Современные методы механики космического полета и их приложения

А. А. Суханов, ИКИ РАН
e-mail: sukhanov@mx.iki.rssi.ru

23 февраля 2000

Современные методы механики космического полета и их приложения

Цель

Создание эффективных методов и алгоритмов для проектирования межпланетных перелетов с большой и малой тягой с облетом многих небесных тел при упрощенных моделях движения

Возможные упрощения моделей

- Использование метода многих конических сечений
- Осреднение за один оборот
- Линеаризация уравнений движения

Современные методы механики космического полета и их приложения

Предлагаемые методы

- Универсальное решение задачи Ламберта
  - определение орбиты перелета между заданными положениями за заданное время
- Оптимизация двойных облетов планет
  - определение орбит перелета в тех случаях, когда задача Ламберта имеет множество решений или не имеет решений
- Расчет спиральной траектории полета с малой тягой в окрестности планеты с учетом сжатия
  - разгон и торможение малой тягой в сфере действия планеты
  - изменение высоты круговой орбиты спутника планеты малой тягой
- Приближенная аналитическая оптимизация межпланетных перелетов с малой тягой
  - нахождение оптимальных орбит перелета с малой тягой с облетом одного или нескольких небесных тел
- Вычисление матриц изохронных производных первого и второго порядка
  - применение в межпланетных перелетах с малой тягой
  - оптимизация моментов времени облетов небесных тел методом Ньютона
  - оптимизация моментов времени приложения импульсов алгоритмом оптимальной коррекции Жирнова-Лидова
  - определение и коррекция орбит, оценка точности и т.д.

Вычисление матриц изохронных производных первого и второго порядка

Изохронные производные первого порядка

$$\vec{x} = \vec{x}(t)$$
$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x})$$
- вектор состояния

$$\boxed{\Phi = \Phi(t, t_0) = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{x}_0}}$$
- матрица изохронных производных

$$\dot{\Phi} = F\Phi$$
- уравнение в вариациях

$$\Phi(t_0, t_0) = I, \quad F = \frac{\partial \vec{f}(\vec{x})}{\partial \vec{x}}$$

$$\boxed{\Phi^T J \Phi = J \;\Rightarrow\; \Phi^{-1} = -J\Phi^T J}$$
- симплектичность $\left(J = \begin{bmatrix} 0 & I_3 \\ -I_3 & 0 \end{bmatrix} \right)$

$$\vec{q} = \vec{q}(\vec{x}) = \mathrm{const}$$
- вектор независимых первых интегралов

$$A = A(t) = \frac{\partial \vec{q}}{\partial \vec{x}}, \quad A_0 = A(t_0) = \frac{\partial \vec{q}}{\partial \vec{x}_0}$$

$$\dot{A} = -AF$$
- сопряженное уравнение в вариациях

$$\boxed{\Phi = A^{-1}A_0}$$

D. R. Glandorf, Lagrange Multipliers and the State Transition Matrix for Coasting Arcs, *AIAA Journal*, 1969, Vol. 7, No. 2, 363-365.

Вычисление матриц изохронных производных первого и второго порядка

Задача двух тел

$\vec{c}, \vec{l}, h$ - интегралы площадей, Лапласа и энергии

$\vec{p}_1, \vec{p}_2 = \mathrm{const}$

$q_1 = \vec{p}_1 \cdot \vec{c},\ \ q_2 = \vec{p}_2 \cdot \vec{c},\ \ q_3 = \vec{p}_1 \cdot \vec{l},\ \ q_4 = \vec{p}_2 \cdot \vec{l},\ \ q_5 = h$

- независимые первые интегралы

$$A = \begin{bmatrix} \vec{a}_1^T & \vec{b}_1^T \\ \cdots & \cdots \\ \vec{a}_6^T & \vec{b}_6^T \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} &\vec{a}_i = \vec{v} \times \vec{p}_i, \qquad \vec{b}_i = \vec{p}_i \times \vec{r}, \\ &\vec{a}_{i+2} = \frac{\mu}{r^3}\vec{r} \times \left(\vec{p}_i \times \vec{r}\right) + \vec{v} \times \left(\vec{v} \times \vec{p}_i\right), \\ &\vec{b}_{i+2} = \vec{p}_i \times \vec{c} - \vec{r} \times \left(\vec{v} \times \vec{p}_i\right) \end{aligned}\right\} i = 1, 2$$

$$\vec{a}_5 = \frac{\mu}{r^3}\vec{r}, \qquad \vec{b}_5 = \vec{v}$$

Вычисление матриц изохронных производных первого и второго порядка

Шестая строка матрицы A находится методом исключения

Непараболические орбиты:

$$\boxed{\vec{a}_6 = -3\frac{\mu}{r^3}(t - t_0)\vec{r} + \vec{v}, \quad \vec{b}_6 = 2\vec{r} - 3(t - t_0)\vec{v}}$$

Параболические и близкие к ним орбиты:

$$\boxed{\vec{a}_6 = \left(\mu\dot{r} - 2\frac{\mu}{r^3}\omega\right)\vec{r} + \dot{\omega}\vec{v}, \quad \vec{b}_6 = \dot{\omega}\vec{r} - 2\omega\vec{v}}$$

$$\omega = c^2(t - t_0) - \mu\int_{t_0}^{t} r\,dt, \quad \dot{\omega} = c^2 - \mu r$$

$$\int_{t_0}^{t} r\,dt = \begin{cases} \dfrac{(r + p)r' - (r_0 + p)r_0' - (3\mu + ph)\tau}{2h} \\ r_0^2 s + r_0 r_0' s^2 + \dfrac{r_0'^2 + \mu r_0}{3}s^3 + \dfrac{\mu r_0'}{8}s^4 + \dfrac{\mu^2}{20}s^5 \\ r^2 s - rr's^2 + \dfrac{r'^2 + rr''}{3}s^3 - 2\mu s^4\left[r'' s c_5(x) - r' c_4(x)\right] - \\ \qquad - 8s^4\left[\left(hr'^2 + r''^2\right)s c_5(4x) - r'r'' c_4(4x)\right] \end{cases}$$

$\dot{s} = \dfrac{1}{r}, \quad s = \dfrac{\vec{r}\cdot\vec{v} - \vec{r}_0\cdot\vec{v}_0 - h(t - t_0)}{\mu}$ - универсальная переменная

$x = -hs^2, \quad r' = \dfrac{dr}{ds} = \vec{r}\cdot\vec{v}, \quad r'' = \dfrac{d^2r}{ds^2} = hr + \mu, \quad c_n = c_n(x)$ - функции Штумпфа

Вычисление матриц изохронных производных первого и второго порядка

Обращение матрицы A

$$\boxed{A^{-1} = J A^T K^{-1}}$$

$$K = A_0 J A_0^T = \mathrm{const}$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & -k_2 & 0 & c_1 m_1 \\ -k_1 & 0 & k_2 & 0 & 0 & c_1 m_2 \\ 0 & -k_2 & 0 & -hk_1 & 0 & c_2 n_1 \\ k_2 & 0 & hk_1 & 0 & 0 & c_2 n_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_1 h - c_2 l^2 \\ -c_1 m_1 & -c_1 m_2 & -c_2 n_1 & -c_2 n_2 & c_1 h + c_2 l^2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$k_1 = \vec{c} \cdot \vec{p}_1 \times \vec{p}_2, \quad k_2 = \vec{l} \cdot \vec{p}_1 \times \vec{p}_2,$$

$$m_i = \vec{c} \cdot \vec{p}_i, \quad n_i = c^2 \vec{l} \cdot \vec{p}_i \quad (i = 1, 2)$$

Непараболические орбиты: $c_1 = 1, \; c_2 = 0$

Параболические и близкие к ним орбиты: $c_1 = 0, \; c_2 = 1$

Вычисление матриц изохронных производных первого и второго порядка

Непараболические и некруговые орбиты:

$$\vec{p}_1 = \frac{\vec{l}}{l}, \quad \vec{p}_2 = \frac{\vec{l}\times\vec{c}}{l\,c}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{hc}\begin{bmatrix} -h\vec{b}_2 & h\vec{b}_1 & \vec{b}_4 & -\vec{b}_3 & -c\vec{b}_6 & c\vec{b}_5 \\ h\vec{a}_2 & -h\vec{a}_1 & -\vec{a}_4 & \vec{a}_3 & c\vec{a}_6 & -c\vec{a}_5 \end{bmatrix}$$

Непараболические орбиты:

$$\vec{p}_1 = \frac{\vec{r}_0}{c}, \quad \vec{p}_2 = \frac{\vec{v}_0}{c}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{h}\begin{bmatrix} h\vec{b}_2 & -h\vec{b}_1 & -\vec{b}_4 & \vec{b}_3 & -\vec{b}_6 & \vec{b}_5 \\ -h\vec{a}_2 & h\vec{a}_1 & \vec{a}_4 & -\vec{a}_3 & \vec{a}_6 & -\vec{a}_5 \end{bmatrix}$$

Параболические и близкие к ним орбиты:

$$\vec{p}_1 = \frac{\vec{c}}{c}, \quad \vec{p}_2 = \frac{\vec{l}\times\vec{c}}{l^2 c}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\vec{b}_4 & \vec{b}_3 & -\vec{b}_2 & \vec{b}_1 & -\vec{b}_6 & \vec{b}_5 \\ \vec{a}_4 & -\vec{a}_3 & \vec{a}_2 & -\vec{a}_1 & \vec{a}_6 & -\vec{a}_5 \end{bmatrix}$$

Вычисление матриц изохронных производных первого и второго порядка

Изохронные производные второго порядка

$$\Psi^k = \frac{\partial}{\partial \vec{x}_0}\left(\frac{\partial x_k}{\partial \vec{x}_0}\right)^T = \sum_{l=1}^{6} a_{kl}\left(D_0^l - \Phi^T D^l \Phi\right) \quad (k = 1,\ldots,6)$$

a_{kl} - компоненты матрицы A^{-1}

$$P_i = \begin{bmatrix} 0 & p_{iz} & -p_{iy} \\ -p_{iz} & 0 & p_{ix} \\ p_{iy} & -p_{ix} & 0 \end{bmatrix}, \quad Q_i = \dot{\rho} I + \vec{v}\vec{p}_i^T - 2\vec{p}_i\vec{v}^T, \quad R_i = \vec{r}\vec{p}_i^T + \vec{p}_i\vec{r}^T$$

$$\rho_i = \vec{r}^T\vec{p}_i, \quad \dot{\rho}_i = \vec{v}^T\vec{p}_i \qquad (i = 1, 2)$$

$$G = \frac{\mu}{r^3}\left(3\frac{\vec{r}\vec{r}^T}{r^2} - I_3\right)$$

$$D^i = \begin{bmatrix} 0 & P_i \\ P_i^T & 0 \end{bmatrix}, \quad D^{i+2} = \begin{bmatrix} -vR_i + \rho_i G & Q_i \\ Q_i^T & R_i - 2\rho_i I \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2)$$

$$D^5 = \begin{bmatrix} -G & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

Вычисление матриц изохронных производных первого и второго порядка

Непараболические орбиты:

$$D^6 = \begin{bmatrix} 3(t-t_0)G & I_3 \\ 2I_3 & -3(t-t_0)I_3 \end{bmatrix}$$

Параболические и близкие к ним орбиты:

$$\vec{\xi} = 3(t-t_0)\begin{bmatrix} \vec{v}\times\vec{c} \\ \vec{c}\times\vec{r} \end{bmatrix} - 6\int_{t_0}^{t} r^2 dt \begin{bmatrix} \dfrac{\mu}{r^3}\vec{r} \\ \vec{v} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vec{c}\times\vec{r} \\ 2r^2\vec{v} \end{bmatrix}$$

$$D^6 = \begin{bmatrix} 2\omega G + \mu\dot{r}I_3 & \dot{\omega}I_3 - \vec{r}\vec{l}^{\,T} \\ \dot{\omega}I_3 + \vec{r}\vec{l}^{\,T} & -2\omega I_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dfrac{\mu}{r^3}\vec{r} \\ \vec{v} \end{bmatrix}\vec{\xi}^{\,T}$$

Интеграл $\int_{t_0}^{t} r^2 dt$ вычислен для всех типов орбит