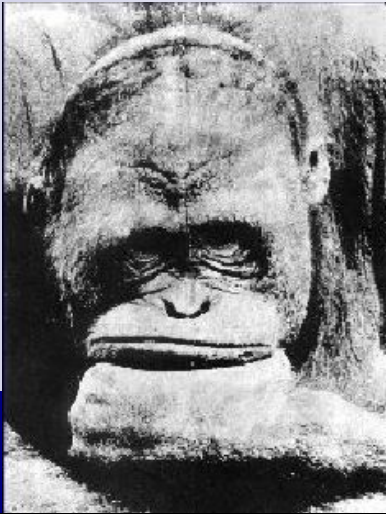
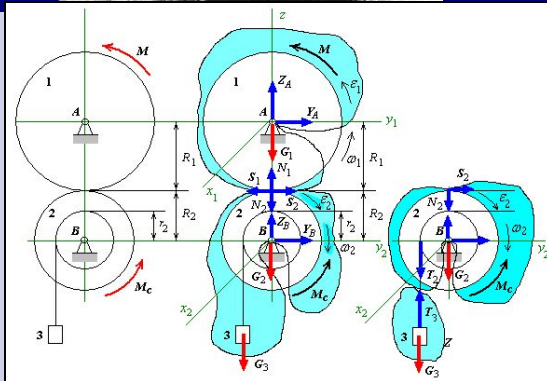


Бондаренко А.Н.



# Курс лекций по теоретической механике



## Динамика (I часть)

Электронный учебный курс написан на основе лекций, читавшихся автором для студентов, обучавшихся по специальностям СЖД, ПГС и СДМ в НИИЖТе и МИИТе (1974-2006 гг.). Учебный материал соответствует календарным планам в объеме трех семестров.

Для полной реализации анимационных эффектов при презентации необходимо использовать средство просмотра Power Point не ниже, чем встроенный в Microsoft Office операционной системы Windows-XP Professional.

Замечания и предложения можно послать по e-mail: [bond@miit.ru](mailto:bond@miit.ru).

Москва - 2007

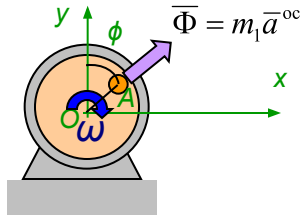
## ■ Лекция 4.

Вынужденные колебания материальной точки. Резонанс.

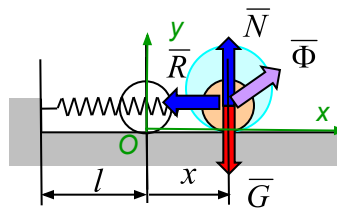
Влияние сопротивления движению при вынужденных колебаниях.

# Лекция 4

- **Вынужденные колебания материальной точки** – Наряду с **восстанавливающей силой** действует периодически изменяющаяся сила, называемая **возмущающей силой**.
- Возмущающая сила может иметь различную природу. Например, в частном случае инерционное воздействие неуравновешенной массы  $m_1$  вращающегося ротора вызывает гармонически изменяющиеся проекции силы:



$$\begin{aligned} \bar{\Phi} &= m_1 \bar{a}^{\text{oc}} & \Phi &= m_1 \omega^2 OA = \\ & & &= m_1 p^2 OA = H \\ & & \varphi &= \omega t = pt. \\ \Phi_x &= H \sin pt. \end{aligned}$$



Основное уравнение динамики:  $m\bar{a} = \sum \bar{F}_i = \bar{G} + \bar{R} + \bar{N} + \bar{\Phi}$ .

Проекция уравнения динамики на ось:

$$(x): m\ddot{x} = -R_x + \Phi_x = -cx + H \sin pt$$

Приведем уравнение к стандартному виду:

$$\ddot{x} = -\frac{c}{m}x + \frac{H}{m} \sin pt. \quad \boxed{\ddot{x} + k^2x = \frac{H}{m} \sin pt.}$$

Решение этого неоднородного дифференциального уравнения состоит из двух частей  $x = x_1 + x_2$ :  $x_1$  – общее решение соответствующего однородного уравнения  $\boxed{\ddot{x} + k^2x = 0}$  и  $x_2$  – частное решение неоднородного уравнения:

**Общее решение:**

$$x_1 = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt.$$

**Частное решение** подбираем в форме правой части:

$$x_2 = A \sin pt. \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}_2 = pA \cos pt. \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}_2 = -p^2 A \sin pt. \quad \Rightarrow \quad -Ap^2 \sin pt + k^2 A \sin pt = \frac{H}{m} \sin pt.$$

Полученное равенство должно удовлетворяться при любом  $t$ .

Тогда:  $A(-p^2 + k^2) = \frac{H}{m}$  или  $A = \frac{H}{m(k^2 - p^2)}$ .

Таким образом, **частное решение:**

$$x_2 = \frac{H}{m(k^2 - p^2)} \sin pt.$$

В итоге **полное решение:**

$$x = x_1 + x_2 = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{H}{m(k^2 - p^2)} \sin pt.$$

$$x = a \sin(pt + \beta) + \frac{H}{m(k^2 - p^2)} \sin pt.$$

Постоянные  $C_1$  и  $C_2$ , или  $a$  и  $\beta$  определяются из начальных условий с использованием **полного решения (!)**:

Таким образом, при одновременном действии восстанавливающей и возмущающей сил материальная точка совершает сложное колебательное движение, представляющее собой **результат сложения** (наложения) **свободных** ( $x_1$ ) **и вынужденных** ( $x_2$ ) **колебаний**.

1. Если  $p < k$  (вынужденные колебания малой частоты), то **фаза колебаний совпадает с фазой возмущающей силы**:

$$x_2 = \frac{H}{m(k^2 - p^2)} \sin pt.$$

2. Если  $p > k$  (вынужденные колебания большой частоты), то **фаза колебаний противоположна фазе возмущающей силы**:

$$x_2 = -\frac{H}{m(p^2 - k^2)} \sin pt = \frac{H}{m(p^2 - k^2)} \sin(pt - \pi).$$

# Лекция 4 (продолжение 4.2)

**Коэффициент динамичности** – отношение амплитуды вынужденных колебаний к статическому отклонению точки под действием постоянной силы  $H = \text{const}$ :

$$\eta = \frac{A}{A_{\text{ст}}}$$

Амплитуда вынужденных колебаний:

$$A = \frac{H}{m(k^2 - p^2)}$$

Статическое отклонение можно найти из уравнения равновесия:  $\sum X_i = 0; -R + H = 0$ .

Здесь:  $R = cx = cA_{\text{ст}} = mk^2 A_{\text{ст}} = H$ .

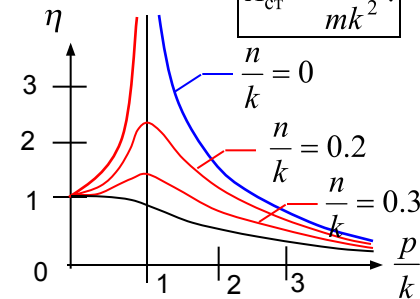
Таким образом, при  $p < k$  (малая частота вынужденных колебаний) коэффициент динамичности:

$$\eta = \frac{k^2}{k^2 - p^2} = \frac{1}{1 - \frac{p^2}{k^2}}$$

При  $p > k$  (большая частота вынужденных колебаний) коэффициент динамичности:

$$\eta = \frac{k^2}{p^2 - k^2} = \frac{1}{\frac{p^2}{k^2} - 1}$$

Отсюда:  $A_{\text{ст}} = \frac{H}{mk^2}$ .



**Резонанс** – возникает, когда частота вынужденных колебаний совпадает с частотой собственных колебаний ( $p = k$ ). Это наиболее часто происходит при запуске и остановке вращения плохо сбалансированных роторов, закрепленных на упругих подвесках.

**Дифференциальное уравнение колебаний при равенстве частот:**  $m\ddot{x} + k^2x = \frac{H}{m} \sin kt$

Приравняв коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} A_c(k^2 - p^2) = \frac{H}{m} \cos \varepsilon; \\ 2npA_c = \frac{H}{m} \sin \varepsilon. \end{cases}$$

Делением второго уравнения на первое получаем **сдвиг фазы вынужденных колебаний:**

$$\text{tg} \varepsilon = \frac{2np}{k^2 - p^2}$$

Таким образом, **уравнение движения при вынужденных колебаниях с учетом сопротивления движению**, например при  $n < k$  (малое сопротивление):

$$x = x_1 + x_2 = e^{-nt} (C_1 \cos \sqrt{k^2 - n^2} t + C_2 \sin \sqrt{k^2 - n^2} t) + A_c \sin(pt - \varepsilon)$$

Возведением в степень обоих уравнений и сложением их получаем **амплитуду вынужденных колебаний:**

$$A_c = \frac{H}{m \sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}}$$

**Вынужденные колебания при сопротивлении движению не затухают. Частота и период вынужденных колебаний равны частоте и периоду изменения возмущающей силы. Коэффициент динамичности при резонансе имеет конечную величину и зависит от соотношения  $n$  и  $k$ .**

**Влияние сопротивления движению при вынужденных колебаниях.**

Дифференциальное уравнение при наличии вязкого сопротивления имеет вид:

$$m\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = \frac{H}{m} \sin pt$$

**Общее решение** выбирается из таблицы (Лекция 3, стр. 11) в зависимости от соотношения  $n$  и  $k$  ([посмотреть](#)).

**Частное решение** возьмем в виде  $x_2 = A_c \sin(pt - \varepsilon)$  и найдем производные:

$$\dot{x}_2 = A_c p \cos(pt - \varepsilon), \quad \ddot{x}_2 = -A_c p^2 \sin(pt - \varepsilon)$$

Подставим в дифференциальное уравнение:

$$-A_c p^2 \sin(pt - \varepsilon) + 2nA_c p \cos(pt - \varepsilon) + k^2 A_c \sin(pt - \varepsilon) = \frac{H}{m} \sin(pt - \varepsilon + \varepsilon) = \frac{H}{m} \sin(pt - \varepsilon) \cos \varepsilon + \frac{H}{m} \cos(pt - \varepsilon) \sin \varepsilon$$