Если высота падения равна нулю (скорость или кинетическая энергия ударной массы равна нулю), то динамический коэффициент равен 2. Это, так называемый, *мгновенный удар* (мгновенное приложение нагрузки). Это явление может произойти, например, при выбивании кувалдой стойки опалубки бетонного элемента перекрытия (собственный вес и/или полезная нагрузка мгновенно передается на этот элемент).

3. Во всех приведенных видах формулы динамического учитывается вклад силы тяжести при исчислении работы или энергии деформации (вертикальный удар). В случае *горизонтального удара* формула для динамического коэффициента будет выглядеть иначе:



$$v'_1 = \frac{Mv_1}{(M+m)}; \quad T'_1 = \frac{(M+m)v_1^2}{2}; \quad T_2 = 0.$$

$$A_{1,2} = A_R = -\int_0^{\lambda_d} R d\lambda = -\int_0^{\lambda_d} c\lambda d\lambda = -c\frac{\lambda_d^2}{2}$$

$$T_2 - T'_1 = A_{1,2} \Rightarrow 0 - \frac{M^2v^2}{2(M+m)} = -c\frac{\lambda_d^2}{2}$$

$$\frac{MGv^2}{2g(M+m)} = \frac{M(c\lambda_{ст})v^2}{2g(M+m)}$$

$$k_d = \frac{\lambda_d}{\lambda_{ст}} = \sqrt{\frac{v^2}{g\lambda_{ст}}\eta}$$

$$\lambda_d^2 = v^2 \frac{M}{g(M+m)} \lambda_{ст}$$

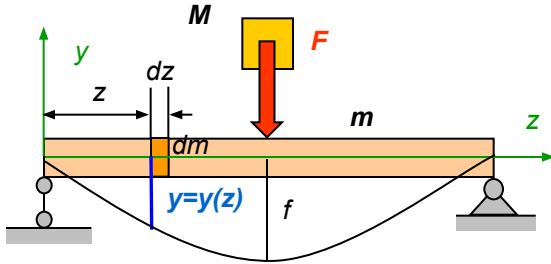
4. При рассмотрении динамического удара в случае резкого торможения быстро вращающегося маховика динамический коэффициент теряет смысл, поскольку нельзя сопоставить соответствующее статическое действие. Тем не менее динамическое усилие возникает (динамический крутящий момент) и его можно найти с использованием теоремы об изменении кинетической энергии или закона сохранения механической энергии:

$$T_0 = U_d, \quad T_0 = \frac{I_z \omega_0^2}{2}, \quad U_{ст} = \frac{M_{д,кр}^2 l}{2GI_p}$$

Здесь  $I_z$  – осевой момент инерции массы маховика,  $I_p$  – полярный момент инерции поперечного сечения вала.

# Лекция 15 (продолжение – 14.2)

**Учет массы конструкции при ударе.** Конструкцию, представляющую собой упругое деформируемое тело с распределенной массой, можно заменить системой материальных точек с безмассовыми упругими связями. Приведение к такой заменяющей системе основывается на сопоставлении кинетических энергий конструкции и системы после удара. Рассмотрим, например, поперечный удар по двухопорной балке.



После удара ось балки изгибается и динамические перемещения в каждой из ее точек будут различными. Предполагая, что динамические перемещения пропорциональны статическим функция прогибов может быть описана одним и тем же уравнением, как при действии сосредоточенной силы в середине пролета:

$$y(z) = -\frac{f}{l^3}(3l^2z - 4z^3); \quad f = \frac{Fl^3}{48EI_x}$$

Это уравнение, записанное для половины длины пролета ( $z \leq l/2$ ), и значение стрелы прогиба может быть получено, например, методом начальных параметров.

Скорость каждой из точек оси балки в произвольный момент времени будут пропорциональны прогибам ( $v_{max}$  – скорость точки в середине пролета):

$$v(z) = -\frac{v_{max}}{l^3}(3l^2z - 4z^3)$$

Для вычисления кинетической энергии балки выделим элемент  $dz$ , на расстоянии  $z$  от левого конца балки и проинтегрируем:

$$T = 2 \int_0^{l/2} \frac{v(z)^2}{2} dm = 2 \int_0^{l/2} \frac{\gamma A}{g} \left[ \frac{v_{max}}{l^3}(3l^2z - 4z^3) \right]^2 dz$$

$$\Rightarrow T = \frac{17}{35} \frac{\gamma A l}{2g} v_{max}^2 = \frac{17}{35} \frac{m}{2} v_{max}^2$$

Кинетическая энергия эквивалентной сосредоточенной массы (приведенной массы балки) равна:  $T = \frac{m_{np}}{2} v_{max}^2$

$$\Rightarrow m_{np} = \frac{17}{35} m$$

Процедуру задания кривой прогибов (методом начальных параметров), вычисления кинетической энергии балки и определения приведенной массы балки можно проиллюстрировать в системе MathCAD:

Здесь же показано, что кривая прогибов, очерченная по синусоидальному закону практически совпадает с прогибами от сосредоточенной силы.

Второй фрагмент показывает определение приведенной массы с использованием обоих вариантов задания кривой прогибов. Ошибка при задании кривой прогибов по синусоидальному закону составляет менее 3%. Таким образом, для двухопорной балки при ударе в середине пролета можно принимать в качестве приведенной массы  $0.5 m$ .

$F := 1$      $R := 0.5 \cdot F$      $l := 1$      $E := 1$      $I_x := 1$      $\phi_0 := -0.0063$   
 Given     $\phi_0 \cdot l + \frac{R \cdot l^3 - F \cdot (1 - 0.5 \cdot l)^3}{6 \cdot E \cdot I_x} = 0$      $\phi_0 := \text{Find}(\phi_0)$      $\phi_0 = -0.063$

$y(z) := \phi_0 \cdot z + \frac{R \cdot z^3 - \text{if}[z < 0.5 \cdot l, 0, F \cdot (z - 0.5 \cdot l)^3]}{6 \cdot E \cdot I_x}$

$z := 0, 0.1..1$      $y1(z)$

$v_{max} := 1$      $\gamma := 1$      $A := 1$      $g := 1$

$v(z) := v_{max} \cdot \frac{y(z)}{y(0.5 \cdot l)}$      $T := \int_0^1 \frac{\gamma \cdot A}{g} \cdot \frac{v(z)^2}{2} dz$      $T = 0.243$

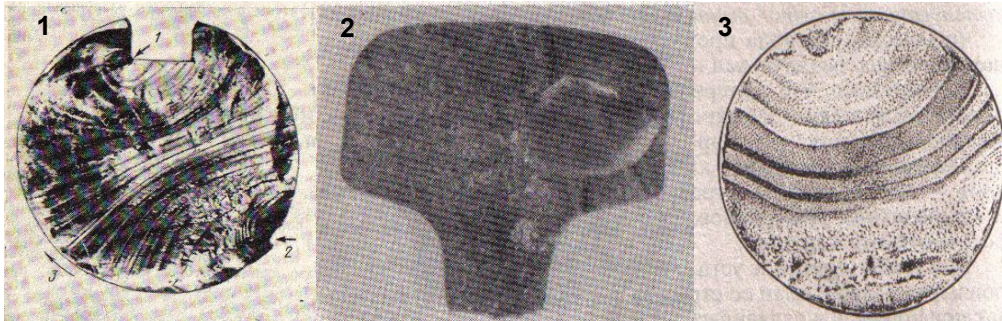
$m_{pr} := 1$     Given     $T = \frac{m_{pr} \cdot v_{max}^2}{2}$      $\text{Find}(m_{pr}) = 0.486$      $\frac{17}{35} = 0.486$

$v1(z) := v_{max} \cdot \frac{y1(z)}{y1(0.5 \cdot l)}$      $T := \int_0^1 \frac{\gamma \cdot A}{g} \cdot \frac{v1(z)^2}{2} dz$      $T = 0.25$

$m_{pr} := 1$     Given     $T = \frac{m_{pr} \cdot v_{max}^2}{2}$      $\text{Find}(m_{pr}) = 0.5$      $\frac{0.5 - 0.486}{0.486} \cdot 100 = 2.881$

# Лекция 16

- Возникновение и накопление усталостных повреждений** – При действии циклически изменяющихся нагрузок возникающие напряжения, превышающие определенный предел, вызывают образование и накопление повреждений. Этот необратимый процесс приводит к образованию трещины. Концентрация напряжений на краю трещины способствует дальнейшему ее развитию. При достижении длины трещины критического значения скорость продвижения трещины резко возрастает и конструкция разрушается изломом, идентичному хрупкому разрушению, даже при пластичных материалах. Последнее обстоятельство (факт хрупкого разрушения пластичных материалов) дало повод к предположению, что под влиянием переменных напряжений материал со временем постепенно перерождается, как бы “устает”.
- Процесс постепенного накопления повреждений в материале под действием переменных напряжений, приводящих к образованию трещины и разрушению, называется усталостью.**
- Свойство материала противостоять усталости называется выносливостью.**
- Механизм усталостного разрушения** – Процесс усталостного разрушения связан со **структурной неоднородностью** материала ( вариация размеров, формы и расположения отдельных зерен металла, ориентации кристаллографических плоскостей, наличие различных включений, дефекты кристаллической решетки и т.п.). При переменных напряжениях, даже не превосходящих в среднем по некоторой области предела пропорциональности, возникает в отдельных точках с неблагоприятным сочетанием неоднородностей, пластическая деформация – деформация сдвига по некоторым плоскостям под действием *касательных* напряжений с образованием *микротрещин*, которые далее под действием *нормальных* напряжений развиваются и сливаются между собой с образованием *макротрещин*.



Поверхность усталостного излома состоит из двух заметно отличающихся друг от друга зон: зона постепенного развития трещины – имеет гладкую поверхность с полосками, отражающими периоды роста трещины, зона хрупкого излома – имеет крупнозернистое строение.

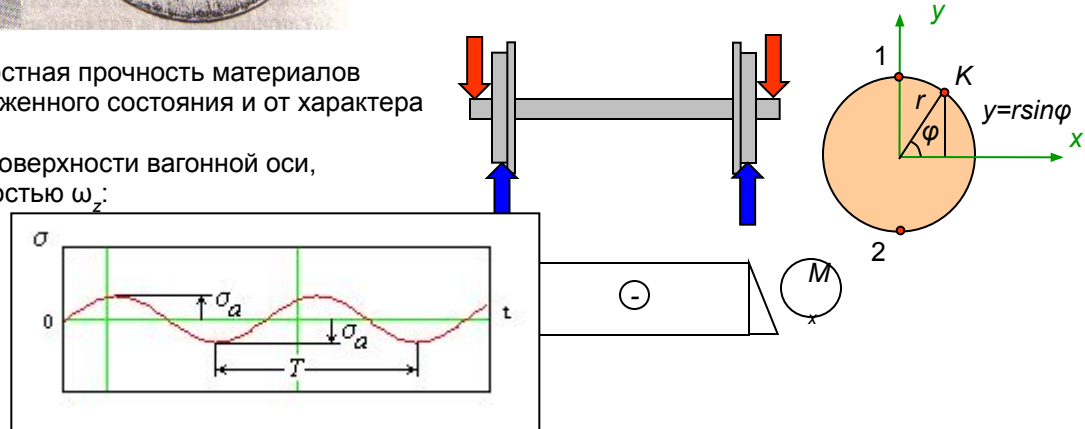
На рис.1 -3 показаны усталостное разрушение различных деталей – вала со шпоночной канавкой (трещина начала расти из левого ее угла), рельса (трещина начала расти на глубине 10 мм), вагонной оси (трещина начала расти из подповерхностного слоя).

- Циклы напряжений и их параметры** – Усталостная прочность материалов при переменных напряжениях зависит от вида напряженного состояния и от характера изменения напряжений в времени.

Определим напряжения в произвольной точке *K* на поверхности вагонной оси, вращающейся с некоторой постоянной угловой скоростью  $\omega_z$ :

$$\sigma = -\frac{M_x}{I_x} y = -\frac{M_x}{I_x} r \sin \varphi \Rightarrow \sigma = \sigma_a \sin \omega_z t.$$

$\sigma_a$  - максимальные напряжения в точках 1 (-), 2 (+)





# Лекция 16 (продолжение – 16.2)

■ **Характеристики циклов напряжений.** График напряжений в произвольной точке  $K$  вращающейся вагонной оси показывает периодическое изменение величины (и знака!) во времени с периодом  $T$  (через промежуток времени  $T$  напряжение принимает одно и то же значение). **Часть графика напряжений, соответствующая полному периоду их изменений называется циклом напряжений.** В данном примере цикл *симметричный* ( $\sigma_{max} = \sigma_a$ ,  $\sigma_{min} = -\sigma_a$ ).

При наличии какой-то постоянной составляющей напряжений, например, при дополнительном осевом сжатии или растяжении или вал имеет дисбаланс (неуравновешенную массу), цикл становится *асимметричным* ( $|\sigma_{max}| \neq |\sigma_{min}|$ ):

Если знаки напряжений  $\sigma_{max}$  и  $\sigma_{min}$  различны, то такой цикл называется *знакопеременным*.

Если знаки напряжений  $\sigma_{max}$  и  $\sigma_{min}$  постоянны, то такой цикл называется *знакопостоянным*.

Если одно из напряжений  $\sigma_{max}$  или  $\sigma_{min}$  равно нулю, то такой цикл называется *отнулевым* или *пульсирующим*.

Среднее напряжение цикла  $\sigma_m = (\sigma_{max} + \sigma_{min})/2$ :

Амплитуда напряжений цикла  $\sigma_a = \sigma_{max} - \sigma_m = \sigma_m - \sigma_{min} = (\sigma_{max} - \sigma_{min})/2$ .

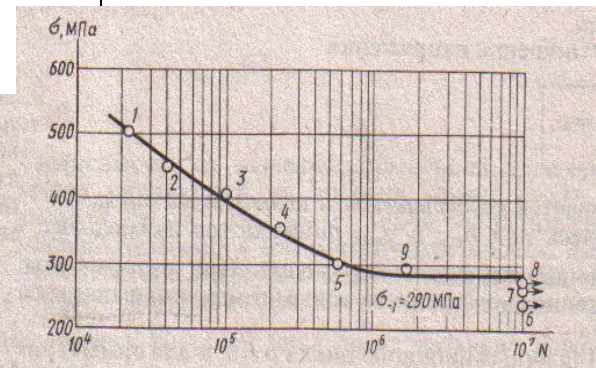
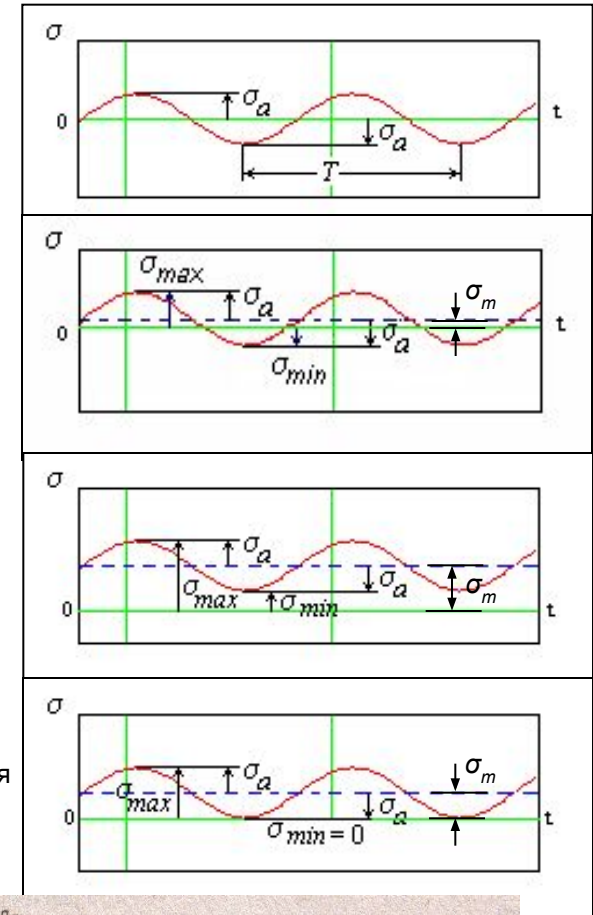
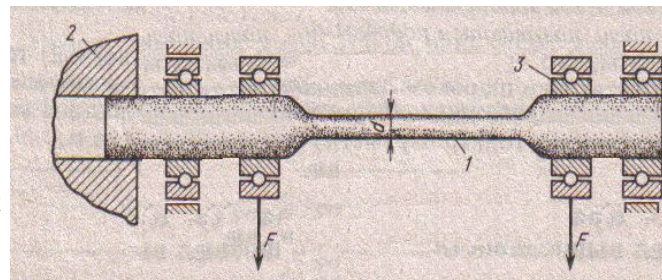
Любой цикл напряжений полностью характеризуется этими двумя параметрами. Однако, асимметричность цикла удобно оценить отношением, называемым *коэффициентом асимметрии цикла*:

$$r = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}$$

**Циклы, имеющие одинаковые значения коэффициента асимметрии называются подобными.**

■ **Экспериментальное определение предела выносливости.** На настоящем этапе развития науки о прочности нет возможности создать теоретические методы расчета на выносливость. В связи с этим теория усталостной прочности строится на основе экспериментальных данных. В результате большого числа испытаний для различных сталей и видов циклов получают **кривые усталости**. Ее ординаты представляют собой значения максимальных напряжений при которых происходит разрушение детали, а абсцисса – число циклов ( $N$ ), которое выдержала деталь до разрушения.

Образцы испытываются на специальных машинах в зависимости от вида нагружения. При испытании на изгиб образец 1 закрепляется в патроне 2 шпинделя, передающего вращения, поперечная нагрузка передается с помощью пары подшипников 3, связанных с грузовой траверсой. Счетчик оборотов фиксирует число циклов.



## Лекция 16 (продолжение – 16.3)

■ **Построение кривой усталости.** Проводятся испытания не менее 10 одинаковых образцов. Для получения первой точки (1) задается амплитудное напряжение  $\sigma_a = 0.65 - 0.75\sigma_B$ . При таком достаточно большом напряжении образец разрушается сравнительно быстро и результат наносится на график:

Для следующего идентичного образца амплитудное напряжение снижается, образец до своего разрушения работает дольше и полученный результат (точка 2) наносится на график:

Для следующего идентичного образца амплитудное напряжение вновь снижается и все действия повторяются:

Т.к. число циклов растет очень быстро, используется логарифмическая шкала по оси абсцисс. Вместе с этим растет время испытания каждого следующего образца. С этим и связана в первую очередь трудоемкость испытаний на выносливость. В процессе длительных испытаний было установлено, что образцы, неразрушившиеся при  $N = 10^7$  циклах, не разрушаются и при большем числе циклов. Собственно на это указывает горизонтальность последних участков кривой, построенной по полученным точкам.

Напряжение  $\sigma_r$ , соответствующее таким участкам, является характеристикой усталостной прочности и называется **пределом выносливости материала**.

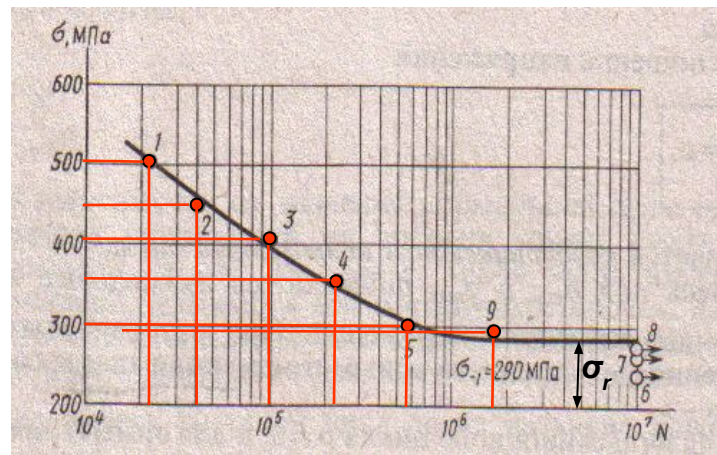
Самым неблагоприятным циклом с точки зрения обеспечения выносливости является *симметричный* цикл. Именно для такого цикла и проводятся чаще всего испытания на выносливость. Полученный предел выносливости для симметричного цикла обозначается как  $\sigma_{-1}$  (коэффициент асимметрии  $r = -1$ ). Эксперименты показывают, что для сталей соотношение между пределом выносливости и пределом прочности составляет:

$$\sigma_{-1} \approx (0.4 - 0.5)\sigma_B$$

При отсутствии данных о пределе выносливости для конкретной марки стали и при невозможности проведения испытаний на усталость можно пользоваться этим соотношением.

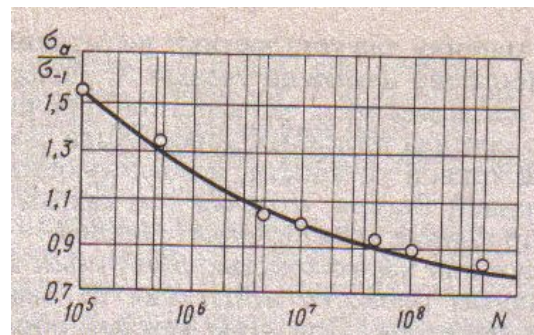
**Замечание:** Для цветных металлов кривая усталости не имеет горизонтального участка и для них принимается в качестве базового числа  $N = 10^8$ . Соотношение между пределом выносливости и пределом прочности:

$$\sigma_{-1} \approx (0.25 - 0.5)\sigma_B$$



Число циклов, равное для стали  $N = 10^7$ , называется **базовым** числом. При достижении числа циклов этого значения испытания прекращаются.

Между прочим, вагонное колесо совершает примерно такое число оборотов (циклов) на пути в 3 раза большем, чем расстояние от Москвы до Владивостока.



# Лекция 17

**Асимметричные циклы и диаграмма предельных амплитуд** – Поскольку во многих практических случаях детали конструкций и машин работают под действием циклических нагрузок, характеризуемых *асимметричным циклом*, то встает необходимость построения кривых усталости для каждого из возможных коэффициентов асимметрии. Это требует испытания уже не десятка образцов, а нескольких десятков. Соответственно увеличивается время и трудоемкость испытаний, не говоря уже о том, что необходимы специальные приспособления, регулирующие величину постоянной составляющей нагрузки. Для некоторых марок стали такие испытания были проведены и на их основании были построены **диаграммы предельных амплитуд** в осях  $\sigma_a, \sigma_m$ :

Заметим, что в таких координатах, **подобные циклы**, для которых коэффициент асимметрии одинаков, располагаются на лучах, проведенных из центра 0 диаграммы:

$$r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} = \text{const.} \Rightarrow \text{tg}\alpha = \frac{\sigma_a}{\sigma_m} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}} = \frac{1-r}{1+r} = \text{const.}$$

Для получения каждой из точек этой диаграммы требуется провести испытания на выносливость, т.е. построить кривую усталости, при каждом конкретном соотношении  $\sigma_a, \sigma_m$ , соответствующем определенному коэффициенту асимметрии:

Поскольку построение таких диаграмм предельных амплитуд для широкого набора марок стали и других материалов представляет собой чрезвычайно трудоемкую задачу, то используют схематизированные (упрощенные) диаграммы, строящиеся по результатам двух или трех испытаний, одно из которых статическое на прочность. Заметим, что точка А диаграммы соответствует *пределу выносливости для симметричного цикла* ( $r = -1$ ), а точка В – *пределу прочности для хрупких материалов*, определяемому из статических испытаний ( $r = 1$ ):

Схематизированная диаграмма предельных циклов для хрупких материалов представляет собой треугольную область:

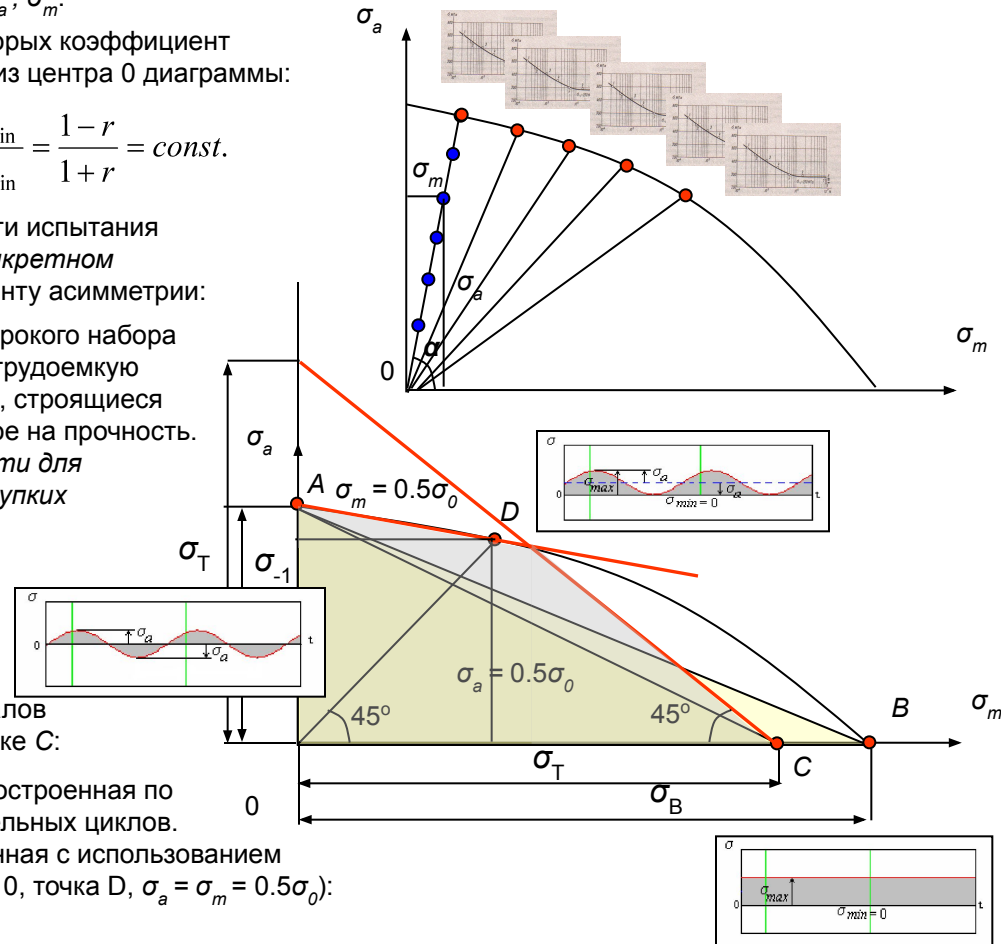
Для пластичных материалов (сталь) предельным напряжением при статическом нагружении является предел текучести, так что схематизированная диаграмма предельных циклов для этих материалов представляет собой также треугольную область, но с вершиной в точке С:

Видно, что для пластичных материалов упрощенная диаграмма, построенная по двум точкам мало соответствует действительной диаграмме предельных циклов. Поэтому получила широкое распространение диаграмма, построенная с использованием испытаний на усталость при отнулевом (пульсирующем) цикле ( $r = 0$ , точка D,  $\sigma_a = \sigma_m = 0.5\sigma_0$ ):

Через точки А и D проводится прямая:

Для пластичных материалов необходимо отсечь зону, в которой напряжения превышают предел текучести  $\sigma_a + \sigma_m > \sigma_T$ :

Получившийся четырехугольник представляет диаграмму предельных циклов по трем испытаниям для пластичных материалов:





# Лекция 17 (продолжение – 17.2)

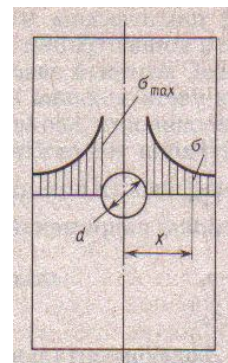
**Факторы, влияющие на усталостную прочность.** Проведенные эксперименты и практика эксплуатации деталей машин показывают, что прочность при переменных напряжениях (предел выносливости) в значительной мере зависит от формы (наличия концентраторов напряжений) и размеров детали, состояния ее поверхности и действия окружающей среды (условия эксплуатации). При испытаниях на выносливость используются стандартные образцы цилиндрической формы, диаметром 7-10 мм, имеющие полированную поверхность. Все другие образцы, выполненные из тех же материалов, но отличающиеся от стандартных перечисленными качествами, при испытаниях показывают как правило более низкий предел выносливости.

**Концентрация напряжений** – местное повышение уровня напряжений в местах резкого изменения размеров сечения, около отверстий, выкружек и канавок. Оно оценивается **теоретическим коэффициентом концентрации**, полученным методами теории упругости для каждого из видов концентраторов:

$$k_T = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\text{НОМ}}}$$

При циклическом изменении нагрузки в области концентрации напряжений зарождается и развивается трещина, которая в дальнейшем приводит к усталостному разрушению. Для каждого из видов концентраторов должны быть проведены соответствующие испытания на выносливость. Практически, вместо этого, влияние концентрации напряжений учитывается введением **эффективного коэффициента концентрации**, определяемым, как отношение предела выносливости стандартного (“гладкого”) образца к пределу выносливости образца с концентратором:

$$k_{\text{Э}} = \frac{\sigma_r}{\sigma_{rk}}$$



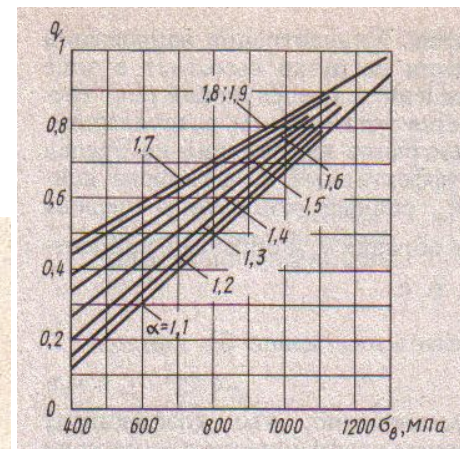
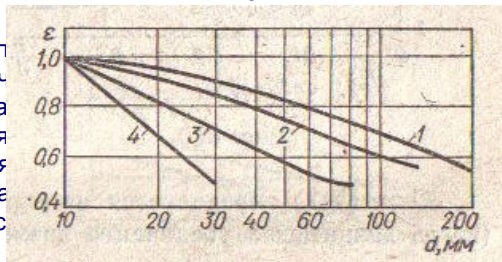
Хотя коэффициент  $k_{\text{Э}}$  должен определяться для каждого значения коэффициента асимметрии, обычно ограничиваются данными для симметричного цикла:

$$k_{\text{Э}} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1k}}$$

Эффективный коэффициент концентрации меньше теоретического, что объясняется влиянием микропластических деформаций на величину напряжений в зоне развития усталостной трещины. Этот эффект зависит от материала и в общем мало связан с видом концентратора. В связи с трудоемкостью испытаний на усталостную прочность часто эффективный коэффициент концентрации вычисляется при помощи выражения:

$$k_{\text{Э}} = 1 + q(k_T - 1) \quad \text{где } q \text{ — коэффициент чувствительности материала к концентрации напряжений.}$$

Коэффициент чувствительности материала  $q$  сильно зависит от предела  $\sigma_{-1}$  (высокопрочные стали) приближается к 1, поэтому применение высокопрочных нагрузок не всегда целесообразно. На графиках изменения  $q$  даны для различных коэффициентов концентрации. Для конструкционных сталей  $q \approx 0.6-0.8$ . Для этих материалов не чувствительны к концентрации напряжений. Это объясняется крайне неоднородной и вызывает внутреннюю (на уровне структурных составляющих) ту, которая создается геометрическими концентраторами, сечения.



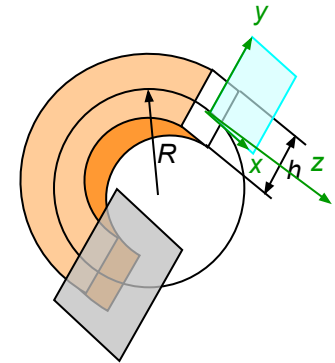
**Масштабный фактор** – С увеличением площади поперечного сечения при прочих равных условиях усталостная прочность образцов снижается. Причиной этого являются большая вероятность появления дефектов и перенапряженных зерен металла, ухудшение качества металла в связи с увеличением объема поковки, а также проявлением некоторых особенностей технологии обработки. Фактор учитывается введением **масштабного коэффициента** ( $\varepsilon < 1$ ), определяемого как отношение пределов выносливости детали и стандартного образца ( $d_0$ ):

$$\varepsilon = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1d_0}}$$

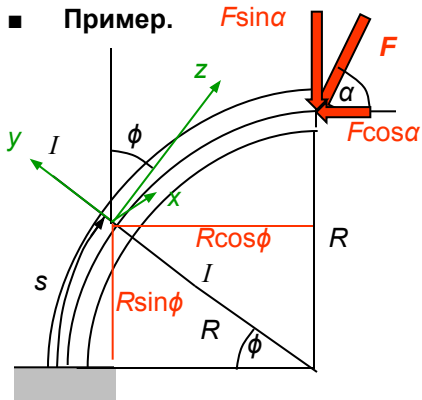


# Лекция 18 (дополнительный материал)

■ **Расчет кривых брусьев** – Инженеру часто приходится встречаться с проектированием кривых брусьев – брусьев, имеющих криволинейные оси (грузовые крюки, проушины, звенья цепей, пружины, арки мостов и т.п.). Наибольшее практическое значение имеют брусья, оси которых представляют собой плоские кривые (плоские кривые брусья). Различают криволинейные брусья *малой* кривизны ( $h < 1/5 R$ ) и *большой* кривизны ( $h > 1/5 R$ ). Нормальные напряжения в брусе малой кривизны с достаточной практической точностью могут определяться по формулам расчета прямого бруса, в брусе большой кривизны – распределение нормальных напряжений существенно отличается от их распределения в прямом брусе.



■ **Определение внутренних усилий** - Проводится так же, как в прямолинейных стержнях, за исключением того, что в качестве системы координат принимается подвижная (вращающаяся) система координат, в которой продольная ось z – касательная к оси бруса. Таким образом, по-прежнему в рассматриваемом поперечном сечении координатные оси x, y лежат в плоскости поперечного сечения, а ось z – перпендикулярна этой плоскости.



1. Проведем сечение I-I, перпендикулярное оси бруса, на произвольном расстоянии s от опорного сечения :
2. Выберем подвижные оси координат (угол наклона оси z к вертикали равен углу  $\phi$ , оси x и y перпендикулярны оси z и лежат в плоскости поперечного сечения):

3. Составим выражение для продольной силы, используя ее определение как алгебраическая сумма проекций всех сил, взятых по одну сторону от сечения, на ось z (силу F для удобства разложим на две составляющие):

$$N = \sum Z_i = -(F \sin \alpha) \cos \phi - (F \cos \alpha) \sin \phi; \quad (0 \leq \phi \leq \pi / 2).$$

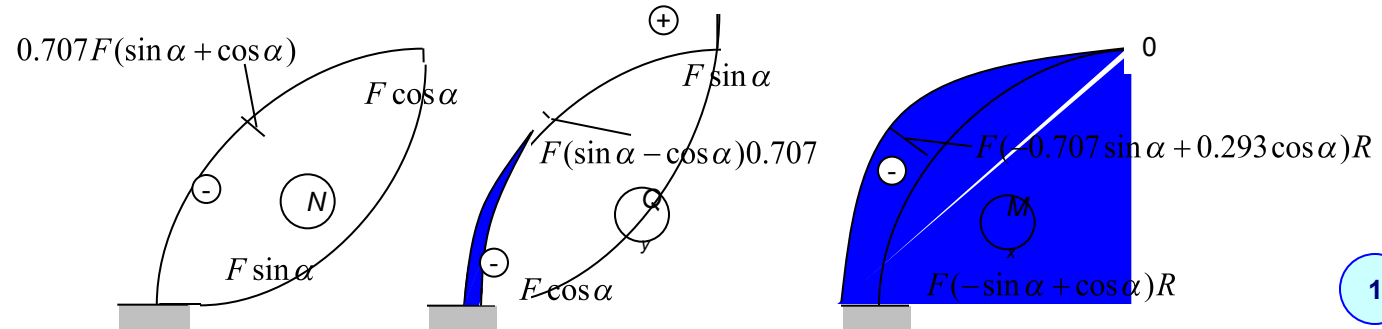
4. Составим выражение для поперечной силы, используя ее определение как алгебраическая сумма проекций всех сил, взятых по одну сторону от сечения, на ось y:

$$Q_y = \sum Y_i = (F \sin \alpha) \sin \phi - (F \cos \alpha) \cos \phi; \quad (0 \leq \phi \leq \pi / 2).$$

5. Составим выражение для изгибающего момента, используя его определение как алгебраическая сумма моментов всех сил, взятых по одну сторону от сечения, относительно оси x (ось проходит через центр тяжести сечения, перпендикулярно плоскости чертежа):

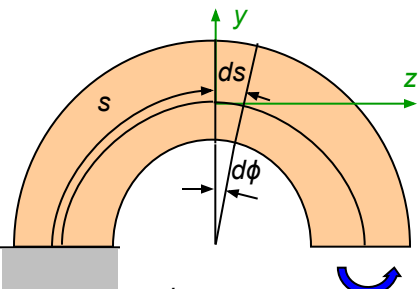
$$M_x = \sum M_{xi} = -(F \sin \alpha) R \cos \phi + (F \cos \alpha)(R - R \sin \phi); \quad (0 \leq \phi \leq \pi / 2).$$

6. Построим по полученным выражениям эпюры внутренних сил:



# Лекция 18 (продолжение – 18.2)

- **Нормальные напряжения в поперечных сечениях бруса большой кривизны** – При выводе формулы нормальных напряжений для кривых брусьев используются те же предположения (гипотезы), что и при рассмотрении плоского изгиба прямых брусьев (гипотеза плоских сечений, отсутствие давления между продольными волокнами). Дополнительно к этому предполагается, что кривой брус является плоским, т.е. его ось очерчивается плоской кривой).
- Как указывалось ранее, задача определения напряжений является статически неопределимой, для решения которой необходимо последовательно рассмотреть три стороны задачи:



1. **Статика:** Выделим малый элемент двумя нормальными к оси бруса сечениями и заменим действие отброшенных частей нормальными напряжениями. Под их действием элемент находится в равновесии.

Ранее *приведением распределенных сил к центру и центральным осям* были получены интегральные соотношения, связывающие нормальное усилие и изгибающий момент с нормальными напряжениями:

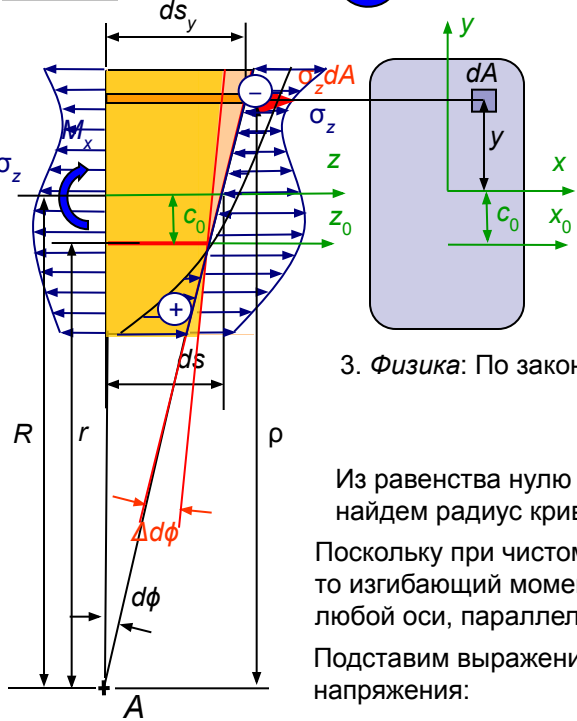
$$M_x = - \int_A \sigma_z y dA, \quad N = \int_A \sigma_z dA;$$

**Замечание:** Знак минус учитывает правило знаков для изгибающего момента и напряжений.

Так как нормальное усилие при изгибе равно нулю, то:

$$\int_A \sigma_z dA = 0.$$

Это указывает на то, что в сечении возникают напряжения разного знака и следует предполагать,



Второй интеграл в скобках равен нулю, тогда:

$$M_x = \frac{\Delta d\phi}{d\phi} E \int_A (y + c_0) dA = \frac{\Delta d\phi}{d\phi} E S_{x_0}.$$

где  $S_{x_0}$  – статический момент площади относительно нейтральной оси  $x_0$ :  $S_{x_0} = A c_0$ .

Теперь можно определить угол поворота сечения:

$$\Delta d\phi = \frac{M_x d\phi}{E S_{x_0}}.$$

Таким образом, нормальное напряжение **нелинейно** (гиперболически) зависит от расстояния до нейтральной оси. При  $(\rho - r) > 0$  – сжатие.

Подставим его в выражение для нормального напряжения:

$$\sigma_z = - \frac{M_x (y + c_0)}{S_{x_0} \rho} = - \frac{M_x (\rho - r)}{S_{x_0} \rho}$$

3. **Физика:** По закону Гука:

$$\sigma_z = E \varepsilon_z \Rightarrow \sigma_z = -E \frac{(y + c_0) \Delta d\phi}{\rho d\phi}$$

этого волокна:  $\varepsilon_z = \frac{\Delta ds}{ds} = \frac{\rho d\phi}{ds}$ .

Подставим в выражение для нормального усилия:

$$\sigma_z = -E \frac{\Delta d\phi}{\rho d\phi} \int_A \frac{(y + c_0)}{\rho} dA = 0.$$

Из равенства нулю интегрального выражения найдем радиус кривизны нейтрального слоя:

$$\int_A \frac{(y + c_0)}{\rho} dA = \int_A \frac{(\rho - r)}{\rho} dA = \int_A dA - r \int_A \frac{1}{\rho} dA = 0 \Rightarrow r = \frac{A}{\int_A \frac{1}{\rho} dA}.$$

Поскольку при чистом изгибе  $N = 0$ , то изгибающий момент относительно любой оси, параллельной центральной оси:

$$M_x = - \int_A \sigma_z y dA = - \int_A \sigma_z (y + c_0) dA = - \int_A \sigma_z (\rho - r) dA.$$

Подставим выражение для нормального напряжения:

$$M_x = \frac{\Delta d\phi}{d\phi} E \int_A \frac{(y + c_0)}{\rho} (\rho - r) dA = \frac{\Delta d\phi}{d\phi} E \left( \int_A (y + c_0) dA - r \int_A \frac{(y + c_0)}{\rho} dA \right).$$





[Об авторе](#)

[Список трудов](#)

Автор благодарит вас, уважаемые студенты, за то, что вы воспользовались этим материалом для подготовки к экзаменам по рассмотренным разделам сопротивления материалов. Если представленный материал поможет молодым преподавателям сопротивления материалов подготовиться к чтению лекций или послужит основой для разработки собственного курса лекций, то автор будет только рад. Успеха всем!

cards.mail.ru

