Производна

Содержание

Понятие производной

Производная частных функций

Правила дифференцирования

Основные формулы дифференцирования

Производная элементарных функций

Физический смысл производной

Геометрический смысл

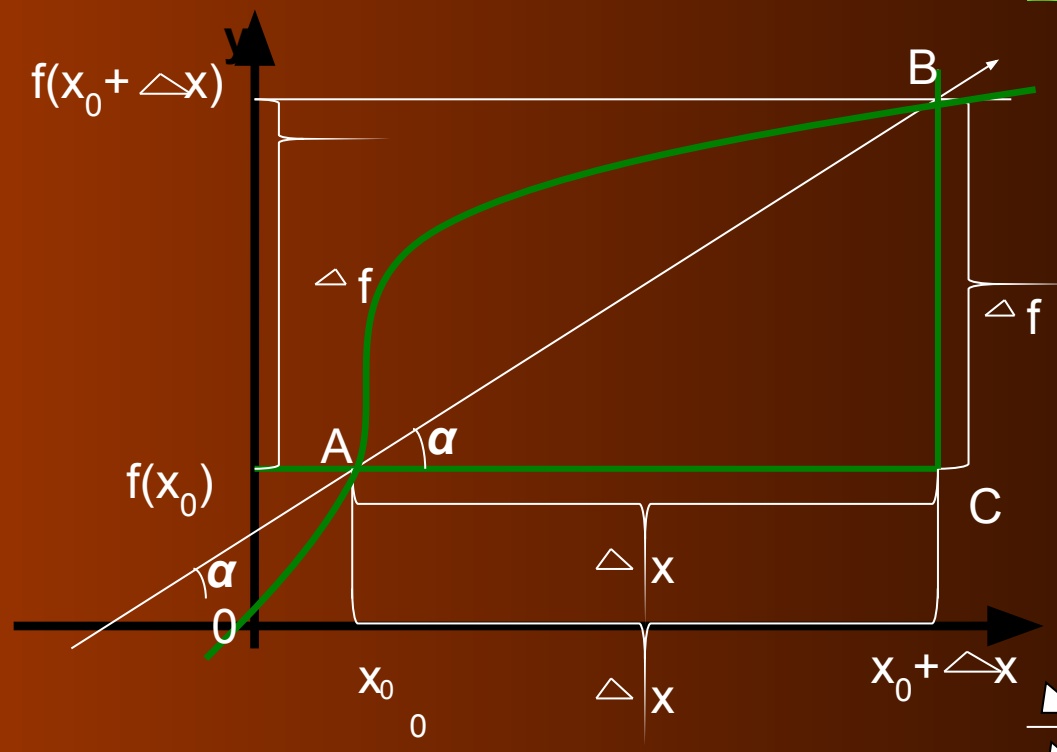
Непрерывность

Исследование функции с помощью производной

Практическая часть

Задачи на нахождение наибольшего и Наименьшего значения функции

Понятие производной



$\Delta f = (x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

Определение.

Производной функции f в точке x_0 называется число, к которому стремится разностное отношение

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

При Δx, стремящемся к нулю.

на главную

Производная частных функций

$(x)' = 1$, x - переменная

$(x^3)'=3x^2$

$(c)'=0$, c - const

$(x^2)'=2x$

Частные функции

$(1/x)' =-1/x^2$

$(\sqrt[3]{x})'=1/\sqrt[3]{x})$

$(\sqrt{x})'=1/2\sqrt{x}$

Правила дифференцирования

Основные правила дифференцирования

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$(u\,v)' = u'v + v'u$$

$$(C\,u)' = Cu'$$

$$(f(u(x)))' = f'(u(x)) \cdot u'(x)$$

Основные формулы дифференцирования

$(\cos x)' = -\sin x$

$(\ln x)' = 1/x$
$x>0$

$(\log a)' = 1/(x \ln a)$

$(e^x)' = e^x$

$(\sin x)' = \cos x$

$(a^x)' = a^x \ln a$

$(kx + b)' = k$

$(\ln (kx + b))' = k/ kx + b$

$(x^p)' = p x^{p-1}$

$(\log a)' = 1/x \ln a$

$(\lg)' = 1/x \cdot \lg e$

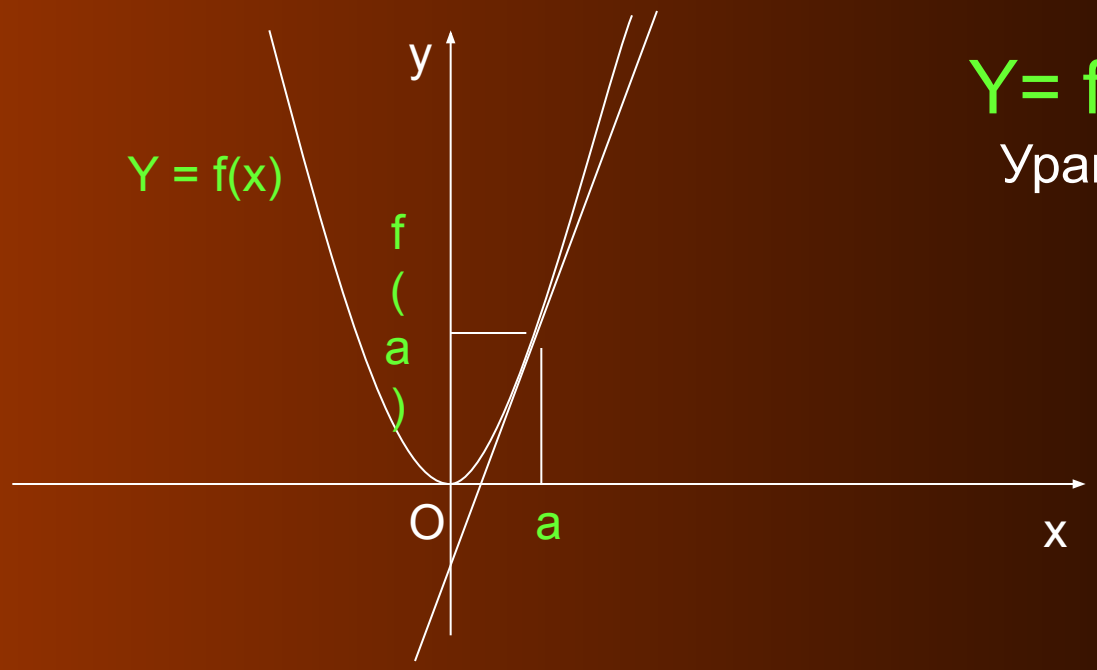
$(tgx)' = 1/\cos^2 x$

$(kx + b)' = k$

$(ctgx)' = - 1/\sin^2 x$

Геометрический смысл производной

Пусть задана функция y = f(x), которая имеет производную в точке x = a. Через точку (a; f(a)), проведена касательная к графику функции y = f(x). Угловой Коэффициент или тангенс угла наклона этой касательной будет равен производной функции y = f(x) в точке x = a, то есть $k = \operatorname{tg} \alpha = f'(a)$.



$$Y = f(a) + f'(a)(x-a)$$

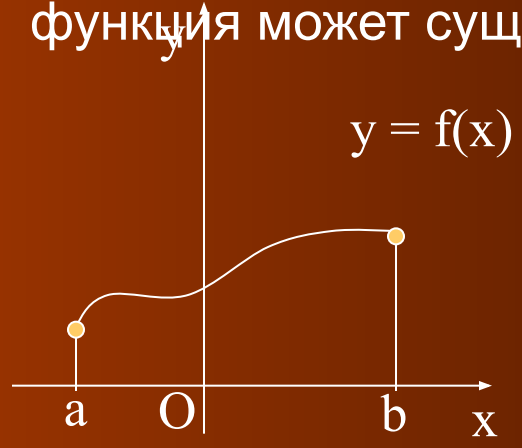
Уравнение касательной

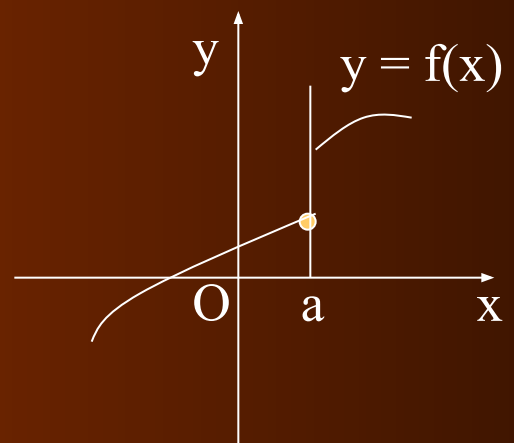
Непрерывность

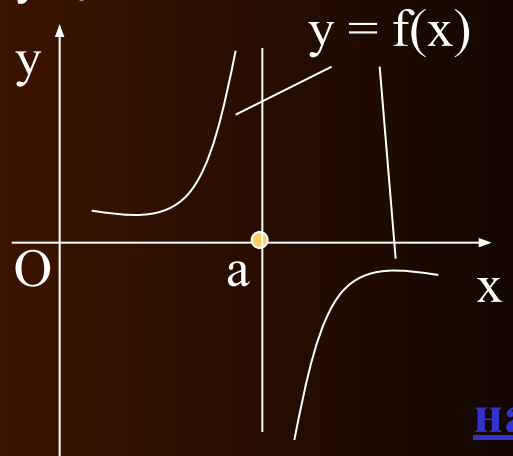
Функция y = f(x) называется непрерывной на промежутке, если она определена на этом промежутке и непрерывна в каждой точке промежутка.

Геометрическая непрерывность функции на промежутке означает, что график этой функции на данном промежутке изображен сплошной линией без скачков и разрывов. При этом малому изменению аргумента соответствует малое изменение функции.

Если при x = a функция y = f(x) существует в окрестности этой точки, но в самой точке x = a не выполняется условие непрерывности, говорят, что точка x = a есть точка разрыва функции. В самой точке x = a функция может существовать, а может и не существовать.







на главную

Физический смысл производной

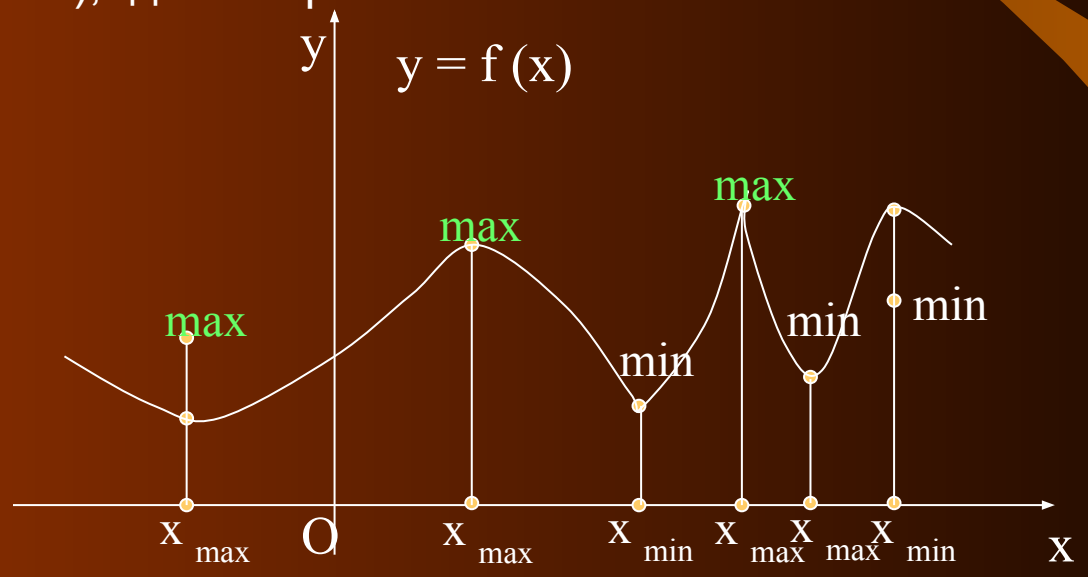
Пусть точка движется по некоторой прямой линии, так что ее положение меняется с течением времени. Рассмотрим эту прямую как числовую ось, тогда положение точки определяется её координатой, и с течением времени эта координата меняется, являясь тем самым функцией от времени. Уравнением движения называется запись y = f (t), показывающая, каким образом меняется координата с течением времени.

Скорость движения с уравнением y = f (t) в момент времени t равна значению производной f '(t) в этот момент времени. В этом состоит физический смысл производной.

Скорость движения при неравномерном движении изменяется с течением времени. Скорость изменения скорости называется ускорением,
То есть f ' '(t). В этом состоит физический смысл второй производной.

Определение 1. Пусть функция y = f(x) определена на отрезке[a; b]. Говорят, что функция имеет максимум в точке x_0 $\in$ [a; b], если существует окрестность точки x_0, целиком содержащаяся в [a; b] и такая, что для любого x, принадлежащего этой окрестности, выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.

Под окрестностью точки x_0 понимают интервал длины 2e с центром в точке x_0, т. е. $(x_0 - e ; x_0 + e)$, где e – произвольное положительное число.

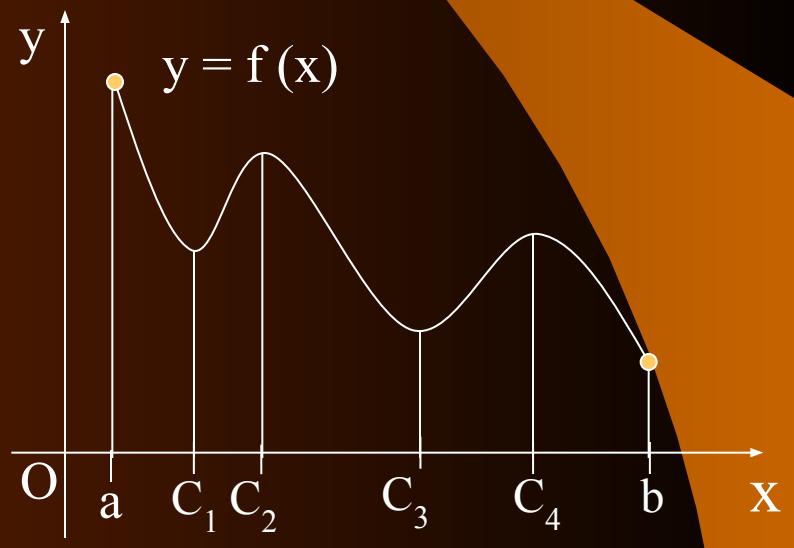


Определение 2. Пусть функция y = f (x) определена на отрезке [a; b]. Говорят, что функция имеет минимум в точке x_0 [a; b], если существует окрестность точки x_0, целиком содержащаяся в [a; b] и такая, что для любого x, принадлежащего этой окрестности, выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$.

Максимумы и минимумы функции не являются обязательно наибольшими и наименьшими значениями этой функции во всей области определения. **Например,** функция y = f (x) определена на отрезке [a; b], имеет четыре экстремума: два минимума ($x = C_1$ и $x = C_3$) и два максимума ($x = C_2$ и $x = C_4$). Вместе с тем, функция достигает наибольшего значения при x = a и наименьшего при x = b.

Признак максимума функции:
Если функция непрерывна в точке x_0 и ее производная, переходя через нее, меняет знак с плюса на минус, то x_0 есть точка максимума.

Признак минимума функции:
Если функция непрерывна в точке x_0 и ее производная, переходя через нее, меняет знак с минуса на плюс, то x_0 есть Точка минимума.



Исследование функции с помощью производной

Схема исследования:

1. Область определения.
2. Чётность.
3. Периодичность.
4. Критические точки.
5. Значение функции в критических точках.
6. Промежутки возрастания и убывания.
7. Экстремумы.
8. Наибольшее и наименьшее значение функции.
9. Дополнительные точки.

Пример: исследовать функцию $y = -x^3 + 3x - 2$ и построить её график

- Решение:

1. Область определения: $D_y = (-\infty; +\infty)$.
2. Функция не является ни чётной, ни нечётной.
3. Функция не является периодической.
4. Производная: $y' = 0$ при $x = 1$ и $x = -1$.

6. $У'(1) = 0$; $y(-1) = -4$.

7. $y' < 0$ при $x \in (-\infty; -1)$, следовательно, на промежутке $(-\infty; -1)$ функция убывает;
$y' > 0$ при $x \in (-1; 1)$ функция возрастает;

$y' < 0$ при $x \in (1; +\infty)$, следовательно, на промежутке $(1; +\infty)$ функция убывает.

Так как в точка $x = -1$ и $x = 1$ функция непрерывна, то эти точки присоединим к промежуткам убывания и промежутку возрастания.

$(-\infty; -1]$; $[1; +\infty)$ – промежутки убывания. $[-1;1]$ – промежуток возрастания.

8. Так как в точке x = -1 производная меняет знак с минуса на плюс, то x = -1 – точка минимума

Так как в точке x = 1 производная меняет знак с плюса на минус, то точка x = 1 – точка максимума

Минимум функции:

$y_{min} = -4$

Максимум функции:

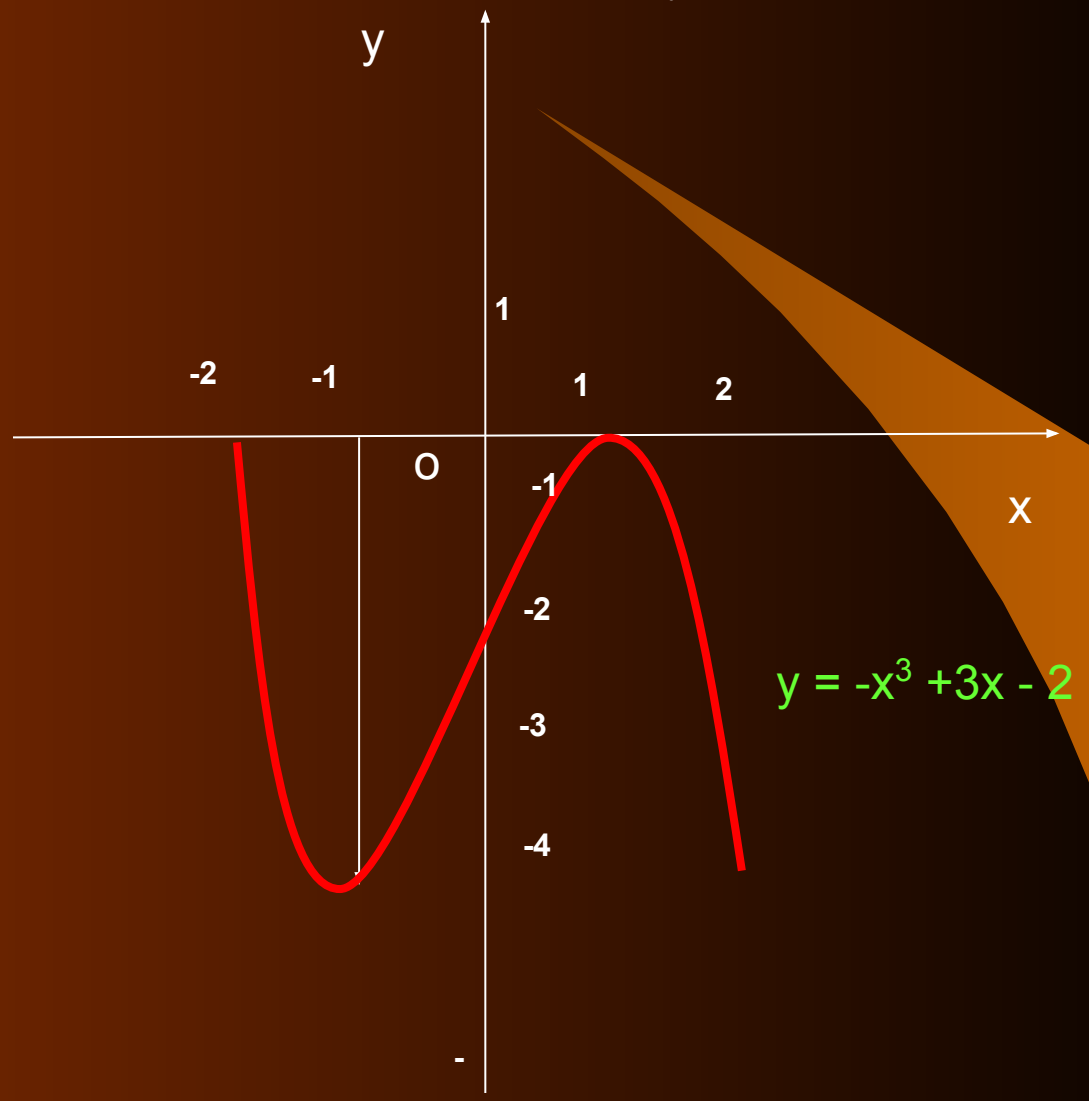
$y_{max} = 0.$

9. Дополнительные точки:

Если x = 0, то y = -2;

Если x = -2, то y = 0.

Построим график функции:



Задачи на нахождение наименьшего и наибольшего значения функции.

Пусть функция y = f (x), x є [a; b], непрерывна на отрезке [a; b], дифференцируема во всех точках этого отрезка и имеет конечное число критических точек на этом отрезке.

Чтобы найти наибольшее и наименьшее значение функции y = f (x), на отрезке [a; b], необходимо:

1. Найти критические точки;
2. Вычислить значение функции на концах отрезка и в критических точках;
3. Выбрать из найденных значений наибольшее и наименьшее.

если функция y = f (x) возрастает на отрезке [a; b], то f (a) – наименьшее значение, f (b) – наибольшее значение функции на этом отрезке.

если функция y = f (x) убывает на отрезке [a; b], то f (a) – наибольшее значение, f (b) - наименьшее значение функции на этом отрезке.

Практическая часть

Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:

Решение: данная функция непрерывна и дифференцируема в каждой точке отрезка

[-1; 2].

Найдём производную: $y' = x^2 - 4x + 3$.

Найдём критические точки: $y' = 0$ при $x = 1$ и $x = 3$, $3 \notin [-1; 2]$.

Найдём значение функции в точке x = 1 и на концах отрезка [-1; 2]:

$У(1) = 1^3/3 - 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1 = 1/3 - 2 + 3 + 1 = 2\frac{1}{3}$

$У(-1) = (-1)^3/3 - 2 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1) + 1 = -4\frac{1}{3}$

$У(2) = 2^3/3 - 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1 = 1\frac{2}{3}$

Ответ: $\max\limits_{[-1;2]} y(x) = 2\frac{1}{3}$; $\min\limits_{[-1;2]} y(x) = -4\frac{1}{3}$.

Составьте уравнение касательной к параболе $y = 2x^2 - 12x + 20$ в точке с абсциссой $x = 4$.

Решение:

уравнение касательной функции $y = f(x)$ в точке $x = a$: $y = f(a) + f'(a)(x - a)$

Найдём производную функции $f(X) = 2x^2 - 12x + 20$: $f'(x) = 4x - 12$.

Найдём значение производной и функции при $x = 4$:

$f'(4) = 4 \cdot 4 - 12 = 4$

$f(x) = 2 \cdot 4^2 - 12 \cdot 4 + 20 = 4$.

Составим уравнение касательной:

$У = 4 + 4(x - 4)$;

$У = 4 + 4x - 16$;

$У = 4x - 12$

$У = 4x - 12$ - уравнение касательной к параболе $y = 2x^2 - 12x + 20$ в точке с абсциссой $x = 4$.

Ответ: $У = 4x - 12$.

Найти промежутки возрастания и убывания, точки максимума и точки минимума функции, максимумы и минимумы функции:
$y = 2x^2 + 4x + 1$.

Решение: Найдём производную данной функции: $y' = 4x + 4$.

Так как $y' > 0$ на $(-1; +\infty)$, значит, на этом интервале функция возрастает.

Так как $y' < 0$ на $(-\infty; -1)$, значит, на этом интервале функция убывает.

Так как в точке $x = -1$ функция $y = 2x^2 + 4x + 1$ непрерывна, то эту точку присоединим к промежутку возрастания и промежутку убывания, то есть на промежутке $[-1; +\infty)$, функция возрастает, на промежутке $(-\infty; -1]$, функция убывает;

Так как в точке $x = -1$ производная меняет знак с минуса на плюс, то $x = -1$ является точкой минимума.

Найдём минимум функции:

$$y_{min} = 2*(-1)^2 + 4(-1) + 1 = -1.$$

Ответ: на $[-1; +\infty)$, функция возрастает, на промежутке $(-\infty; -1]$, функция убывает; $x_{min} = -1$; $y_{min} = -1$.

Найти координаты точки, в которой касательная к параболе $y = 3/2\ x^2 - 4x + 5$ образует угол 135° с осью Ox.

Решение:

Тангенс угла наклона равен производной функции в точке касания, то есть $tg\ 135^o =$

$f'(x)$, $tg\ 135^o = -1$

$f'(x) = (3/2\ x^2 - 4x + 5)' = 3x - 4$, $3x - 4 = -1$; $3x = 3$; $x = 1$.

Значит, 1 – абсцисса точки касания. Найдём ординату этой точки:

$f(1) = 3/2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 5 = 3/2 - 4 + 5 = 2,5$

(1; 2,5) – координаты точки касания.

Ответ: (1; 2,5).

Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 1/3\ t^3 - ½\ t^2 + 2$. Выведите формулу для вычисления скорости в любой момент времени и найдите скорость в момент $t = 5$ с. (Путь – в метрах).

Решение: Скорость движения с уравнением $x(t) = 1/3\ t^3 - ½\ t^2 + 2$ в момент времени t равна значению производной $x^{/}(t)$ в этот момент времени.

Поэтому:

$V = x^{/}(t) = t^2 - t$

Найдём скорость в момент времени $t = 5$;

$V(5) = 5^2 - 5 = 25 - 5 = 20$ (м/с).

Ответ: $V = 20$ (м/с).

Успехов вам на ЕГЭ!