

Современные методы механики космического полета и их приложения

А. А. Суханов, ИКИ РАН
e-mail: sukhanov@mx.iki.rssi.ru

23 февраля 2000

Цель

Создание эффективных методов и алгоритмов для проектирования межпланетных перелетов с большой и малой тягой с облетом многих небесных тел при упрощенных моделях движения

Возможные упрощения моделей

- Использование метода многих конических сечений
- Осреднение за один оборот
- Линеаризация уравнений движения

Предлагаемые методы

- **Универсальное решение задачи Ламберта**
 - определение орбиты перелета между заданными положениями за заданное время
- **Оптимизация двойных облетов планет**
 - определение орбит перелета в тех случаях, когда задача Ламберта имеет множество решений или не имеет решений
- **Расчет спиральной траектории полета с малой тягой в окрестности планеты с учетом сжатия**
 - разгон и торможение малой тягой в сфере действия планеты
 - изменение высоты круговой орбиты спутника планеты малой тягой
- **Приближенная аналитическая оптимизация межпланетных перелетов с малой тягой**
 - нахождение оптимальных орбит перелета с малой тягой с облетом одного или нескольких небесных тел
- **Вычисление матриц изохронных производных первого и второго порядка**
 - применение в межпланетных перелетах с малой тягой
 - оптимизация моментов времени облетов небесных тел методом Ньютона
 - оптимизация моментов времени приложения импульсов алгоритмом оптимальной коррекции Жирнова-Лидова
 - определение и коррекция орбит, оценка точности и т.д.

Вычисление матриц изохронных производных первого и второго порядка

Изохронные производные первого порядка

$$\bar{x} = \bar{x}(t)$$

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x})$$

- вектор состояния

$$\Phi = \Phi(t, t_0) = \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{x}_0}$$

- матрица изохронных производных

$$\dot{\Phi} = F\Phi$$

- уравнение в вариациях

$$\Phi(t_0, t_0) = I, \quad F = \frac{\partial \bar{f}(\bar{x})}{\partial \bar{x}}$$

$$\Phi^T J \Phi = J \Rightarrow \Phi^{-1} = -J \Phi^T J$$

- симплектичность $(J = \begin{bmatrix} 0 & I_3 \\ -I_3 & 0 \end{bmatrix})$

$$\bar{q} = \bar{q}(\bar{x}) = \text{const}$$

- вектор независимых первых интегралов

$$A = A(t) = \frac{\partial \bar{q}}{\partial \bar{x}}, \quad A_0 = A(t_0) = \frac{\partial \bar{q}}{\partial \bar{x}_0}$$

$$\dot{A} = -AF$$

- сопряженное уравнение в вариациях

$$\Phi = A^{-1} A_0$$

D. R. Glandorf, Lagrange Multipliers and the State Transition Matrix for Coasting Arcs, *AIAA Journal*, 1969, Vol. 7, No. 2, 363-365.

Вычисление матриц изохронных производных первого и второго порядка

Задача двух тел

\vec{c}, \vec{l}, h - интегралы площадей, Лапласа и энергии

$$\vec{p}_1, \vec{p}_2 = \text{const}$$

$$q_1 = \vec{p}_1 \cdot \vec{c}, \quad q_2 = \vec{p}_2 \cdot \vec{c}, \quad q_3 = \vec{p}_1 \cdot \vec{l}, \quad q_4 = \vec{p}_2 \cdot \vec{l}, \quad q_5 = h$$

- независимые первые интегралы

$$A = \begin{bmatrix} \vec{a}_1^T & \vec{b}_1^T \\ \dots & \dots \\ \vec{a}_6^T & \vec{b}_6^T \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{a}_i &= \vec{v} \times \vec{p}_i, & \vec{b}_i &= \vec{p}_i \times \vec{r}, \\ \vec{a}_{i+2} &= \frac{\mu}{r^3} \vec{r} \times (\vec{p}_i \times \vec{r}) + \vec{v} \times (\vec{v} \times \vec{p}_i), \\ \vec{b}_{i+2} &= \vec{p}_i \times \vec{c} - \vec{r} \times (\vec{v} \times \vec{p}_i) \end{aligned} \right\} i = 1, 2$$

$$\vec{a}_5 = \frac{\mu}{r^3} \vec{r}, \quad \vec{b}_5 = \vec{v}$$

Вычисление матриц изохронных производных первого и второго порядка

Шестая строка матрицы A находится методом исключения

Непараболические орбиты:

$$\vec{a}_6 = -3 \frac{\mu}{r^3} (t - t_0) \vec{r} + \vec{v}, \quad \vec{b}_6 = 2\vec{r} - 3(t - t_0)\vec{v}$$

Параболические и близкие к ним орбиты:

$$\vec{a}_6 = \left(\mu \dot{r} - 2 \frac{\mu}{r^3} \omega \right) \vec{r} + \dot{\omega} \vec{v}, \quad \vec{b}_6 = \dot{\omega} \vec{r} - 2\omega \vec{v}$$

$$\omega = c^2(t - t_0) - \mu \int_{t_0}^t r dt, \quad \dot{\omega} = c^2 - \mu r$$

$$\int_{t_0}^t r dt = \begin{cases} \frac{(r+p)r' - (r_0+p)r'_0 - (3\mu+ph)\tau}{2h} \\ r_0^2 s + r_0 r'_0 s^2 + \frac{r_0'^2 + \mu r_0}{3} s^3 + \frac{\mu r'_0}{8} s^4 + \frac{\mu^2}{20} s^5 \\ r^2 s - r r' s^2 + \frac{r'^2 + r r''}{3} s^3 - 2\mu s^4 [r'' s c_5(x) - r' c_4(x)] - \\ - 8s^4 [(hr'^2 + r''^2) s c_5(4x) - r' r'' c_4(4x)] \end{cases}$$

$$\dot{s} = \frac{1}{r}, \quad s = \frac{\vec{r} \cdot \vec{v} - \vec{r}_0 \cdot \vec{v}_0 - h(t - t_0)}{\mu} \quad - \text{универсальная переменная}$$

$$x = -hs^2, \quad r' = \frac{dr}{ds} = \vec{r} \cdot \vec{v}, \quad r'' = \frac{d^2 r}{ds^2} = hr + \mu, \quad c_n = c_n(x) \quad - \text{функции Штурмфа}$$

Вычисление матриц изохронных производных первого и второго порядка

Обращение матрицы A

$$A^{-1} = JA^TK^{-1}$$

$$K = A_0JA_0^T = \text{const}$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & -k_2 & 0 & c_1m_1 \\ -k_1 & 0 & k_2 & 0 & 0 & c_1m_2 \\ 0 & -k_2 & 0 & -hk_1 & 0 & c_2n_1 \\ k_2 & 0 & hk_1 & 0 & 0 & c_2n_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_1h - c_2l^2 \\ -c_1m_1 & -c_1m_2 & -c_2n_1 & -c_2n_2 & c_1h + c_2l^2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$k_1 = \vec{c} \cdot \vec{p}_1 \times \vec{p}_2, \quad k_2 = \vec{l} \cdot \vec{p}_1 \times \vec{p}_2,$$

$$m_i = \vec{c} \cdot \vec{p}_i, \quad n_i = c^2 \vec{l} \cdot \vec{p}_i \quad (i = 1, 2)$$

Непараболические орбиты: $c_1 = 1, c_2 = 0$

Параболические и близкие к ним орбиты: $c_1 = 0, c_2 = 1$

Вычисление матриц изохронных производных первого и второго порядка

Непараболические и некруговые орбиты:

$$\vec{p}_1 = \frac{\vec{l}}{l}, \quad \vec{p}_2 = \frac{\vec{l} \times \vec{c}}{l c}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{hc} \begin{bmatrix} -h\vec{b}_2 & h\vec{b}_1 & \vec{b}_4 & -\vec{b}_3 & -c\vec{b}_6 & c\vec{b}_5 \\ h\vec{a}_2 & -h\vec{a}_1 & -\vec{a}_4 & \vec{a}_3 & c\vec{a}_6 & -c\vec{a}_5 \end{bmatrix}$$

Непараболические орбиты:

$$\vec{p}_1 = \frac{\vec{r}_0}{c}, \quad \vec{p}_2 = \frac{\vec{v}_0}{c}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} h\vec{b}_2 & -h\vec{b}_1 & -\vec{b}_4 & \vec{b}_3 & -\vec{b}_6 & \vec{b}_5 \\ -h\vec{a}_2 & h\vec{a}_1 & \vec{a}_4 & -\vec{a}_3 & \vec{a}_6 & -\vec{a}_5 \end{bmatrix}$$

Параболические и близкие к ним орбиты:

$$\vec{p}_1 = \frac{\vec{c}}{c}, \quad \vec{p}_2 = \frac{\vec{l} \times \vec{c}}{l^2 c}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\vec{b}_4 & \vec{b}_3 & -\vec{b}_2 & \vec{b}_1 & -\vec{b}_6 & \vec{b}_5 \\ \vec{a}_4 & -\vec{a}_3 & \vec{a}_2 & -\vec{a}_1 & \vec{a}_6 & -\vec{a}_5 \end{bmatrix}$$

Вычисление матриц изохронных производных первого и второго порядка

Изохронные производные второго порядка

$$\Psi^k = \frac{\partial}{\partial \vec{x}_0} \left(\frac{\partial x_k}{\partial \vec{x}_0} \right)^T = \sum_{l=1}^6 a_{kl} (D_0^l - \Phi^T D^l \Phi) \quad (k = 1, \dots, 6)$$

a_{kl} - компоненты матрицы A^{-1}

$$P_i = \begin{bmatrix} 0 & p_{iz} & -p_{iy} \\ -p_{iz} & 0 & p_{ix} \\ p_{iy} & -p_{ix} & 0 \end{bmatrix}, \quad Q_i = \dot{\rho} I + \vec{v} \vec{p}_i^T - 2\vec{p}_i \vec{v}^T, \quad R_i = \vec{r} \vec{p}_i^T + \vec{p}_i \vec{r}^T$$

$$\rho_i = \vec{r}^T \vec{p}_i, \quad \dot{\rho}_i = \vec{v}^T \vec{p}_i \quad (i = 1, 2)$$

$$G = \frac{\mu}{r^3} \left(3 \frac{\vec{r} \vec{r}^T}{r^2} - I_3 \right)$$

$$D^i = \begin{bmatrix} 0 & P_i \\ P_i^T & 0 \end{bmatrix}, \quad D^{i+2} = \begin{bmatrix} -v R_i + \rho_i G & Q_i \\ Q_i^T & R_i - 2\rho_i I \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2)$$

$$D^5 = \begin{bmatrix} -G & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

Вычисление матриц изохронных производных первого и второго порядка

Непараболические орбиты:

$$D^6 = \begin{bmatrix} 3(t - t_0)G & I_3 \\ 2I_3 & -3(t - t_0)I_3 \end{bmatrix}$$

Параболические и близкие к ним орбиты:

$$\vec{\xi} = 3(t - t_0) \begin{bmatrix} \vec{v} \times \vec{c} \\ \vec{c} \times \vec{r} \end{bmatrix} - 6 \int_{t_0}^t r^2 dt \begin{bmatrix} \frac{\mu}{r^3} \vec{r} \\ \vec{v} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vec{c} \times \vec{r} \\ 2r^2 \vec{v} \end{bmatrix}$$

$$D^6 = \begin{bmatrix} 2\omega G + \mu \dot{r} I_3 & \dot{\omega} I_3 - \vec{r} \vec{l}^T \\ \dot{\omega} I_3 + \vec{r} \vec{l}^T & -2\omega I_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\mu}{r^3} \vec{r} \\ \vec{v} \end{bmatrix} \vec{\xi}^T$$

Интеграл $\int_{t_0}^t r^2 dt$ вычислен для всех типов орбит