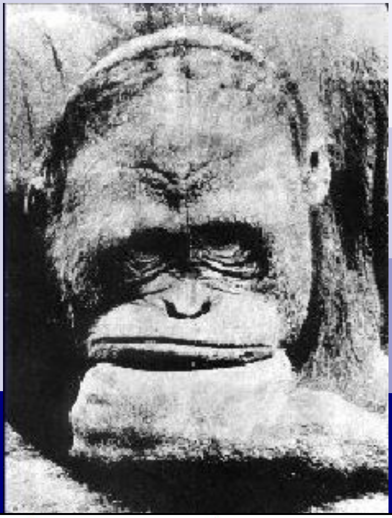
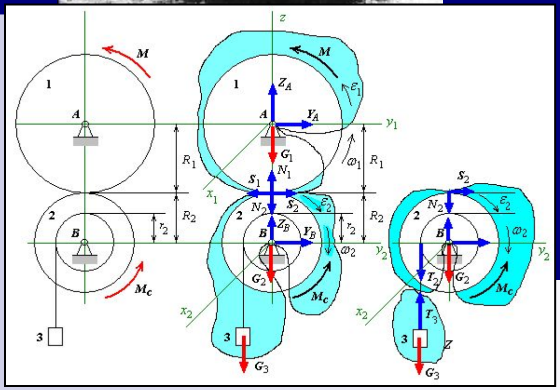
Московский государственный университет путей сообщения (МИИТ)
Кафедра теоретической механики
Научно-технический центр транспортных технологий

Бондаренко А.Н.





Курс лекций по теоретической механике

Динамика (I часть)

Электронный учебный курс написан на основе лекций, читавшихся автором для студентов, обучавшихся по специальностям СЖД, ПГС и СДМ в НИИЖТе и МИИТе (1974-2006 гг.). Учебный материал соответствует календарным планам в объеме трех семестров.

Для полной реализации анимационных эффектов при презентации необходимо использовать средство просмотра Power Point не ниже, чем встроенный в Microsoft Office операционной системы Windows-XP Professional.

Замечания и предложения можно послать по e-mail: bond@miit.ru .

Москва - 2007

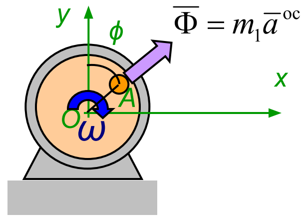
- **Лекция 4**.

Вынужденные колебания материальной точки. Резонанс.

Влияние сопротивления движению при вынужденных колебаниях.

Лекция 4

- **Вынужденные колебания материальной точки** – Наряду с **восстанавливающей силой** действует периодически изменяющаяся сила, называемая **возмущающей силой**.
- Возмущающая сила может иметь различную природу. Например, в частном случае инерционное воздействие неуравновешенной массы m_1 вращающегося ротора вызывает гармонически изменяющиеся проекции силы:

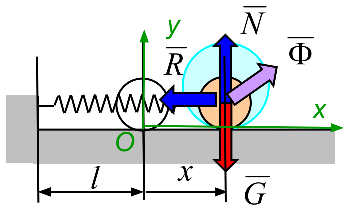


$$\bar{\Phi} = m_1 \bar{a}^{oc}$$

$$\Phi = m_1 \omega^2 OA = m_1 p^2 OA = H$$

$$\varphi = \omega t = pt.$$

$$\Phi_x = H \sin pt.$$



Основное уравнение динамики: $m\bar{a} = \sum \bar{F}_i = \bar{G} + \bar{R} + \bar{N} + \bar{\Phi}.$

Проекция уравнения динамики на ось: $(x):\ m\ddot{x} = -R_x + \Phi_x = -cx + H\sin pt$

Приведем уравнение к стандартному виду: $\ddot{x} = -\dfrac{c}{m}x + \dfrac{H}{m}\sin pt.$ $\boxed{\ddot{x} + k^2 x = \dfrac{H}{m}\sin pt.}$

Решение этого неоднородного дифференциального уравнения состоит их двух частей $x = x_1 + x_2$: x_1 – общее решение соответствующего однородного уравнения $\boxed{\ddot{x} + k^2 x = 0}$ и x_2 – частное решение неоднородного уравнения:

Общее решение: $\boxed{x_1 = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt.}$ **Частное решение** подбираем в форме правой части:

$\boxed{x_2 = A\sin pt.}$ ⇒ $\dot{x}_2 = pA\cos pt.$ ⇒ $\ddot{x}_2 = -p^2 A\sin pt.$ ⇒ $-Ap^2 \sin pt + k^2 A\sin pt = \dfrac{H}{m}\sin pt.$

Полученное равенство должно удовлетворяться при любом t .

Тогда: $A(-p^2 + k^2) = \dfrac{H}{m}$ или $\boxed{A = \dfrac{H}{m(k^2 - p^2)}.}$ Таким образом, **частное решение:** $\boxed{x_2 = \dfrac{H}{m(k^2 - p^2)}\sin pt.}$

В итоге **полное решение**: $\boxed{x = x_1 + x_2 = C_1\cos kt + C_2 \sin pt + \dfrac{H}{m(k^2 - p^2)}\sin pt.}$ или $\boxed{x = a\sin(pt + \beta) + \dfrac{H}{m(k^2 - p^2)}\sin pt.}$

Постоянные C_1 и C_2, или a и β определяются из начальных условий с использованием **полного решения (!)**:

Таким образом, при одновременном действии восстанавливающей и возмущающей сил материальная точка совершает сложное колебательное движение, представляющее собой **результат сложения** (наложения) **свободных** (x_1) **и вынужденных** (x_2) **колебаний.**

1. Если **p < k** (вынужденные колебания малой частоты), то **фаза колебаний совпадает с фазой возмущающей силы**:

$$\boxed{x_2 = \frac{H}{m(k^2 - p^2)}\sin pt.}$$

2. Если **p > k** (вынужденные колебания большой частоты), то **фаза колебаний противоположна фазе возмущающей силы**:

$$\boxed{x_2 = -\frac{H}{m(p^2 - k^2)}\sin pt = \frac{H}{m(p^2 - k^2)}\sin(pt - \pi).}$$

Коэффициент динамичности – отношение амплитуды вынужденных колебаний к статическому отклонению точки под действием постоянной силы H = const:

$$\eta = \frac{A}{A_{ст}}$$

Амплитуда вынужденных колебаний:

$$A = \frac{H}{m(k^2 - p^2)}$$

Статическое отклонение можно найти из уравнения равновесия: $\sum X_i = 0; \quad -R + H = 0.$

Здесь: $R = cx = cA_{ст} = mk^2 A_{ст} = H.$ Отсюда:

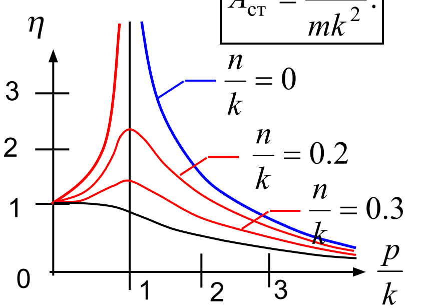
$$A_{ст} = \frac{H}{mk^2}.$$

Таким образом, при p < k (малая частота вынужденных колебаний) коэффициент динамичности:

$$\eta = \frac{k^2}{k^2 - p^2} = \frac{1}{1 - \dfrac{p^2}{k^2}}.$$

При p > k (большая частота вынужденных колебаний) коэффициент динамичности:

$$\eta = \frac{k^2}{p^2 - k^2} = \frac{1}{\dfrac{p^2}{k^2} - 1}.$$



Резонанс – возникает, когда частота вынужденных колебаний совпадает с частотой собственных колебаний **(p = k)**. Это наиболее часто происходит при запуске и остановке вращения плохо сбалансированных роторов, закрепленных на упругих подвесках.

Дифференциальное уравнение колебаний при равенстве частот:

$$\ddot{x} + k^2 x = \frac{H}{m} \sin kt.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} A_c(k^2 - p^2) = \dfrac{H}{m}\cos\varepsilon; \\ 2npA_c = \dfrac{H}{m}\sin\varepsilon. \end{cases}$$

Возведением в степень обоих уравнений и сложением их получаем **амплитуду вынужденных колебаний**:

$$A_c = \frac{H}{m\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}}.$$

Делением второго уравнения на первое получаем **сдвиг фазы вынужденных колебаний**:

$$tg\varepsilon = \frac{2np}{k^2 - p^2}.$$

Таким образом, **уравнение движения при вынужденных колебаниях с учетом сопротивления движению**, например при n < k (малое сопротивление):

$$x = x_1 + x_2 = e^{-nt}(C_1 \cos\sqrt{k^2 - n^2}t + C_2 \sin\sqrt{k^2 - n^2}t) + A_c \sin(pt - \varepsilon).$$

Вынужденные колебания при сопротивлении движению не затухают. Частота и период вынужденных колебаний равны частоте и периоду изменения возмущающей силы. Коэффициент динамичности при резонансе имеет конечную величину и зависит от соотношения *n* и *к*.

Влияние сопротивления движению при вынужденных колебаниях.

Дифференциальное уравнение при наличии вязкого сопротивления имеет вид:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = \frac{H}{m}\sin pt.$$

Общее решение выбирается из таблицы (Лекция 3, стр. 11) в зависимости от соотношения n и к (посмотреть).

Частное решение возьмем в виде $x_2 = A_c \sin(pt - \varepsilon)$ и вычислим производные :

$$\dot{x}_2 = A_c p\cos(pt - \varepsilon). \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}_2 = -A_c p^2 \sin(pt - \varepsilon).$$

Подставим в дифференциальное уравнение:

$$-A_c p^2 \sin(pt - \varepsilon) + 2nA_c p\cos(pt - \varepsilon) + k^2 A_c \sin(pt - \varepsilon) = \frac{H}{m}\sin(pt - \varepsilon + \varepsilon) = \frac{H}{m}\sin(pt - \varepsilon)\cos\varepsilon + \frac{H}{m}\cos(pt - \varepsilon)\sin\varepsilon.$$