Ершов Э.Б.

Состояние и перспективы теории индексов цен и количеств

1. Базовые понятия и обозначения

Сравниваемые состояния:

$t = 0,\ \left(p_i^0, q_i^0\right) \equiv \left(p^0, q^0\right);$

$t = 1,\ \left(p_i^1, q_i^1\right) \equiv \left(p^1, q^1\right);$

p_i^t – цена, q_i^t – количество, v_i^t – стоимость i-го продукта, $i = \overline{1,n};$

$$v_i^t = p_i^t q_i^t, \quad v^t = \sum_i p_i^t q_i^t \equiv p^t q^t$$

Индексы: цен $IP\left(p^0, q^0; p^1, q^1\right) \equiv IP_{1/0}$

количеств $IQ\left(p^0, q^0; p^1, q^1\right) \equiv IQ_{1/0}$

стоимости $IV_{1/0} \equiv p^1 q^1 / p^0 q^0$

2. Индексные формулы как инструмент

Bodin (1568)

Man (1609): $p^1 q^1 / p^0 q^1$

Fleetwood (1707): $\overline{p}^t / \overline{p}^0$

Du To (1738): $\sum_i p_i^1 / \sum_i p_i^0$

Фарбер (1750): $\sum_i \left(p_i^1 - p_i^0\right) q_i$

Carli (1751): $\frac{1}{n} \sum_i p_i^1 / \sum_i p_i^0$

A.Smith (1776): $\overline{p}^1 / \overline{p}^0$

Вирт (1803): $p^1 q^0 / p^0 q^0$

Щеткин (1818): $p^1 q / p^0 q$

Young (1811): $\sum_i \left(p_i^1 / p_i^0 \right) w_i \Big/ \sum_j w_j$

Drobish (1871)

Laspeyres (1871): $p^1 q^0 / p^0 q^0$

Paashe (1874): $p^1 q^1 / p^0 q^1$

Edgeworth (1888): $\dfrac{p^1 \left(q^1 + q^0 \right)}{p^0 \left(q^1 + q^0 \right)}$

Walsh (1901): "формулы Ласпейреса и Пааше"

3. Три направления в теории индексов: статистическое, экономическое, траекторное

а) Статистическое направление и его ветви

- **вероятностная (*Edgeworth*, 1877-79, 1925);**
- **алгебраическая (*I.Fisher*, 1922);**
- **тестовая.**

Проверяемые тесты для индексов цен

T1. Идентичность: $IP(p^0,q^0;p^0,q^0)=1$ (*Vartia*)

T2. Пропорциональность: $IP(p^0,q^0;\alpha\cdot p^1,q^1)= \alpha\cdot IP(p^0,q^0;p^1,q^1)$ (*Walsh*, 1901)

T3. Инвариантность к изменению масштабов: $IP(\alpha\cdot p^0,\beta\cdot q^0;\alpha\cdot p^1,\beta\cdot q^1)= IP(p^0,q^0;p^1,q^1)$ (*Vartia*)

T4. Инвариантность к выбору единиц измерения (*Fisher*, 1911):

$$IP(\alpha_i\cdot p_i^0,\alpha_i^{-1}\cdot q_i^0;\alpha_i\cdot p_i^1,\alpha_i^{-1}\cdot q_i^1)= IP(p^0,q^0;p^1,q^1)$$

T5. Обратимость состояний: $IP_{1/0}=1/IP_{0/1}$

T6. Независимость от выбора нумерации состояний (*Fisher*, 1921)

T7. Монотонность: $IP(p^0,q^0;p^1,q^1) \leq IP(p^0,q^0;p,q^1)$, если $p_i^1 \leq p$ (*Fisher*, 1921)

T8. Свойство среднего: (*Eichhorn*, 1976)

T9. Циркулярность (транзитивность): $IP_{1/0} \cdot IP_{2/1} = IP_{2/0}$ (*Westergaard*, 1890)

T10. Обратимость факторов: $IP(p^0,q^0;p^1,q^1) \cdot IP(q^0,p^0;q^1,p^1) = IV$ (*Fisher*, 1921)

T11. Тест стоимости (*product test*): $IP \cdot IQ = IV$ (*Frish*, 1930; Старовский, 1929, 30)

и еще более 10 тестов

Тесты использовались для выяснения:

1) какие тесты выполняются для *IP*, *IQ*;
2) совместен ли заданный набор тестов;
3) является ли аксиома "Б" следствием аксиомы "А";
4) определяется ли индекс цен *IP* (или *IQ*, или *IP*, *IQ*) однозначно набором аксиом;
5) существует ли для заданного набора аксиом общая индексная формула для удовлетворяющих ему индексов.

Важные результаты:

- индексы цен Ласпейреса ($IPL=p^1q^0/p^0q^0$) и Пааше ($IPL=p^1q^1/p^0q^1$) не удовлетворяют аксиомам обратимости состояний (T5) и циркулярности (T9);
- индексы Фишера *IPF* и *IQF* не удовлетворяют аксиоме циркулярности (T9), но однозначно определяются различными наборами аксиом.

Несовместны аксиомы: среднего (T8), циркулярности (T9), обратимости факторов (T10) и стоимости (T11).

Аксиомы T8 и T9 совместны, но удовлетворяющий им индекс цен не зависит от количеств (q^0 и q^1).

Аксиомы-тесты лишь кажутся очевидными.

В рамках статистического направления не решается задача выбора или конструирования индексов *IP*, *IQ*, имеющих желательные свойства. Не удается "понять" причины, по которым наборы аксиом оказываются несовместными.

b) Экономическое направление

Основная идея: существование агрегаторной функции *(AF)* – функции полезности *(UF)* или производственной функции *(PF)*.

IP, IQ – точные *(exact)* по отношению к " AF " *f(x)*, $x \in R_n^+$, если для *t=0* и *1* при заданных p^t, q^t

$$\begin{cases} \max f(x) = f(x^t) \\ p^t x \le p^t x^t \end{cases}, \qquad \begin{cases} \min p^t x = c(u, p^t) \\ f(x) \ge u \end{cases},$$

$$IP\left(p^0, x^0; p^1, x^1\right) = c\left(1; p^1\right) / c\left(1; p^0\right)$$

$$IQ = f\left(x^1\right) / f\left(x^0\right)$$

Найдены точные индексы:

$IQ = \prod_i \left(q_i^1 / q_i^0 \right)^{s_i}$, для $s_i = p_i^0 q_i^0 / p^0 q^0$ - AF Кобба-Дугласа;

IPF для $f(q) = q'Aq$ (Конюс и Бюшгенс);

$Wald$, $Banerjee$ - для $f(q) = x'Ax + 2q'h$;

$Klein$, $Rubin$, $Balk$ - для $\ln f(q) = \sum_k \beta_k \left(x_k - \delta_k \right)$

$\sum_k \beta_k = 1,\ 0 < \beta_k < 1.$

Обосновать выбор "универсальной" агрегаторной функции не удается.

Экономическая теория не допускает существования универсальной функции полезности или производственной функции, используя которую можно было бы получать точные (*exact*) индексы цен и количеств, применяемые в статистической практике.

c) Траекторное направление (*F.Divisia*)

Постулат: недостаточно знать сравниваемые состояния; надо знать, как начальное состояние преобразуется в финальное.

Индексы Дивизиа *IPD* и *IQD* конструируются заданием пути $\pi(t;p^0,q^0;p^1,q^1)\equiv\{p(t),q(t)\}$, соединяющего состояния (p^0,q^0), (p^1,q^1):

$$\ln\left(\frac{p^1q^1}{p^0q^0}\right)\equiv\underbrace{\int_0^1\frac{\sum_i \dot{p}_i(t)q_i(t)}{\sum_i p_i(t)q_i(t)}dt}_{\ln IPD}+\underbrace{\int_0^1\frac{\sum_i p_i(t)\dot{q}_i(t)}{\sum_i p_i(t)q_i(t)}dt}_{\ln IQD}$$

Richter (1966): 8 аксиом определяют конструкцию индексов Дивизиа, но не семейство путей.

Hulton (1973): если *IPD* и *IQD* не зависят от путей, определяются только сравниваемыми состояниями, то существует функция *f(q)* такая, что

$$\frac{\partial f}{\partial q_i} \Big/ \frac{\partial f}{\partial q_j} = p_i / p_j \quad \left(i, j = \overline{1, n}\right).$$

Экономическая теория отрицает существование такой функции (ее существование противоречит природе цен).

Аппроксимация индексов Дивизиа (без задания путей)

Tornqvist (1936): $IPTo = \prod_i \left(p_i^1 / p_i^0 \right)^{s_i}$,

$$IQTo = \prod_i \left(q_i^1 / q_i^0 \right)^{s_i}, \; s_i = 0.5\left(v_i^0 / v^0 + v_i^1 / v^1 \right).$$

Montgomery (1937):

$$IPM = \left(v^1 / v^0 \right)^{m_p}, \quad IQM = \left(v^1 / v^0 \right)^{m_q},$$

$$m_p = \sum_i \frac{v_i^1 - v_i^0}{v^1 - v^0} \cdot \frac{\ln\left(p_i^1 / p_i^0 \right)}{\ln\left(v^1 / v^0 \right)}, \qquad m_q \equiv 1 - m_p.$$

Theil (1973): $IPTh = \prod_i \left(p_i^1 / p_i^0 \right)^{w_i}$,

$$IQTh = \prod_i \left(q_i^1 / q_i^0 \right)^{w_i}, \; w_i = u_i \Big/ \sum_j u_j ,$$

или $u_i = \sqrt[3]{v_i^0 v_i^1 \dfrac{v_i^0 + v_i^1}{2}}$ $\Bigg(\;\; . \quad u_i = \sqrt[3]{v_i^0 v_i^1 \left(v_i^0 + v_i^1 \right)} \Bigg)$

Индексы, предложенные Уолшем (Walsh, 1901), также можно рассматривать как аппроксимации индексов Дивизиа:

$$IPW = \prod_i \left(p_i^1 / p_i^0 \right)^{s_i}, \qquad s_i = \sqrt{v_i^0 v_i^1} \Big/ \sum_j \sqrt{v_j^0 v_j^1} .$$

Итоги классической теории

Исходные положения трех направлений не согласуются, взаимно критикуются.

Каждое направление натолкнулось на не решаемую в его рамках проблему:

- невозможность обоснованного выбора набора аксиом,
- невозможность обоснованного выбора агрегаторной функции *"AF"*,
- невозможность обоснованного выбора системы путей.

Примерно с начала 80-х гг. прошлого века в направлениях не были получены новые результаты фундаментального характера. Итоги подведены в энциклопедии-словаре *"The New Palgrave. A Dictionary of Economics" (Vol. 1, 1987)* в *2-х не связанных между собой статьях*:

Diewert W.E. Index Numbers;

Hulten C.D. Divisia Index.

На практике используются индексы Ласпейреса, Пааше, Фишера, Торнквиста и Монтгомери. Сферы и условия их применения теоретически не разграничены.

4. Данные, которыми оперирует практическая статистика

Моментная (мгновенная) цена $p_i(k)$ i-го товара в коротком, k-м периоде ("дне"), для которого цена принимается постоянной (статистически измеряема). Количество $q_i(k)$ трудно, даже вряд ли статистически измеряемо.

Средняя цена $P_i(s)$ i-го товара для s-го периода, состоящего из последовательности "коротких" периодов.

В работе (Ершов, 1965) обоснован метод расчета индексов цен $I_{p_i}(1;0) = P_i(1)/P_i(0)$ для i-ой группы товаров по выборочным данным о ценах товаров-представителей p_α^0, p_α^1 в виде: $\left(\alpha \in w(i), \quad \alpha = \overline{1,n(i)}\right)$

$$G_{1/0}(i) = \left[\prod_{\alpha \in w(i)} \left(p_\alpha^1 / p_\alpha^0\right)\right]^{1/n(i)}.$$

Получена система аксиом, определяющих $G_{1/0}(i)$, изучена система стоимостных весов u_α^0, u_α^1 $\left(\alpha \in w(i)\right)$ таких, что

$$G_{1/0}(i) = \sum_{\alpha \in w(i)} \left(p_\alpha^1 / p_\alpha^0 \right) \cdot u_\alpha^0,$$

$$G_{0/1}(i) = \sum_{\alpha \in w(i)} \left(p_\alpha^0 / p_\alpha^1 \right) \cdot u_\alpha^1.$$

5. Индексы Фишера, Торнквиста, Монтгомери как индексы Дивизиа

Найдены "законы" изменения цен и количеств, порождающие эти индексы как индексы Дивизиа, а не как их аппроксимации (Ершов, 1990, 2003-2006):

- для индексов Фишера *IPF, IQF;*
- для индексов Торнквиста *IPTo* и *IQTo≡IV/IPTo;*
- для индексов Монтгомери *IPM, IQM.*

6. Новый класс *h*-индексов Дивизиа

Для траекторий $p_i(t) = p_i^0 \left(p_i^1 / p_i^0 \right)^{h(t)}$,

$q_i(t) = \left[v_i^0 + t\left(v_i^1 - v_i^0 \right) \right] \Big/ p_i(t) \equiv v_i(t) \big/ p_i(t)$

с функцией $h(t)$, $h(0) = 0$, $h(1) = 1$, $dh/dt > 0$,

найдена формула для индекса цен:

$$\ln IPDh = A + B \cdot \int_0^1 v(\tau) \frac{dh(\tau)}{d\tau} d\tau,$$

где A и B - функции цен и количеств,

не зависящие от $h(t)$.

7. Траекторная аксиоматика и проблема выбора "совершенных" путей индексов

Для $F(x_1,\ldots,x_N)$ предложено факторным разложением приращения F называть сумму

$$F\left(x^1\right)-F\left(x^0\right)=\sum_i \int_0^1 \frac{\partial F\left(x(t)\right)}{\partial x_i}\cdot\frac{dx_i\left(t\right)}{dt}dt,$$

где $\left\{x_1\left(t\right),\ldots,x_N\left(t\right)\right\}$ - медиальный путь между точками x_0, x_1, удовлетворяющий аксиоме постоянства долей вкладов факторов x_i :

$$\Delta F_i\left(x^0, x^1\right) \equiv F\left(x^1\right) \div F\left(x^0\right)$$

при ($0 < t \le 1$)

$$\lambda_i\left(t\right) = \Delta F_i\left(x^0, x\left(t\right)\right) \Big/ \Delta F\left(x^0, x\left(t\right)\right) \equiv \lambda_i,$$

где $\Delta F\left(x^0, x\left(t\right)\right) = F\left(x\left(t\right)\right) - F\left(x^0\right)$,

$$\Delta F_i\left(x^0, x\left(t\right)\right) = \int_0^1 \frac{\partial F\left(x\left(t\right)\right)}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i\left(t\right)}{dt} dt.$$

Если *F(x)* – монотонная, гладкая функция, то медиальный путь существует!

Свойства медиального пути – инвариантность относительно:

I. выбора параметризации пути $\left(t=\varphi(u),\ u=\varphi^{-1}(t)\right)$;

II. монотонного преобразования $F(x)$:

$F(x)\rightarrow H\left(F(x)\right)\equiv\Psi(x)$, $H(y)$– гладкая, монотонная функция;

III. взаимно-однозначного преобразования в группах переменных.

Доказано, что для $F(x)$ и $\ln F(x)$ медиальный путь порождает индексы Монтгомери как индексы Дивизиа.

Из свойства III следует согласованность этих индексов при агрегировании.

Формулы индексов IPM, IQM не задаются, а найдены, исходя из принципа постоянства долей λ_{p_i} и λ_{q_i}.

Если переход изучаемой системы из состояния в состояние происходит так, что признается "нормальность" перехода (нет причин выделять несколько "фаз", признаваемых однородными), то такую нормальность, однородность перехода предлагается понимать как постоянство (вдоль пути) долей вкладов факторов.

8. Статистическая и динамическая концепции

Причиной дискуссии о возможности выбора и обоснования "совершенных" индексов можно считать неразграничение *статической концепции*, имеющей целью сравнение уровней цен в двух периодах, и *динамической концепции*, ставящей и решающей задачу пересчета потока стоимости для одного периода в средние цены другого периода.

Направления дальнейших исследований

1. Выделение типовых ситуаций использования индексов, определение соответствующих им индексных формул.

2. Для статической концепции рассмотреть и развить: основания методов расчета индексов цен для первичных групп товаров; методы расчета индексов по выборочным данным;

теорию построения транзитивных систем индексов для нескольких стран.

3. Для динамической концепции:

разработать процедуры проверки однородности периода между сравниваемыми состояниями;

изучить свойство индексов быть согласованными при агрегировании.

Ершов Э.Б.

Состояние и перспективы теории индексов цен и количеств (материалы к докладу)

1. Базовые понятия и обозначения

Сравниваемые состояния:

$$t=0,\ \left(p_i^0,q_i^0\right)\equiv\left(p^0,q^0\right); \qquad t=1,\ \left(p_i^1,q_i^1\right)\equiv\left(p^1,q^1\right); \qquad i=\overline{1,n}$$

p_i^t - цена, q_i^t - количество, v_i^t - стоимость i-го продукта,

$$v_i^t=p_i^t q_i^t, \qquad v^t=\sum_i p_i^t q_i^t \equiv p^t q^t$$

Индексы: цен $IP\left(p^0,q^0;p^1,q^1\right)\equiv IP_{1/0}$

количеств $IQ\left(p^0,q^0;p^1,q^1\right)\equiv IQ_{1/0}$

стоимости $IV\equiv p^1q^1/p^0q^0$

2. Индексные формулы как инструмент

(Г.В. Ковалевский. Индексный метод в экономике. М.: Финансы и статистика, 1989).

Bodin (1568)

Man (1609): p^1q^1 / p^0q^1

Fleetwood (1707): $\bar{p}^t / \bar{p}^0$

Du To (1738): $\sum_i p_i^1 \Big/ \sum_i p_i^0$

Фарбер (1750): $\sum_i \left(p_i^1 - p_i^0\right) q_i$

Carli (1751): $\frac{1}{n} \sum_i p_i^1 \Big/ \sum_i p_i^0$

A.Smith (1776): $\bar{p}^1 / \bar{p}^0$

Вирт (1803): p^1q^0 / p^0q^0

Щеткин (1818): p^1q / p^0q

Young (1811): $\sum_i \left(p_i^1 / p_i^0\right) w_i \Big/ \sum_j w_j$

Drobish (1871)

Laspeyres (1871): p^1q^0 / p^0q^0

Paashe (1874): p^1q^1 / p^0q^1

Edgeworth (1888):

Walsh (1901):

$$\frac{p^1\left(q^1 + q^0\right)}{p^0\left(q^1 + q^0\right)}$$

"формулы Ласпейреса и Пааше"

3. Три направления в теории индексов

а) Статистическое направление и его ветви

- *вероятностная* (*Adgeworth*, 1887-89, 1925; *Walsh*, 1901; *Keynes*, 1921);
- *алгебраическая* (*Bowley*, 1899; *Walsh*, 1901; *Pigou*, 1920; *I.Fisher*, 1911, 21): 134 индексные формулы, "идеальные" индексы Фишера *IPF*, *IQF;*
- *тестовая* (*Westergaard*, 1890; *Pierson*, 1896; *Walsh*, 1901; *Fisher*, 1921; *Frish*, 1930; *Gini*, 1931; *Swamy*, 1965; Ершов, 1965; *Eichhorn*, 1970, 76, 78; *Samuelson*, *Swamy*, 1974; *Funke, Voeller,* 1979; *Diewert*, 1983, 87; *Vartia*, 1985; Зоркальцев, 1991, 96).

Проверяемые тесты-аксиомы для индексов цен

T1. Идентичность: $IP(p^0,q^0;p^0,q^0)=1$ (*Vartia*, 1985)

T2. Пропорциональность: $IP(p^0,q^0;\alpha\cdot p^1,q^1)= \alpha\cdot IP(p^0,q^0;p^1,q^1)$ (*Walsh*, 1901)

T3. Инвариантность к изменению масштабов:

$IP(\alpha\cdot p^0,\beta\cdot q^0;\alpha\cdot p^1,\beta\cdot q^1)= IP(p^0,q^0;p^1,q^1)$ (*Vartia*, 1985)

T4. Инвариантность к выбору единиц измерения:

$IP(\alpha_i\cdot p_i^0,\alpha_i^{-1}\cdot q_i^0;\alpha_i\cdot p_i^1,\alpha_i^{-1}\cdot q_i^1)= IP(p^0,q^0;p^1,q^1)$ (*Fisher*, 1911)

T5. Обратимость состояний: $IP_{1/0}=1/IP_{0/1}$

T6. Независимость от выбора нумерации состояний (*Fisher*, 1921)

T7. Монотонность: $IP(p^0,q^0;p^1,q^1)\leq IP(p^0,q^0;p,q^1)$, если $p_i^1\leq p$ (*Fisher*, 1921)

T8. Свойство среднего: $\min\limits_i p_i^1 / p_i^0 \leq IP \leq \max\limits_i p_i^1 / p_i^0$ (*Eichhorn*, 1976)

T9. Циркулярность (транзитивность): $IP_{1/0}\cdot IP_{2/1}=IP_{2/0}$ (*Westergaard*, 1890)

T10. Обратимость факторов: $IP(p^0,q^0;p^1,q^1)\cdot IP(q^0,p^0;q^1,p^1)=IV$ (*Fisher*, 1921)

T11. Тест стоимости (*product test*): $IP\cdot IQ=IV$ (*Frish*, 1930; Старовский, 1929, 30)

и еще более 10 тестов

Тесты-аксиомы использовались для выяснения:

1) какие тесты выполняются для пары *IP*, *IQ*;
2) совместен ли заданный набор тестов;
3) является ли аксиома "Б" следствием аксиомы "А";
4) определяется ли индекс цен *IP* (или *IQ*, или *IP*, *IQ*) однозначно набором аксиом;
5) существует ли для заданного набора аксиом общая индексная формула для удовлетворяющих ему индексов.

Важные результаты:

- индексы цен Ласпейреса ($IPL=p^1q^0/p^0q^0$) и Пааше ($IPL=p^1q^1/p^0q^1$) не удовлетворяют аксиомам обратимости состояний (Т5) и циркулярности (Т9);
- индексы Фишера *IPF* и *IQF* не удовлетворяют аксиоме циркулярности (Т9), но однозначно определяются различными наборами аксиом.

Несовместны аксиомы: среднего (T8), циркулярности (T9), обратимости факторов (T10) и стоимости (T11).

Аксиомы T8 и T9 совместны, но удовлетворяющий им индекс цен не зависит от количеств (q^0 и q^1).

Аксиомы-тесты лишь кажутся очевидными. В рамках статистического направления не решается задача выбора или конструирования индексов *IP, IQ*, имеющих желательные свойства. Не удается "понять" причины, по которым наборы аксиом оказываются несовместными.

На практике используются индексы цен Ласпейреса *IPL*, объемов Пааше *IQP* и Фишера $IPF = \sqrt{IPL \cdot IPP}$, $IQF = \sqrt{IQL \cdot IQP}$ (имплицитные пары индексов, удовлетворяющие тесту стоимости).

b) Экономическое направление

Конюс (1924), Бюшгенс (1925), Конюс, Бюшгенс (1926), *Haberler* (1927), *Frish* (1930), *Staehl* (1935, 36), *Leontief* (1936), *Hicks* (1942), *Ulmer* (1946), *Malmquist* (1953), *Bergson,* 1961; *Moorsteen,* 1961; *F.Fisher*, *K.Shell* (1972), *Samuelson, Swamy* (1974), *Pollak* (1975), *Lau* (1979).

Основная идея: существование агрегаторной функции *(AF)* – функции полезности *(UF)* или производственной функции *(PF)*.

IP, *IQ* – точные *(exact)* по отношению к " *AF* " *f(x),* $x \in R_n^+$, если для *t=0* и *t=1* при заданных p^t, q^t

$$\begin{cases} \max f(x) = f(x^t) \\ p^t x \le p^t x^t \end{cases}, \qquad \begin{cases} \min p^t x = c(u, p^t) \\ f(x) \ge u \end{cases}, \qquad \begin{aligned} &IP\left(p^0, x^0; p^1, x^1\right) = c\left(1; p^1\right) / c\left(1; p^0\right) \\ &IQ = f\left(x^1\right) / f\left(x^0\right) \end{aligned}$$

Найдены точные индексы:

$IQ = \prod_i \left(q_i^1 / q_i^0\right)^{s_i}$, $s_i = p_i^0 q_i^0 / p^0 q^0$ для Кобба-Дугласа AF

IPF для $f(q) = q'Aq$ (Конюс и Бюшгенс);

$Wald$, $Benerjee$ - для $f(q) = x'Ax + 2q'h$;

$Klein$, $Rubin$, $Balk$ - для $\ln f(q) = \sum_k \beta_k \left(x_k - \delta_k\right)$, $\sum_k \beta_k = 1$, $0 < \beta_k < 1$

Попытка сближения статистического и экономического направлений (*Diewert*)

Ввел понятие суперлативных (*superlative*) индексов, т.е. точных индексов, для которых $f(x)$ и $c(u,p)$ являются приближениями (в общей точке $p^0=p^1$, $q^0=q^1$) дважды дифференцируемых, линейно-однородных функций $\tilde{f}$ и $\tilde{c}$ (совпадают производные 1-го и 2-го порядков).

Надежда на то, что можно использовать суперлативные (превосходные) индексы, являющиеся приближениями неизвестных точно индексов.

Обосновать выбор "универсальной" агрегаторной функции не удается.

Экономическая теория не допускает существования универсальной функции полезности или производственной функции, используя которую можно было бы получать точные (*exact*) индексы цен и количеств, применяемые в статистической практике.

Гипотеза "близости" сравниваемых состояний не имеет формулировки, приемлемой с позиции статистического направления (близость состояний используется при введении понятия "суперлативных" индексов).

c) Траекторное направление (*F.Divisia*, 1925-26)

Принимается постулат: недостаточно знать сравниваемые состояния (p^0,q^0) и (p^1,q^1); надо знать, как начальное состояние преобразуется в финальное.

Индексы Дивизиа *IPD* и *IQD* конструируются с помощью задания пути $\pi(t;p^0,q^0;p^1,q^1)\equiv\{p(t),q(t)\}$, соединяющего состояния (p^0,q^0), (p^1,q^1):

$$\ln\left(\frac{p^1q^1}{p^0q^0}\right)\equiv\underbrace{\int_0^1\frac{\sum_i \dot{p}_i(t)q_i(t)}{\sum_i p_i(t)q_i(t)}dt}_{\ln IPD}+\underbrace{\int_0^1\frac{\sum_i p_i(t)\dot{q}_i(t)}{\sum_i p_i(t)q_i(t)}dt}_{\ln IQD}$$

(t – параметр, не обязательно время; $0 \le t \le 1$; "состояние" – не всегда "момент", а, возможно, "период").

Индексы Дивизиа удовлетворяют аксиомам обратимости состояний, обратимости факторов, стоимости, но не удовлетворяют аксиомам однородности и циркулярности.

Критика: не ясно, как выбрать путь $\{p(t),q(t)\}$.

Richter (1966): 8 аксиом определяют конструкцию индексов Дивизиа, но не семейство путей.

Hulton (1973): если *IPD* и *IQD* не зависят от путей, определяются только сравниваемыми состояниями, то существует функция *f(q)* такая, что

$$\frac{\partial f}{\partial q_i} \Big/ \frac{\partial f}{\partial q_j} = p_i / p_j \quad \left(i, j = \overline{1,n}\right).$$

Экономическая теория отрицает существование такой функции (ее существование противоречит природе цен).

Vogt (1978): предложил "натуральные" индексы *IPV, IQV*, определяемые линейными траекториями

$$p_i(t)=p_i^0+t(p_i^1-p_i^0), q_i(t)=q_i^0+t(q_i^1-q_i^0),$$

для которых

$$p(t)q(t)=p^0q^0+t[p^0(q^1-q^0)+(p^1-p^0)q^0]+t^2(p^1-p^0)(q^1-q^0).$$

Попытки использовать экспоненциальные пути

$$p_i(t)=p_i^0(p_i^1/p_i^0)^t, \qquad q_i(t)=q_i^0(q_i^1/q_i^0)^t, \qquad i=\overline{1,n}$$

натолкнулись на то, что индексы *IPD* и *IQD* для таких путей не выражаются в виде элементарных функций от цен и количеств в сравниваемых состояниях.

Аппроксимация индексов Дивизиа (без задания путей)

Tornqvist (1936):

$$IPTo = \prod_i \left(p_i^1 / p_i^0\right)^{s_i}, \qquad IQTo = \prod_i \left(q_i^1 / q_i^0\right)^{s_i}, \qquad s_i = 0.5\left(\frac{v_i^0}{v^0} + \frac{v_i^1}{v^1}\right).$$

Montgomery (1937): $IPM = \left(v^1/v^0\right)^{m_p}$, $IQM = \left(v^1/v^0\right)^{m_q}$,

$$m_p = \sum_i \frac{v_i^1 - v_i^0}{v^1 - v^0} \cdot \frac{\ln\left(p_i^1/p_i^0\right)}{\ln\left(v^1/v^0\right)}, \qquad m_q = \sum_i \frac{v_i^1 - v_i^0}{v^1 - v^0} \cdot \frac{\ln\left(q_i^1/q_i^0\right)}{\ln\left(v^1/v^0\right)} \equiv 1 - m_p.$$

Индексы Монтгомери переоткрыли Хумал (1962), Ершов (1964-65), Sato (1974-76), Vartia (1974-75).

Theil (1973): $IPTh = \prod_i \left(p_i^1 / p_i^0\right)^{w_i}$, $IQTh = \prod_i \left(q_i^1 / q_i^0\right)^{w_i}$,

$$w_i = u_i \Big/ \sum_j u_j, \text{ или } \quad u_i = \sqrt[3]{v_i^0 v_i^1 \frac{v_i^0 + v_i^1}{2}}. \qquad \left(u_i = \sqrt[3]{v_i^0 v_i^1 \left(v_i^0 + v_i^1\right)} \right)$$

Индексы, предложенные Уолшем (Walsh, 1901), также можно рассматривать как аппроксимации индексов Дивизиа:

$$IPW = \prod_i \left(p_i^1 / p_i^0\right)^{s_i}, \qquad s_i = \sqrt{v_i^0 v_i^1} \Big/ \sum_j \sqrt{v_j^0 v_j^1}.$$

Свойства аппроксимаций

Индекс Торнквиста *IQTo* – точный для однородной, транслоговой агрегаторной функции *AF (Diewert)*.

Индексы Монтгомери – точные для *AF* Кобба-Дугласа:

- аппроксимируют (с точностью до второго порядка малости) любые суперлативные индексы (*Diewert*, 1978);
- согласованы при агрегировании (*Vartia*, 1975; *Diewert*, 1978); как и пара индексов (*IPL*,*IQL*).

Итоги классической теории

Исходные положения трех направлений не согласуются, взаимно критикуются.

Каждое направление натолкнулось на не решаемую в его рамках проблему:

- невозможность обоснованного выбора набора аксиом,
- невозможность обоснованного выбора *"AF"*,
- невозможность обоснованного выбора системы путей.

Примерно с начала 80-х гг. прошлого века в направлениях не были получены новые результаты фундаментального характера. Итоги подведены в энциклопедии-словаре *"The New Palgrave. A Dictionary of Economics" (Vol. 1, 1987)* в *2-х не связанных между собой статьях:*

- *Diewert W.E. Index Numbers;*
- *Hulten C.D. Divisia Index.*

На практике используются индексы Ласпейреса, Пааше, Фишера, Торнквиста и Монтгомери. Сферы и условия их применения теоретически не разграничены.

Направления развития теории индексов, включая идеи сближения ее направлений, не определены.

4. Данные, которыми оперирует практическая статистика

Моментная (мгновенная) цена $p_i(k)$ i-го товара в коротком, k-м периоде ("дне"), для которого цена принимается постоянной (статистически измеряема). Соответствующее количество $q_i(k)$ трудно, даже вряд ли статистически измеряемо.

Средняя цена $P_i(s)$ i-го товара для s-го периода ("месяц", "квартал", "год"), состоящего из последовательности "коротких" периодов $("k \in S")$

$$P_i(s) = \sum_{k\in\Omega}\sum_{\Omega} p_i(k,\Omega)\cdot q_i(k,\Omega) \Big/ \sum_{k\in\Omega}\sum_{\Omega} q_i(k,\Omega) \equiv v_i(s)/Q_i(s),$$

где Ω – множество изучаемых операций.
Величины $V_i(s)$ и $Q_i(s)$ измеряются (хотя бы выборочными методами).

Индексы цен

- для индивидуального i-го продукта

моментные: $I_{p_i}(k,l) = p_i(k)/p_i(l)$, для моментов "$k$" и "$l$";

средние: $IP_i(s,s-1) = P_i(s)/P_i(s-1)$, для периодов "$s$" и "$s-1$";

индексы-дефляторы: $IP_i(s-1,s) = P_i(s-1)/P_i(s)$;

- для наборов продуктов $\left(i=\overline{1,n}\right)$

моментные: $I_p(k,l)$, рассчитываются по $p_i(k)$, $q_i(k)$, $p_i(l)$, $q_i(l)$;

средние: $IP_{s/(s-1)} = P(s)/P(s-1)$, для сравниваемых периодов, рассчитываются по количествам $Q_i(s)$, $Q_i(s-1)$, стоимостям $K_i(s)$, $K_i(s-1)$ и средним ценам $P_i(s)$, $P_i(s-1)$.

Цели расчета *моментных и средних индексов* не совпадают. С помощью моментных индексов $I_p(k,l)$ сравниваются уровни цен в моменты *"k"* и *"l"*; моментные индексы количеств $I_q(k,l)$ и стоимости $v(k)/v(l)$ обычно не применяются. Для $I_p(k,l)$ "разумными" формулами считаются индекс Ласпейреса $(q=q^0)$, Пааше $(q=q^1)$, Эджворта $(q=q^0+q^1)$:

$$I_p(k,l)=p^k q \,/\, p^l q.$$

Если пересчет стоимостей v^0 и v^1 в другие цены выполняется с помощью "моментных" индексов цен-дефляторов

$$\underbrace{\left(p^0q^0\right)\frac{p^1q^0}{p^0q^0}}_{IPL_{1/0}}, \qquad \underbrace{\left(p^1q^1\right)\frac{p^0q^1}{p^1q^1}}_{IPL_{0/1}},$$

причем $IPL_{1/0}\cdot IPL_{0/1}\neq 1$,

то аксиомы обратимости состояний и циркулярности не выполняются.

Средние индексы цен $IP_{s/(s-1)}$ рассчитываются с целью получения индекса физического объема $IQ_{s/(s-1)}$ и индекса цен-дефлятора $IP_{(s-1)/s}=1/\,IP_{s/(s-1)}$, удовлетворяющих аксиоме стоимости.

Новое допущение: *индексы Дивизиа* в качестве исходных данных рассматривают цены и количества для периодов $s=1$ и $s=0$, а не для моментов.

В работе (Ершов, 1965) фактически обоснован метод расчета индексов цен $I_{p_i}(1/0) = P_i(1)/P_i(0)$ для i-ой группы товаров по выборочным данным о ценах товаров-представителей $p_\alpha^0,\ p_\alpha^1$ $\left(\alpha \in w(i),\ \alpha = \overline{1, n(i)}\right)$ в виде:

$$G_{1/0}(i) = \left[\prod_{\alpha \in w(i)} \left(p_\alpha^1 / p_\alpha^0\right)\right]^{1/n(i)}.$$

Получена система аксиом, определяющих $G_{1/0}(i)$, изучена система стоимостных весов $u_\alpha^0,\ u_\alpha^1$ $\left(\alpha \in w(i)\right)$ таких, что:

$$G_{1/0}(i) = \sum_{\alpha \in w(i)} \left(p_\alpha^1 / p_\alpha^0\right) \cdot u_\alpha^0 \equiv \sum_{\alpha \in w(i)} p_\alpha^1 \left(u_\alpha^0 / p_\alpha^0\right),$$

$$G_{0/1}(i) \equiv 1 / G_{1/0}(i) = \sum_{\alpha \in w(i)} \left(p_\alpha^0 / p_\alpha^1\right) \cdot u_\alpha^1 \equiv \sum_{\alpha \in w(i)} p_\alpha^0 \left(u_\alpha^1 / p_\alpha^1\right).$$

В предположении, что $u_\alpha^0 / u_\beta^0 = \Psi\left(\left(p_\alpha^1 / p_\alpha^0\right) / \left(p_\beta^1 / p_\beta^0\right)\right)$, где $\Psi = \Psi(\xi)$ - функция одного аргумента ξ, найдены весаи $\left\{u_\alpha^0\right\}$, $\left\{u_\alpha^1\right\}$ удовлетворяющие соотношениям:

$$\frac{q_\alpha^1}{q_\alpha^0} \equiv \left(\frac{u_\alpha^1}{p_\alpha^1}\right) \Big/ \left(\frac{u_\alpha^0}{p_\alpha^0}\right) = \left(\frac{u_\beta^1}{p_\beta^1}\right) \Big/ \left(\frac{u_\beta^0}{p_\beta^0}\right) \equiv \frac{q_\beta^1}{q_\beta^0}; \ \alpha, \beta \in w(i).$$

Если $c(\alpha)$ - множество номеров товаров из группы i, для которых $p_\lambda^1 / p_\lambda^0 = p_\alpha^1 / p_\alpha^0$ при $\lambda \in c(\alpha)$, то:

$$\frac{\sum\limits_{\lambda \in c(\alpha)} p_\lambda^t q_\lambda^0}{\sum\limits_{\lambda \in c(\beta)} p_\lambda^t q_\lambda^0} = \frac{\sum\limits_{\lambda \in c(\alpha)} p_\lambda^t q_\lambda^1}{\sum\limits_{\lambda \in c(\beta)} p_\lambda^t q_\lambda^1}, \quad t = 0;1.$$

Использование среднего геометрического индекса цен G оправдано, если приближенно выполняется предположение обидентичности в сравниваемых состояниях стоимостной структуры i-ой группы, соответствующей товарам представителей $\left(\alpha = \overline{1, n(i)}\right)$.

5. Индексы Фишера, Торнквиста, Монтгомери являются индексами Дивизиа

Найдены "законы" изменения "средних" для периодов цен и суммарных для периодов количеств, порождающие эти индексы как индексы Дивизиа, а не как их аппроксимации при близких сравниваемых состояниях (Ершов, 1990, 2003, 2005, 2006):

- для индексов Фишера *IPF, IQF*

$$p_i(t)=\sqrt{\left[v_i^0+t\left(v_i^1-v_i^0\right)\right]\left(p_i^0/q_i^0\right)\left[\left(p_i^1/p_i^0\right)\Big/\left(q_i^1/q_i^0\right)\right]^t},$$

$$q_i(t)=\sqrt{\left[v_i^0+t\left(v_i^1-v_i^0\right)\right]\left(q_i^0/p_i^0\right)\left[\left(q_i^1/q_i^0\right)\Big/\left(p_i^1/p_i^0\right)\right]^t},$$

$$v_i(t)=v_i^0+t\left(v_i^1-v_i^0\right);$$

- для индексов Торнквиста *IPTo* и *IQTo≡IV/IPTo*

$$p_i(t)=p_i^0\left(p_i^1/p_i^0\right)^{h(t)},\qquad h(t)=tv^1\Big/\sum_i v_i(t),$$

$$q_i(t)=\left[v_i^0+t\left(v_i^1-v_i^0\right)\right]\Big/p_i(t)\equiv v_i(t)\Big/p_i(t);$$

- для индексов Монтгомери *IPM, IQM*

$$p_i(t) = p_i^0 \left[\frac{v_i^0 + t\left(v_i^1 - v_i^0\right)}{v_i^0} \right]^{\alpha_i(p)}, \qquad \alpha_i(p) = \frac{\ln\left(p_i^1 / p_i^0\right)}{\ln\left(v_i^1 / v_i^0\right)},$$

$$q_i(t) = q_i^0 \left[\frac{v_i^0 + t\left(v_i^1 - v_i^0\right)}{v_i^0} \right]^{\alpha_i(q)}, \qquad \alpha_i(q) = \frac{\ln\left(q_i^1 / q_i^0\right)}{\ln\left(v_i^1 / v_i^0\right)},$$

$$\alpha_i(p) + \alpha_i(q) = 1, \qquad v_i(t) = v_i^0 + t\left(v_i^1 - v_i^0\right).$$

При определении средних для периодов индексов конструкция Дивизиа не противоречит исходным положениям статистического и экономического направлений. Предположение о близости сравниваемых состояний не является необходимым. Но требует решения проблема выбора семейства путей.

6. Новый класс *h*-индексов Дивизиа

Для семейства траекторий

$$p_i(t) = p_i^0 \left(p_i^1 / p_i^0 \right)^{h(t)}, \qquad q_i(t) = \left[v_i^0 + t\left(v_i^1 - v_i^0 \right) \right] \Big/ p_i(t) \equiv v_i(t) / p_i(t)$$

с функцией $h(t)$ такой, что $h(0) = 0$, $h(1) = 1$, $dh/dt > 0$ и $p_i(0) = p_i^0$,

$q_i(0) = q_i^0$, найдена $p_i(1) = p_i^1$, $q_i(1) = q_i^1$, $v(t) = \sum_i v_i(t) \quad \left(i = \overline{1,n} \right)$,

общая формуладля индекса цен:

$$\ln IPDh = A\left(p^0, q^0; p^1, q^1\right) + B\left(p^0, q^0; p^1, q^1\right) \cdot \underbrace{\int_0^1 v(\tau) \frac{dh(\tau)}{d\tau} d\tau}_{F(1;h(\tau))},$$

где A и B - функции, не зависящие от $h(t)$:

$$A = \sum_i \frac{v_i^1 - v_i^0}{v^1 - v^0} \cdot \ln\left(p_i^1 / p_i^0 \right), \qquad B = \sum_i \frac{v^1 v_i^0 - v^0 v_i^1}{v^1 - v^0} \cdot \ln\left(p_i^1 / p_i^0 \right),$$

и

$$\frac{1}{\min\left(v^0, v^1\right)} < F\left(1; h(\tau)\right) < \frac{1}{\max\left(v^0, v^1\right)}.$$

Константа $F\left(1;h(\tau)\right)$ найдена для функций $h(t)=t^m$, $t^{1/m}$, $\frac{1}{\alpha}\ln\left[1+t\left(e^{\alpha t}-1\right)\right]$, $\left(e^{\alpha t}-1\right)/\left(e^{\alpha}-1\right)$, $t/\left[\alpha+(1-\alpha)t\right]$.

При $F\left(1;h(\tau)\right)=0,5\left(\frac{1}{v^0}+\frac{1}{v^1}\right)$ получаем индекс цен Торнквиста $IPTo$.

Доказано, что любой индекс цен IP удовлетворяющий неравенству

$$\min\left\{\prod_i\left(\frac{p_i^1}{p_i^0}\right)^{v_i^0/v^0};\prod_i\left(\frac{p_i^1}{p_i^0}\right)^{v_i^1/v^1}\right\}\le IP\le\max\left\{\prod_i\left(\frac{p_i^1}{p_i^0}\right)^{v_i^0/v^0};\prod_i\left(\frac{p_i^1}{p_i^0}\right)^{v_i^1/v^1}\right\},$$

является обобщенным h-индексом, т.е.

$$IP=\prod_i\left(p_i^1/p_i^0\right)^{s_i},\qquad s_i=\frac{v_i^1\left(1-Fv^0\right)-v_i^0\left(1-Fv^1\right)}{v^1-v^0},$$

где F - число такое, что

$$\frac{1}{\min\left(v^0,v^1\right)}<F\left(1;h(\tau)\right)<\frac{1}{\max\left(v^0,v^1\right)}.$$

7. Траекторная аксиоматика и проблема выбора "совершенных" путей индексов

Для функции $F\left(x_1,\ldots,x_N\right)$ в (Ершов, 1990, 2003) предложено факторным разложением конечного приращения $F\left(x^1\right)-F\left(x^0\right)$ называть сумму

$$F\left(x^1\right)-F\left(x^0\right)\equiv\sum_i \Delta F_i\left(x^0,x^1\right)\equiv\sum_i\int_0^1\frac{\partial F\left(x(t)\right)}{\partial x_i}\cdot\frac{dx_i(t)}{dt}dt,$$

где $\left\{x_1(t),\ldots,x_N(t)\right\}$ - медиальный путь, соединяющий точки x_0, x_1 и удовлетворяющий аксиоме постоянства долей вкладов факторов x_i в $\Delta F_i\left(x^0,x^1\right)\equiv F\left(x^1\right)\div F\left(x^0\right)$ (при $0<t\le 1$)

$$\lambda_i(t)=\Delta F_i\left(x^0,x(t)\right)\big/\Delta F\left(x^0,x(t)\right),$$

где $\Delta F\left(x^0,x(t)\right)=F\left(x(t)\right)-F\left(x^0\right)$, $\quad \Delta F_i\left(x^0,x(t)\right)=\int_0^1\frac{\partial F\left(x(t)\right)}{\partial x_i}\cdot\frac{dx_i(t)}{dt}dt.$

Если $F(x)$ – монотонная, гладкая функция, то медиальный путь существует!

Его свойства: инвариантность относительно

I. выбора параметризации пути $\left(t=\varphi(u),\ u=\varphi^{-1}(t)\right)$;

II. монотонного преобразования функции $F(x)$:

$F(x)\to H\left(F(x)\right)\equiv\Psi(x),\ H(y)$ – гладкая, монотонная функция;

III. взаимно-однозначного преобразования в группах переменных:

$$F(x)=F\Big(\dots;\underbrace{x_1^k,\dots,x_{n(k)}^k}_{\substack{k\text{ я группа}\\ \text{переменных,}\\ i\in w(k)}};\dots\Big)=F\left(\dots;x^k\left(z^k\right);\dots\right)=H\left(z_1,\dots,z_N\right),$$

$$x_i^k=\varphi_i^k\left(z_1^k,\dots,z_{n(k)}^k\right),\qquad \sum_{i\in w(k)}\lambda_i^F\left(x^0;x^1\right)=\sum_{i\in w(k)}\lambda_i^H\left(z^0;z^1\right).$$

Доказано, что для $F(x)=\sum_i p_i q_i$ и $\ln F(x)=\ln\left(\sum_i p_i q_i\right)$ медиальный путь порождает индексы Монтгомери *IPM, IQM* как индексы Дивизиа. Из свойства III следует согласованность этих индексов при агрегировании. Другие индексы с таким свойством неизвестны.

Формулы индексов *IPM, IQM* не задаются, а найдены, исходя из принципа постоянства долей λ_{p_i} и λ_{q_i}.

Если переход изучаемой системы из состояния (p^0, q^0) в состояние (p^1, q^1) происходит так, что признается "нормальность" перехода (нет причин выделять несколько "фаз", признаваемых однородными), то такую нормальность, однородность перехода предлагается понимать как постоянство (вдоль пути) долей вкладов факторов.

Индексы IP и IQ (функции $4n$ аргументов, $n=2,3,\ldots$) согласованы при агрегировании, если для любой группировки продуктов

$$p^t = \left(\ldots; p_1^{t,s}, \ldots, p_{n(s)}^{t,s}; \ldots\right) \equiv p^t\left(p^{t,1}; \ldots; p^{t,s}; \ldots; p^{t,m}\right),$$

$$q^t = \left(\ldots; q_1^{t,s}, \ldots, q_{n(s)}^{t,s}; \ldots\right) \equiv q^t\left(q^{t,1}; \ldots; q^{t,s}; \ldots; q^{t,m}\right),$$

где s-я группа включает $n(s)$ продуктов, $s=\overline{1,m}$, m – число групп $\left(1 \le m \le n\right)$, совпадают значения индексов, рассчитанные двумя способами:

- по данным n продуктов (группы не выделяются)

$$IP_n \equiv IP_n\left(p^0, q^0; p^1, q^1\right), \qquad IQ_n \equiv IQ_n\left(p^0, q^0; p^1, q^1\right),$$

- по данным m групп продуктов с "групповыми" ценами $\tilde{p}^{t,s}$ и количествами $\tilde{Q}^{t,s}$, определяемыми индексными формулами:

$$IP_m \equiv IP_m\left(\tilde{p}^0, \tilde{Q}^0; \tilde{p}^1, \tilde{Q}^1\right), \qquad IQ_m \equiv IQ_m\left(\tilde{p}^0, \tilde{Q}^0; \tilde{p}^1, \tilde{Q}^1\right),$$

где

$$\tilde{p}^t = \left(\tilde{p}^{t,1}, \ldots, \tilde{p}^{t,m}\right), \ \tilde{Q}^t = \left(\tilde{Q}^{t,1}, \ldots, \tilde{Q}^{t,m}\right),$$

$$\tilde{p}^{0,s} = 1, \ \tilde{p}^{1,s} = IP_{n(s)}\left(p^{0,s}, q^{0,s}; p^{1,s}, q^{1,s}\right),$$

$$\tilde{Q}^{0,s} = v^{0,s} = p^{0,s}q^{0,s}, \ \tilde{Q}^{1,s} = v^{1,s} = p^{1,s}q^{1,s},$$

т.е. $IP_n = IP_m$, $IQ_n = IQ_m$.

Известна только одна пара индексов IP, IQ, согласованных при агрегировании – индексы Монтгомери.

"Тесты Фишера" трансформируются в аксиомы для семейства путей $\{p_i(t), q_i(t)\}$ Дивизиа:

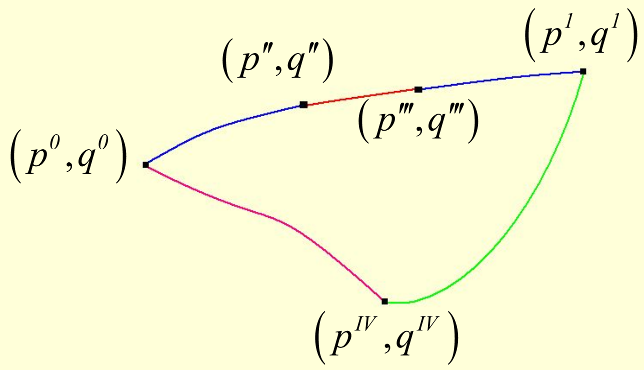
A1. единственность пути $\pi(t; p^0, q^0; p^1, q^1)$, идентичность $IPD(p^0, q^0; p^0, q^0) = 1$;

A2. обратимость граничных состояний:

$$\pi(t; p^0, q^0; p^1, q^1) = \pi(\tau; p^1, q^1; p^0, q^0);$$

A3. обратимость факторов: $\pi(t; p^0, q^0; p^1, q^1) = \pi(\tau; q^0, p^0; q^1, p^1)$;

A4. цикулярность семейства путей
$\pi(\tau; p'', q''; p''', q''') \subset \pi(t; p^0, q^0; p^1, q^1)$,
если $(p'', q'') \in \pi(t; p^0, q^0; p^1, q^1)$,
$(p''', q''') \in \pi(t; p^0, q^0; p^1, q^1)$.



A5. $v_i(t) \equiv p_i(t) q_i(t) = v_i^0 + t(v_i^1 - v_i^0)$, $t = (v(t) - v^0) / (v^1 - v^0)$.

И.Фишер: "Мне пришлось убедиться в неправильности многих выводов, к которым я пришел в "Покупательной силе денег". Так, например, вместе с другими авторами, я делал несомненную ошибку в отношении так называемого "теста круговой сходимости" (*circular test*), который я считал совершенно основательным и корректным и который ныне отбрасываю как совершенно неправильный… Основным из разработанных в моем первом исследовании тестов является тест (испытание) "обратимости по времени" (*time reversal test*). Этот тест, как и новый тест "обратимости по факторам" (*factor reversal test*), являются теми китами, на которых должна покоиться любая надежная индексная формула".

"Построение индексов", ЦСУ СССР, Москва, 1928, с.4.

Стало очевидно, почему для "средних" (для сравниваемых периодов) индексов и соответствующих им дефляторов следует отказаться от аксиомы циркулярности (транзитивности) индексов в пользу циркулярности путей!

Аксиоматическое определение индексов Монтгомери и их уникальные свойства (согласованность при агрегировании, "точность" для AF Кобба-Дугласа, аппроксимация любых суперлативных ("превосходных") индексов), формулируемые в терминологии трех направлений теории индексов (!), позволяют считать их "совершенными" индексами "среднего типа" (для периодов).

Для путей, порождающих индексы Фишера, Торнквиста и Монтгомери, найдены их дифференциальные уравнения, аналогичные уравнениям геодезических линий римановых пространств и пространств, наделенных линейной связностью (законом параллельного переноса векторов вдоль путей), и формулы для изменяющихся (вдоль пути) долей вкладов цен p_i и количеств q_i в прирост стоимости $v(t)-v^0$ и в $\ln v(t)-\ln v^0$.

8. Статическая и динамическая концепции теории индексов

Причиной, вызывавшей происходившую в течение более 70 лет дискуссию о возможности выбора и теоретического обоснования так называемых "совершенных", или "идеальных", индексов цен и количеств, можно и предлагается считать отождествление, неразграничение двух концепций таких индексов:

- *статической концепции*, имеющей целью сравнение уровней цен в двух периодах;
- *динамической концепции*, ставящей и решающей задачу пересчета потока стоимости для одного периода в средние цены другого периода.

Направления дальнейших исследований

1. Выделение типовых ситуаций использования индексов, их асимптотическое описание, определение соответствующих им индексных формул.
2. Для статической концепции рассмотреть и развить:
   - основания методов расчета индексов цен для первичных товаров;
   - расчета индексов по выборочным данным;
   - теорию построения транзитивных систем индексов для нескольких стран.
3. Для динамической концепции:
   - разработать процедуры проверки однородности периода между сравниваемыми состояниями;
   - изучить свойство индексов быть согласованными при агрегировании.