Замечательные константы в математике

Учебное пособие

Эпиграф:

Нужно только постараться

И запомнить всё, как есть:

Три, четырнадцать, пятнадцать,

Девяносто два и шесть.

περιμετρον

Содержание

Число π.
История вычисления

Отношение длины окружности к её диаметру – величина постоянная и не зависит от размеров окружности. Это число обозначают буквой **π** - первой буквой слова «периф ерия» (греч. окружность). Оно приближенно равно 3,141592653589…

В глубокой древности считали, что окружность в 3 раза длиннее диаметра. Эти сведения содержатся в книгописных табличках Древнего Междуречья.

Итак, первым приближением числа **π** было 3. Чуть позже его вычислили как 3,16.

В древней Греции геометры доказали, что длина окружности пропорциональна её диаметру $C = \pi R$,

а площадь круга равна $S = 1/2 * C * R = \pi * R * R$,

где R - радиус, C - длина окружности.

Эти доказательства приписывают Евдоксу Книдскому и Архимеду.

Свойства числа π

- В 1766 году немецкий математик Иоганн Ламберт строго доказал *иррациональность* числа π :

Число π не может быть представлено простыми дробями, как бы ни велики были числитель и знаменатель

- **Но** на этом история сила π не закончилась. В конце XIX века профессор Мюнхенского университета Карл Фердинанд Линдеман доказал, что число **π** - *трансцендентное, оно не является корнем никакого алгебраического уравнения с целыми коэффициентами.*
- Его доказательство поставило точку в истории древнейшей математической задачи о квадратуре круга (в задаче о квадратуре круга требовалось циркулем и линейкой построить квадрат, равновеликий данному кругу). «Загадочное упорство» этой задачи было связано именно с природой числа π

Формул чудных совершенство…

С числом π связано множество красивых формул:

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\dots \qquad (\text{Дж.Валлис})$$

$$\frac{2}{\pi}=\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\dots} \qquad (\text{Ф.Виет})$$

$$\frac{\pi^2}{6}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\dots \qquad (\text{Л.Эйлер})$$

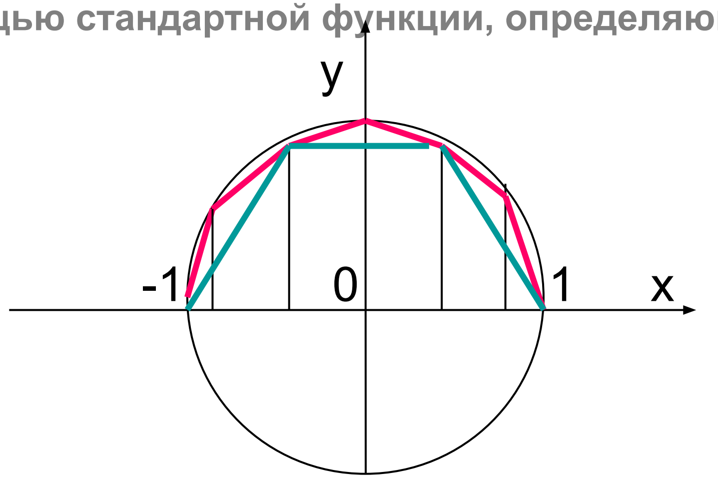
$$\frac{\pi^2}{8}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\dots \qquad (\text{Л.Эйлер})$$

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\dots \qquad (\text{Г.В.Лейбниц})$$

Приближенное вычисление числа π

Чтобы получить значение числа π , определим длину полуокружности радиуса 1 (она как раз и равна этому числу).

1. Возьмем отрезок [-1, 1]. Разобьем его на несколько коротких отрезков одинаковой длины и возьмем соответствующие точки на окружности.
2. Дугу между двумя последовательными точками заменим отрезком. Конечно, длина дуги не равна длине отрезка, но можно рассчитывать, что если части, на которые разбита дуга, достаточно маленькие, то ошибка не велика.
3. Вычислив длину каждого отрезка и сложив их все, мы приближенно определим длину дуги. В средние века математики вычисляли число π примерно также, хотя они в качестве приближения к окружности использовали правильный многоугольник с достаточным числом сторон.
4. Составим программу для вычисления π.
5. Чтобы проверить полученные результаты, в самом конце работы программы число π вычисляется с помощью стандартной функции, определяющей угол, тангенс которого равен 1.



Запуск программы

Текст программы

Приближенное вычисление числа π

Простейшее измерение

Начертим на плотном картоне окружность диаметра *d*=15 *см*, вырежем получившийся круг и обмотаем вокруг него тонкую нить. Измерив длину *l =46,5 см* одного полного оборота нити, разделим *l* на длину диаметра *d* окружности. Получившееся частное будет приближенным значением числа *π* , т. е.

$$\pi = l / d = 46{,}5 / 15 \text{ см} = 3{,}1.$$

Данный довольно грубый способ дает в обычных условиях приближенное значение числа *π* с точностью до 1.

Измерение числа π с помощью взвешивания

На листе картона начертим квадрат. Впишем в него круг. Вырежем квадрат. Определим массу картонного квадрата с помощью школьных весов. Вырежем из квадрата круг. Взвесим и его. Зная массы квадрата $m_{кв}$ *(=10 г)* и вписанного в него круга $m_{кр}$ *(=7,8 г)* воспользуемся формулами:

$$m = \rho V, \qquad V = Sh$$

где р и *h* –соответственно плотность и толщина картона, *S* – площадь фигуры

Рассмотрим равенство

$$m_{кв} = \rho S_{кв} h = \rho 4R^2 h, \qquad m_{кр} = \rho S_{кр} h = \rho \pi R^2 h$$

Отсюда

$$\frac{m_{кр}}{m_{кв}} = \frac{\rho \pi R^2 h}{\rho 4 R^2 h} = \frac{\pi}{4}, \ \ т.е. \ \pi = \frac{4m_{кр}}{m_{кв}} = \frac{4 \cdot 7{,}8}{10} = 3{,}12$$

Естественно, что в данном случае приближенное значение зависит от точности взвешивания. Если взвешиваемые картонные фигуры будут довольно большими, то возможно даже на обычных весах получить такие значения масс, которые обеспечат приближение числа *π* с точностью до 0,1.

Число е

Число е=2,718281828459…-одна из важнейших постоянных в математике.

По определению, оно равно пределу последовательности

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

при неограниченном возрастании n.

Обозначение е ввел Леонард Эйлер в 1736 году.

Он вычислил первые 23 знака этого числа в десятичной записи.

Первые знаки числа е легко запомнить: два, запятая, семь, год рождения Льва Толстого –два раза , сорок пять, девяносто, сорок пять

Свойства экспоненты

Число е играет особую роль в математическом анализе. Показательная функция с основанием е называется экспонентой. Это удивительная функция, производная которой равна ей самой(!). Логарифмическая функция с натуральным основанием е называется натуральным логарифмом. Число е – иррациональное и трансцендентное. Доказательство трансцендентности числа е впервые дал французский математик Шарль Эрмит в 1873 г.

Приближенное вычисление числа e

Число e разлагается в ряд Тейлора

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$$

Эту формулу можно использовать для вычисления значения числа e с заданной степенью точности

Запуск программы

Текст программы

Прекрасный союз

«Судьбы» двух констант – π и e – тесно переплелись. Эту пару, стоящую в одной формуле, можно встретить в разных областях математики.

Формула Сриниваса Рамануджаса

$$\textit{Если}\quad a = 1 + \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 3\cdot 5} + \frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7} + \ldots,$$

$$b = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{1 + \cfrac{3}{1 + \cfrac{4}{1 + \ldots}}}}}$$

то

$$a + b = \sqrt{\frac{\pi \cdot e}{2}}$$

Список литературы

- Энциклопедия для детей . Том «Математика», «Информатика», Аванта+, 1998 г.
- Виленкин Н.Я. И др. Алгебра и начала анализа.

  10,11 класс.
- Н. Угринович. Информатика и информационные технологии. 10-11 класс.
- Элективный курс «Вычислительная математика и программирование».

Авторы презентации:

Семилетова Рита , Шабунина Света, 11 «А»