**Шалаев Ю.Н. каф. Информатики и проектирования систем.
Институт кибернетики**

Теория случайных функций

Случайной функцией называется случайная величина, зависящая от параметра t, т.е. $X(t,\omega)$.

Если параметр t – время, то случайную функцию называют случайным процессом. Для дискретного случая – случайной последовательностью.

Если зафиксировать элементарное событие $\omega=\omega_0$, то $X(t, \omega_0)$ будет неслучайной функцией аргумента t. Конкретный вид случайной функции при фиксированном ω в данном опыте называется реализацией случайной функции $X(\omega_I,t)$. Если зафиксировать параметр случайной функции при $t=t_k$, то она будет зависеть только от элементарного события и, следовательно, станет случайной величиной $X(t_к, \omega)$. При дальнейшем изложении аргумент ω для краткости опускается.

Законы распределения случайных функций

- Случайную функцию рассматривают как многомерную случайную величину. То есть X(t) можно представить как систему случайных величин:

  $\{X(t1), X(t2), \ldots, X(tn)\}, t1 < t2 < \ldots, tn = t,$

где t1 ,t2 , tn – любые значения аргумента t.

Для случайной функции рассматриваются многомерные законы распределения:

одномерная функция распределения

$F(x_1; t_1)=P\{X(t_1)<x_1\}.$

Аналогично, для функции распределения второго порядка

$F_2(x_1, x_2; t_1, t_2) = P\{X(t_1) < x_1, X(t_2) < x_2\}$
и для функции n порядка
$F_n(x_1, x_2, \ldots x_n; t_1, t_2 \ldots t_n) = P\{X(t_1) < x_1, X(t_2) < x_2, \ldots, X(t_n) < x_n\}$
где $t_1, t_2 \ldots t_n$ – произвольная последовательность значений аргумента t, взятая из области его значений.
$x_1, x_2, \ldots x_n$ – последовательность неслучайных вещественных переменных величин.

Для непрерывных случайных функций X(t) плотности распределения находятся как

$f_1(x_1; t_1)=\partial F_1(x_1; t_1)/\partial x_1$,

$f_2(x_1, x_2; t_1, t_2)=\partial\partial F_2(x_1, x_2;t_1,t_2)/\partial x_1\partial x_2$,

$f_n(x_1, x_2,\ldots x_n; t_1, t_2\ldots t_n)=\partial^n F_n(x_1, x_2,\ldots x_n; t_1, t_2\ldots t_n)/\partial x_{1\ldots}\partial x_n$

Их называют плотностями распределения первого, второго и n –го порядка.

- Для плотностей распределения случайной функции X(t) имеет место интегральные соотношения:

$$f_1(x_1;t_1)=\int_{-\infty}^{\infty} f_2(x_1,x_2;t_1,t_2)dx_2;$$

$$f_k(x_1,x_2,\ldots,x_k;t_1,t_2,\ldots t_k)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}k\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x_1,x_2,\ldots,x_n;t_1,t_2,\ldots t_n)dx_{k+1}\ldots dx_n, k<n.$$

Для независимых сечений X(t) n-мерная плотность вероятностей выразится через одномерную плотность распределения вероятностей формулой

$$f_n(x_1,x_2,\ldots,x_n;t_1,t_2,\ldots t_n)=f_1(x_1;t_1)f_2(x_2;t_2)\ldots f_n(x_n;t_n).$$

Характеристики случайных функций

Математическое ожидание случайной функции

Математическим ожиданием случайной функции X(t) называется неслучайная функция $m_x(t)$, которая при каждом значении аргумента t равна математическому ожиданию соответствующего сечения случайной функции:

$$MX(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x, t) dx = m_x(t).$$

Математическое ожидание случайной функции X(t) представляет собой некоторую среднюю функцию, около которой группируются и относительно которой колеблются все возможные реализации случайной функции.

Свойства математического ожидания

- Математическое ожидание неслучайной (детерминированной) функции равно самой этой функции
$$MC(t)=C(t).$$
- Неслучайную функцию можно выносить за оператор математического ожидания
$$MC(t)X(t)=C(t)MX(t).$$
- $$M(X(t)\pm Y(t))=MX(t)\pm MY(t).$$
- Для некоррелированных $X(t)$ и $Y(t)$
$$MX(t)Y(t)=MX(t)MY(t).$$

Дисперсия случайной функции

- Дисперсией случайной функции X(t) называется неслучайная функция $D_x(t)$, значение которой для каждого t равно дисперсии соответствующего сечения случайной функции

$$DX(t) = M[X(t) - m_x(t)]^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x(t))^2 f_1(x,t)dx.$$

Дисперсия характеризует разброс возможных реализаций случайной функции относительно среднего. Обладает свойствами дисперсии случайной величины.

Корреляционная функция случайной функции X(t)

Корреляционной функцией случайной функции X(t) называется неслучайная функция двух аргументов t_1 и t_2, которая при каждой паре значений t_1 и t_2 равна корреляционному моменту соответствующих сечений случайной функции:

$$K_x(t_1,t_2)=M[(X(t_1)-m_x(t_1))(X(t_2)-m_x(t_2))]=M(\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{X}(t_2))$$

После преобразования $K_x(t_1,t_2)$, получим

$$K_x(t_1,t_2)=M(X(t_1)X(t_2))-m_x(t_1)m_x(t_2).$$

- Корреляционная функция находится как

$$K_x(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x_1-m_x(t_1))(x_2-m_x(t_2))f_2(x_1,x_2;t_1,t_2)dx_1dx_2.$$

Для независимых сечений случайной функции корреляционная функция равна нулю.

Свойства корреляционной функции

- Дисперсия случайной функции находится при равенстве аргументов $t_1=t_2=t$:

$$DX(t)=K_x(t,t).$$

- Корреляционная функция вещественной случайной функции симметричная функция:

$$K_x(t_1,t_2)=K_x(t_2,t_1).$$

- $K_x(t_1,t_2)$ убывает по мере увеличения длины интервала (t_1,t_2).
- Для вещественной случайной функции

$$|K_x(t_1,t_2)|\le\sqrt{K_x(t_1,t_1)K_x(t_2,t_2)}.$$

Линейные преобразования случайных функций

- Прибавление неслучайного слагаемого
Пусть X(t) – случайная функция, а C(t) – неслучайная функция:

$$Y(t)=X(t)+C(t).$$

Математическое ожидание:

$$MY(t)=m_x(t)+C(t).$$

Корреляционная функция:

$$K_y(t_1,t_2)=K_x(t_1,t_2).$$

- Умножение на неслучайный множитель

Рассмотрим случайную функцию

$$Y(t)=X(t)*C(t).$$

Математическое ожидание:

$$MY(t)=MX(t)*MC(t)=C(t)*MX(t).$$

Корреляционная функция:

$$K_y(t_1,t_2)=C(t_1)C(t_2)K_x(t_1,t_2).$$

Дифференцирование случайной функции

- Пусть X(t) – случайная функция и заданы математическое ожидание $m_x(t)$ и корреляционная функция $K_x(t_1,t_2)$. Найдем характеристики случайной функции

$$Y(t)=dX(t)/dt.$$

Математическое ожидание:

$$MY(t)=dm_x(t)/dt.$$

Функция корреляции:

$$K_y(t_1,t_2)=\partial\partial K_x(t_1,t_2)/\partial t_1\partial t_2.$$

Интегрирование случайной функции

- Пусть X(t) – случайная функция и заданы математическое ожидание $m_x(t)$ и корреляционная функция $K_x(t_1,t_2)$. Найдем характеристики случайной функции

$$Y(t) = \int_0^t X(\tau)d\tau$$

Математическое ожидание

$$m_y(t) = \int_0^t m_x(\tau)d\tau$$

Функция корреляции

$$K_y(t_1,t_2) = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} K_x(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2$$

Сложение случайных функций

- Рассмотрим сумму случайных функций:

  Z(t)=X(t)+Y(t).

  Найдем характеристики Z(t):

  По теореме сложения математических ожиданий получим:

  $m_z(t)=M((X(t)+Y(t))=m_x(t)+m_y(t))$.

Из определения корреляционной функции:

$$K_z(t_1,t_2)=M[\overset{\circ}{Z}(t_1)\bullet\overset{\circ}{Z}(t_2)]=M[(\overset{\circ}{X}(t_1)+\overset{\circ}{Y}(t_1)(\overset{\circ}{X}(t_2)+\overset{\circ}{Y}(t_2)].$$

После преобразования, получим:

$$K_z(t_1,t_2)=K_x(t_1,t_2)+R_{xy}(t_1,t_2)+R_{yx}(t_1,t_2)+K_y(t_1,t_2).$$

- Взаимная корреляционная функция:

$$R_{xy}(t_1,t_2)=M\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{Y}(t_2).$$

Корреляционная функция связи характеризует степень зависимости значения случайной функции X(t) взятого в момент t_1, от значения случайной функции Y(t) взятого в момент t_2.

$K_x(t_1,t_2)$ – корреляционная функция связи одной случайной величины, поэтому иногда ее называют «автокорреляционной функцией».

Свойства взаимной корреляционной функции

- Для действительных случайных функций перестановка индексов при одновременной перестановке аргументов не меняет значения взаимной корреляционной функции:

$$R_{xy}(t_1,t_2)=R_{yx}(t_2,t_1).$$

- Взаимная корреляционная функция не изменяется при прибавлении любых неслучайных слагаемых.
- Если взаимная корреляционная функция равна нулю:

$$R_{xy}(t_1,t_2)=0,$$

то функции X(t) и Y(t)) называются некоррелированными (несвязанными).

Сложение случайной функции со случайной величиной

- Пусть $X(t)$-случайная функция, ξ-случайная величина; они некоррелированы. Получим случайную функцию $Z(t)=X(t)+\xi$ и определим ее характеристики при известных $m_x(t)$ и $K_x(t_1,t_2)$:

$$MZ(t)=m_z(t)=m_x(t)+M\xi.$$

Для корреляционной функции получим:

$$K_z(t_1,t_2)=K_x(t_1,t_2)+K_{\xi\xi}=K_x(t_1,t_2)+D\xi.$$

Нормированная взаимная корреляционная функция связи

- Это безразмерная характеристика связи между случайными функциями:

$$r_{xy}(t_1,t_2)=\frac{R_{xy}(t_1,t_2)}{\sqrt{D_x(t_1)D_y(t_2)}}.$$

Оценка характеристик случайной функции

- Пусть имеется n реализаций случайной функции X(t): $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$. Требуется найти оценки характеристик случайной функции: $m_x(t)$, $D_x(t)$ и $K_x(t_1,t_2)$. Для этого рассмотрим ряд сечений X(t) для моментов $t_1, t_2, \ldots, t_m$. Каждому из этих моментов будет соответствовать n значений случайной функции. Моменты задаются обычно равноотстоящими или из технических условий. Значения X(t) заносятся в таблицу:

t X(t)	t_1	t_2		t_m
$X_1(t)$	$x_1(t_1)$	$x_1(t_2)$	…	$x_1(t_m)$
$X_2(t)$	$x_2(t_1)$	$x_2(t_2)$	…	$x_2(t_m)$
…	…	…	…	…
$X_n(t)$	$x_n(t_1)$	$x_n(t_2)$	…	$x_n(t_m)$

Каждое сечение t_k есть n значений случайной величины и оценка математического ожидания находится по известному соотношению:

$$\hat{m}_x(t_k)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i(t_k),\qquad k=\overline{1,m}.$$

Получим m точек оценки функции математического ожидания. Это усреднение по множеству реализаций.

Оценка не смещена, так как $M\hat{m}(t)=m(t)$.

Для дисперсии:

$$\hat{D}_x(t_k)=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i(t_k)-\hat{m}_x(t_k)\right)^2.$$

- Для корреляционной функции:

$$\hat{K}_x(t_k,t_l)=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i(t_k)-\hat{m}_x(t_k))(x_i(t_l)-\hat{m}_x(t_l)),\quad k,l=\overline{1,m}.$$

  По полученным значениям можно построить функцию математического ожидания и дисперсии по точкам, а функция корреляции двух аргументов воспроизводится по ее значениям в прямоугольной сетке.

- Эти функции можно аппроксимировать аналитическими выражениями.

Стационарные случайные функции

Различают стационарность случайной функции в узком и в широком смысле.

- Стационарность в узком смысле случайной функции называется такая случайная функция X(t), для которой n-мерная плотность распределения вероятностей $f_n(x_1, x_2,\ldots x_n; t_1, t_2\ldots t_n)$ при любом n зависит только от величины интервалов t_2-t_1, $t_3-t_1,\ldots, t_n-t_1$ и не зависит от положения этих интервалов в области изменения аргумента t.

Так, одномерная плотность распределения вероятностей $f_1(x;t)$ стационарной в узком смысле не будет зависеть от t – $f(x)$. Двумерная будет зависеть от разности $t_2-t_1=τ$ то есть $f_2(x_1,x_2;τ)$. N-мерная будет зависеть только от их разностей $τ_1= t_2-t_1$, $τ_2= t_3-t_1,…,$ $τ_{n-1}= t_n-t_1$, то есть

$$f_n(x_1,\ x_2,…x_n;\ τ_1,\ τ_2…τ_{n-1}).$$

- Стационарная функция называется стационарной в широком смысле, если ее математическое ожидание постоянно, а корреляционная функция зависит только от разности аргументов $\tau=t_2-t_1$:

$$m_x(t)=const;\ K_x(t_1,t_2)=K_x(\tau).$$

- Стационарная функция в широком смысле может быть нестационарной в узком смысле. Наоборот, случайная функция стационарная в узком смысле, является стационарной в широком смысле:

$$m_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = m_x = const, \qquad DX(t) = K_x(0),$$

$$K_x(t, t+\tau) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - m_x)(x_2 - m_x) f_2(x_1, x_2; \tau) dx_1 dx_2 = K_x(\tau).$$

Свойства $K_x(т)$

- Если X(t) вещественная и стационарная, то ее корреляционная функция является четной функцией:

$$K_x(т)= K_x(-т).$$

- Если X(t) стохастически непрерывна, то ее корреляционная функция $K_x(т)$ есть функция непрерывная.
- Если X(t) вещественная и стационарная, то имеет место неравенство

$$|K_x(т)|\leq K_x(0).$$

Эргодические свойства стационарных случайных функций

- Так как X(t) вещественная и стационарная и процесс протекает однородно по времени, то по одной реализации достаточной продолжительности можно оценить характеристики случайной функции. Эргодическое свойство состоит в том, что каждая отдельная реализация $X_k(t)$ несет как бы информацию всей совокупности возможных реализаций X(t), т.е. одна реализация достаточной продолжительности может заменить при обработке множество реализаций.

Оценка характеристик стационарной случайной функции

- Если X(t) обладает эргодическим свойством, то для нее среднее по времени приближенно равно среднему по множеству наблюдений. Для $m_x(t)$=const:

$$\hat{m}_x = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt.$$

- Для корреляционной функции:

$$K_x(\tau) = M\,\overset{\circ}{X}(t)\,\overset{\circ}{X}(t+\tau),$$

где

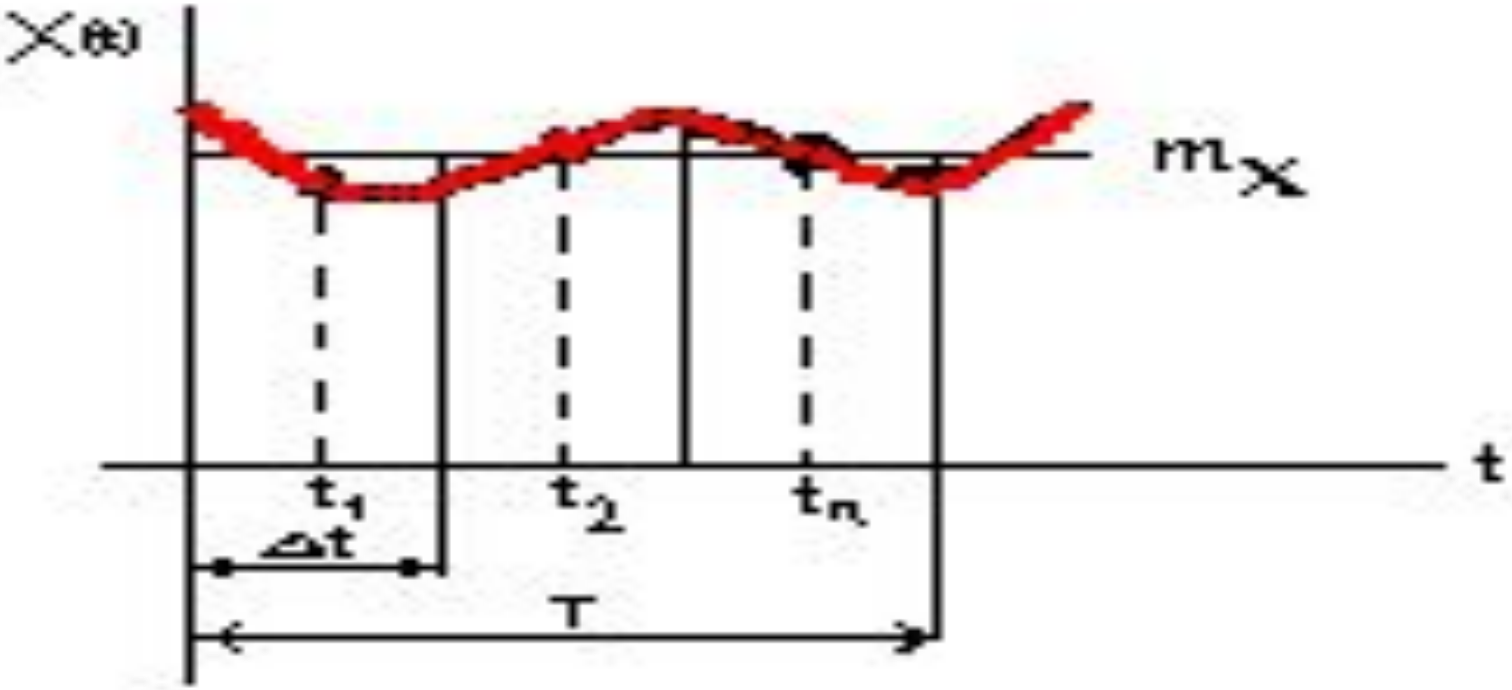
$$\overset{\circ}{X}(t) = X(t) - m_x, \quad t+\tau \le T.$$

Тогда

$$\hat{K}_x(\tau) = \frac{1}{T-\tau}\int_0^{T-\tau} \overset{\circ}{x}(t)\,\overset{\circ}{x}(t+\tau)\,dt.$$

Вычислив интеграл для ряда т, можно приближенно воспроизвести по точкам весь ход корреляционной функции.

- На практике интегралы заменяют конечными суммами. Для этого интервал T разбивают на n равных частей длиной Δt=T/n.



- Обозначим середины полученных участков t_1, t_2,…, t_n, тогда получим:

$$\hat{m}_x = \frac{1}{T} \cdot \frac{T}{n} \sum_{i=1}^{n} x(t_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x(t_i).$$

Для корреляционной функции введем:

$$\tau = m\Delta t = mT/n.$$

Для интервала интегрирования:

$T-\tau = T - mT/n = (n-m)/n \cdot T$, $1/(T-\tau) = n/(n-m) \cdot T$.

Тогда получим оценку корреляционной функции:

$$\hat{K}_x\left(\frac{mT}{n}\right)=\frac{n}{(n-m)T}\cdot\frac{T}{n}\sum_{i=1}^{n-m}\overset{\circ}{X}(t_i)\overset{\circ}{X}(t_{i+m})=\frac{1}{n-m}\sum_{i=1}^{n-m}\overset{\circ}{X}(t_i)\overset{\circ}{X}(t_{i+m}).$$

$m=0, 1, 2,\ldots.$

Вычисления проводятся до тех m при которых корреляционная функция становится равной нулю.

Марковский случайный процесс

- Случайный процесс называется Марковским, если все вероятностные характеристики процесса в будущем зависят лишь от того, каким образом этот процесс протекал в прошлом.
  То есть будущее зависит от прошлого только через настоящее.

Пусть $A=\{a_1, a_2,\ldots, a_n\}$ – пространство исходов эксперимента или пространство состояний некоторой системы, одинаковые для каждого шага случайного процесса. Тогда по определению Марковского процесса вероятность того, что система переходит из состояния a_i в состояние a_k зависит только от состояния a_i из которого она исходит в процессе рассматриваемого перехода и не зависит от того, каким образом система пришла в это состояние.

- Случайный процесс, протекающий в физической системе называется цепью Маркова, если переходы системы из одного состояния в другое возможны только в определенные дискретные моменты времени t_1, t_2,…. Обозначим через P_{ik} вероятности перехода системы из состояния a_i в состояние $a_к$. Марковская цепь характеризуется тем, что вероятности P_{ik} определяются для всех упорядоченных пар состояний и задано исходное состояние.

- Вероятности перехода P_{11}, P_{22}, P_{33} означают, что система остается в состоянии a_1 с вероятностью P_{11}, в состоянии $a_2 \rightarrow P_{22}$, $a_3 \rightarrow P_{33}$. Равенство нулю вероятности P_{ik} означает невозможность соответствующих переходов.
- Вероятности перехода из одного состояния в другое можно представить двумя способами.

Первый способ состоит в том, что вероятности перехода записываются в виде квадратной матрицы.

- Для Марковской цепи с тремя состояниями a_1, a_2, a_3 матрица имеет вид:

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix}$$

Матрица вероятностей перехода (стохастическая матрица) должна обладать условием, что сумма элементов каждой строки равна единице.

- Второй способ представления вероятностей перехода состоит в построении диаграммы перехода, когда возможные состояния системы S наглядно изображают с помощью графа состояний. Возможные состояния системы на графе изображаются окружностями. Вероятности перехода изображаются ребрами с соответствующими числами вероятностей перехода. Сумма вероятностей для ребер, выходящих из любой вершины графа должна равняться единице.

  По матрице можно построить граф и наоборот.

- При изучении Марковских цепей иногда возникает задача: найти вероятности того, что через n шагов процесс перейдет из состояния a_i в состояние a_k. Зная матрицу P^n можно найти матрицу P^{n+1} по соотношению:

$$P^{n+1}=P\cdot P^n.$$

- Марковская цепь называется регулярной, если какая – либо степень ее матрицы вероятностей перехода не содержит нулевых элементов. Любая стохастическая матрица, не содержащая нулей, определяет регулярную Марковскую цепь.

- Марковская цепь называется эргодической, если из каждого ее состояния можем попасть в любое другое состояние.

Моделирование случайных величин

Случайные величины моделируют с помощью преобразований одного Или нескольких независимых Значений случайной величины L, равномерно распределенной в интервале (0,1).

Моделирование дискретных случайных величин

Общий метод моделирования основан на следующем очевидном равенстве

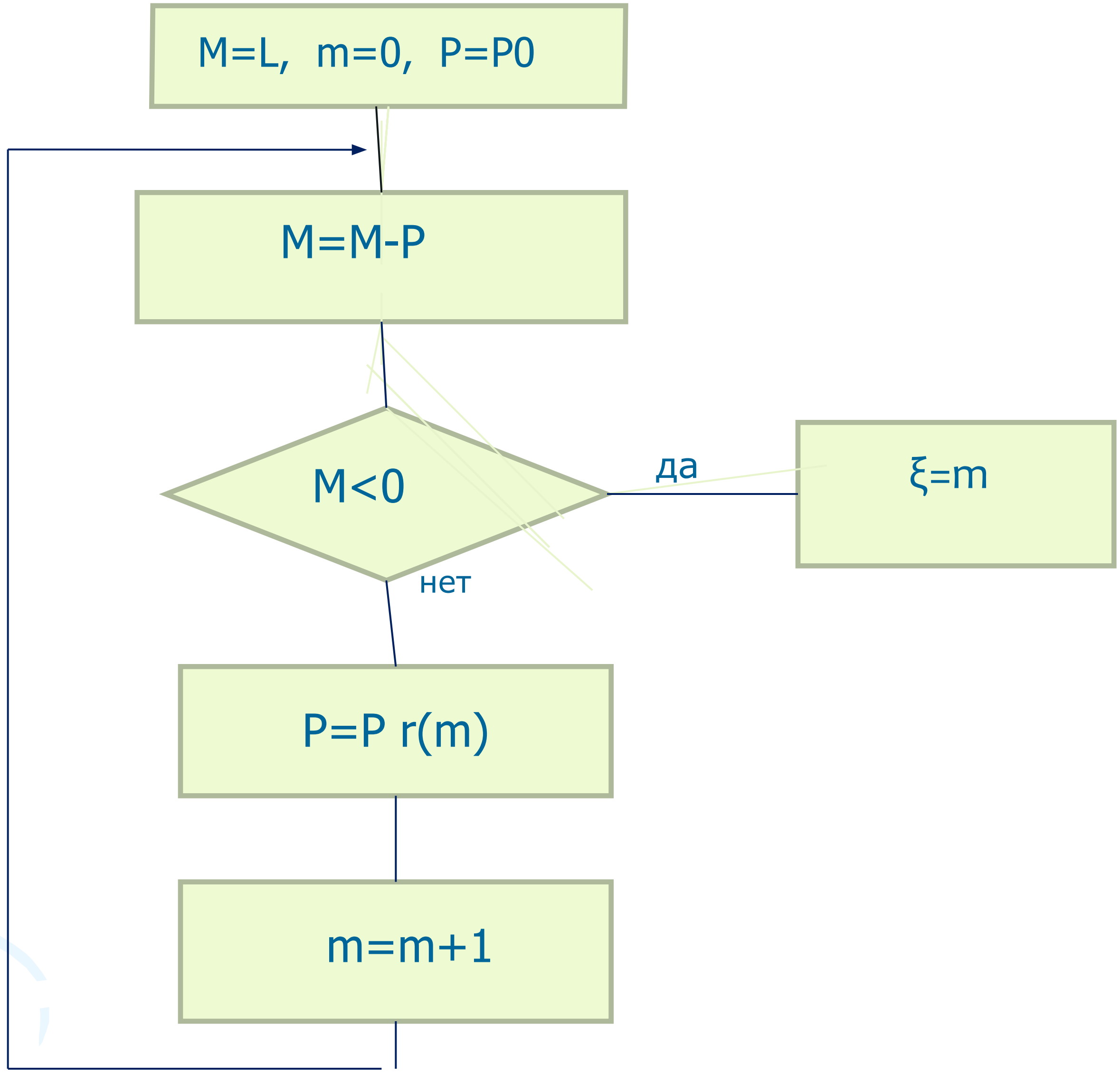
$$P\left(\sum_{k=0}^{m-1} P_k \le L \boxtimes \sum_{k=0}^{m} P_k\right) = P_m,$$

$$\text{ãäå} \quad P_m = P(\xi = x_m), \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

которые связаны рекурсивными формулами

$$P_{k+1} = P_k \cdot r(k)$$

и моделирование производится по схеме


M=L, m=0, P=P0
M=M-P
M<0
да
ξ=m
нет
P=P r(m)
m=m+1

Для биномиального распределения с параметрами (P,n)

$$P_k = P(\xi = k) = C_n^k P^k q^{n-k}, \quad (q = 1 - p)$$

$$r(k) = \frac{P_{k+1}}{P_k} = \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{P}{1-P}, \quad k = 0, 1, \ldots n.$$

Для распределения Пуассона с параметром a

$$P(\xi = k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a}, \qquad k = 0,\ 1, 2, \ldots$$

$$r(k) = \frac{P_{k+1}}{P_k} = \frac{a^{k+1} \cdot e^{-a} \cdot k! \cdot e^{a}}{(k+1)! \cdot a^k} = \frac{a}{k+1}.$$

Моделирование непрерывных случайных величин

- Случайная величина моделируется по формуле вида:

$$\xi=\varphi(L),$$

где $\varphi(L)$ – строго монотонная и непрерывная функция на интервале (0,1). Для случайной величины ξ задана плотность распределения $f(x)$ на интервале (а, в). Для монотонно возрастающей функции $\varphi(L)$ моделирующая формула для непрерывной случайной ξ запишется в виде

$$\xi = F^{-1}(L).$$

Для монотонно убывающей функции φ(L) моделирующая формула для непрерывной случайной ξ запишется как

$$\xi = F^{-1}(1 - L),$$

которая эквивалентна предыдущей формуле т. к. случайные величины 1-L и L одинаково распределены.

Для экспоненциального закона

Плотность вероятностей экспоненциального закона имеет вид

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0.$$

Функция распределения имеет вид

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \text{ òî ãäà}$$

$$1 - L = 1 - e^{-\lambda x}, \ \ \xi = x, \ \ e^{-\lambda \xi} = L.$$

Из этих соотношений определяется формула для Моделирования экспоненциального закона

$$\xi = -\frac{\ln L}{\lambda}.$$