Муниципальное общеобразовательное учреждение гимназия № 12

Геометрическое доказательство формул сокращенного умножения

Подготовил:
ученик 7Г класса
Дмитриев Виктор Андреевич
Научный руководитель:
Заслуженный учитель РФ,
к.п.н. Уласевич О.Н.

Номинация «Геометрические миниатюры»

Липецк, 2009

Цель проекта:

- изучение исторических аспектов темы;
- доказательство формул сокращенного умножения с помощью геометрии;
- изучение предмета геометрической алгебры;
- систематизация полученных данных;
- создание презентации.

Методы и приемы:

- анализ научной и исторической литературы по проблеме исследования,
- построение геометрических моделей доказательства формул сокращенного умножения,
- использование информационно-коммуникационных технологий,
- качественный анализ результатов.

Историческая справка

Использование геометрических чертежей как иллюстрации алгебраических соотношений встречалось еще в Древнем Египте и Вавилоне. Например, при решении уравнений с двумя неизвестными, одно называлось “длиной”, другое -”шириной”. Произведение неизвестных называли “площадью”. В задачах, приводящих к кубическому уравнению, встречалась третья неизвестная величина - “глубина”, а произведение трех неизвестных именовалось “объемом”.

Древние египтяне и вавилоняне излагали свои алгебраические познания в числовой форме. Они не знали ни отрицательных чисел, ни, тем более комплексных и уравнения, не имеющие положительных корней ими не рассматривались. Все задачи и их решения излагались словесно.

Геометрический путь, несомненно, был гениальной находкой античных математиков. Но, к сожалению, он сдерживал дальнейшее развитие алгебры. Ведь геометрически можно выразить лишь первые степени (длины), квадратные (площади) и кубы (объемы), но не высшие степени неизвестных. Да и неизвестные в этом случае могут быть только положительными числами. Наконец, вместо алгебраических преобразований приходилось производить геометрические построения, часто очень громоздкие. Чтобы построить неизвестное, иногда нужно было быть подлинным виртуозом - это шло на пользу геометрии, но не алгебре.

Введение

Евклид все действия над рациональными числами описывал на «геометрическом» языке: сложение чисел объяснял как сложение отрезков, а их произведение выражал площадью прямых прямоугольника со сторонами, равными данным отрезкам. Так возникла называемая геометрическая алгебра.

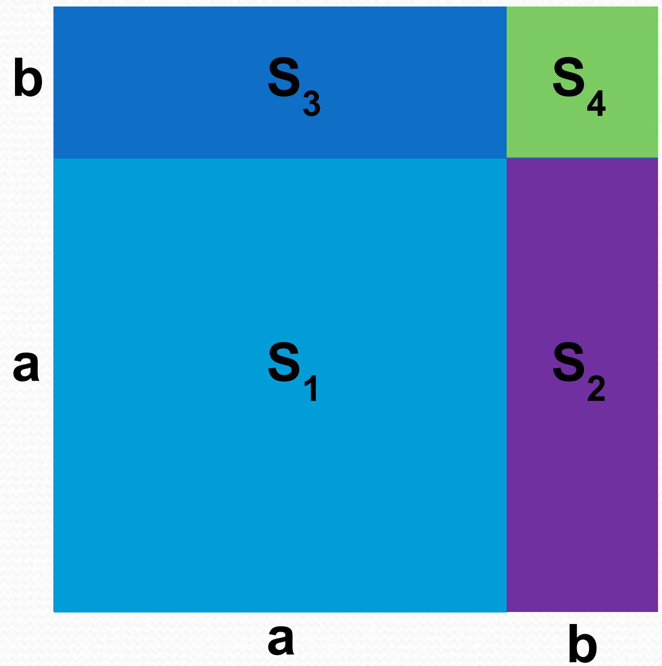
Числа в геометрической алгебре аналогичны отрезкам прямой, а произведение их аналогично площади геометрической фигуры (прямоугольника или квадрата).

Рассмотрим вывод формул сокращенного умножения, выполненный средствами геометрической алгебры. При этом, как будет показано, геометрические доказательства оказываются проще и нагляднее, чем соответствующие алгебраические.

Содержание

Геометрическое доказательство формулы $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

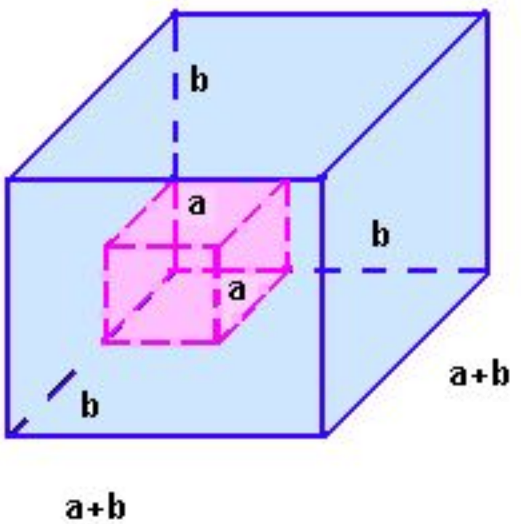
Построим квадрат со стороной а, его площадь $S_1 = a^2$.
Продолжим стороны квадрата на отрезок b, получим квадрат со стороной a+b, площадь которого $S = (a+b)^2$



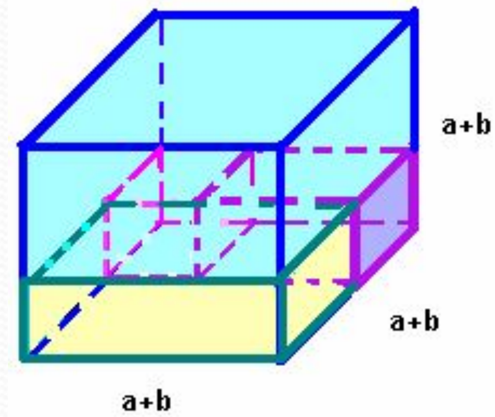
Вместе с тем,
площадь квадрата со стороной a+b (S) состоит
из площади квадрата со стороной a (S_1),
площади квадрата со стороной b (S_4) и
двух прямоугольников с площадями ab
(S_2, S_3).

Тогда $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$
или
$(a+b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

К содержанию



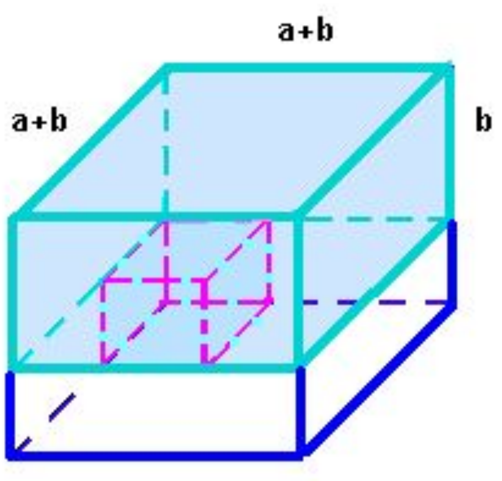
Геометрическое доказательство формулы $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

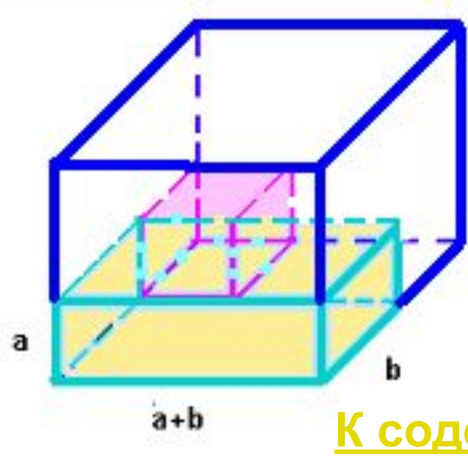


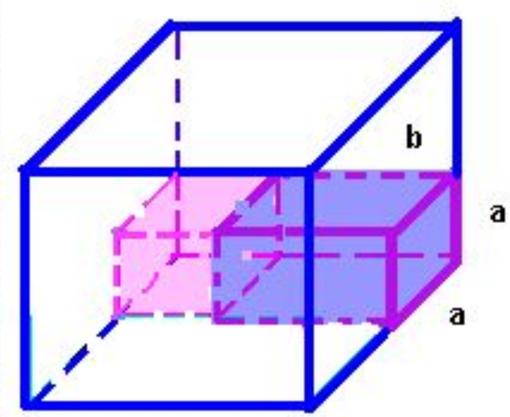
$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4$$

$$(a+b)^3 = a^3 + b(a+b)(a+b) + a(a+b)b + aab = a^3 + b(a^2+2ab+b^2)+aab+abb+aab=$$

$$a^3 + a^2b+ 2ab^2+ b^3 + a^2b+ ab^2 + a^2b=a^3 + 3a^2b+ 3ab^2+ b^3.$$



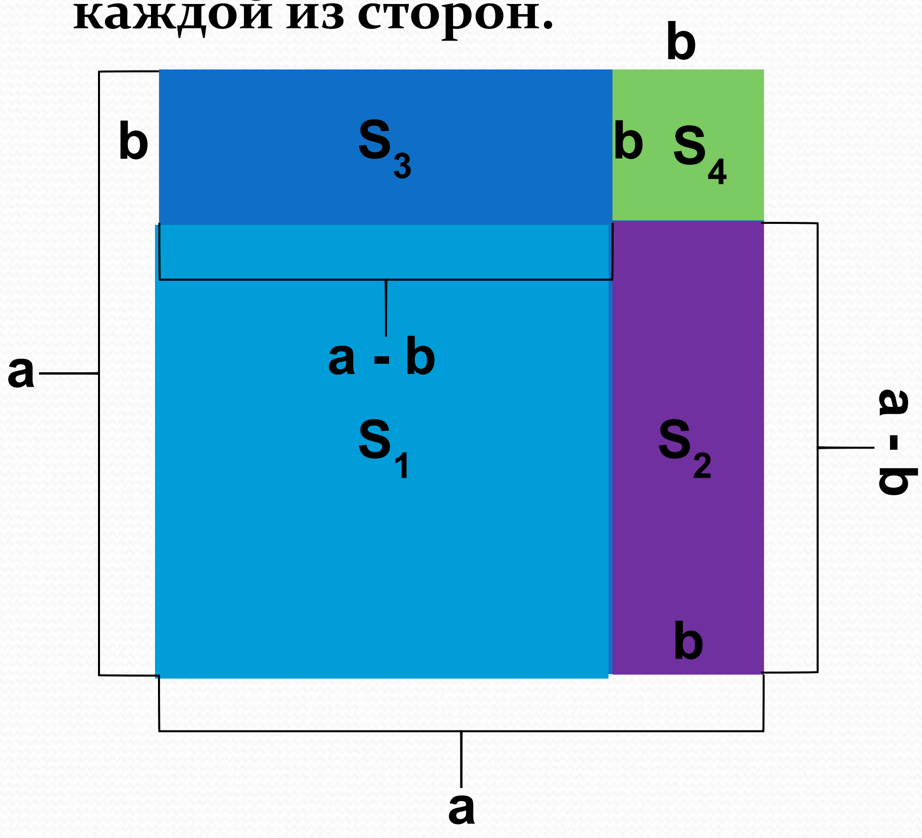




[К содержанию]

Геометрическое доказательство формулы $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

Построим квадрат со стороной a, его площадь $S = a^2$.
Отложим на сторонах квадрата отрезок b, получим квадрат со a-b, площадь которого $S_1 =(a-b)^2$
Проведем отрезки, соединяющие концы отрезков a-b и b на каждой из сторон.



Площадь квадрата со стороной a (S) состоит из площади квадрата со стороной a-b (S_1), площади квадрата со стороной b (S_4) и двух прямоугольников с площадями (a-b)b (S_2, S_3).

Тогда $S_1 = S - S_2 - S_3 - S_4$

или

$(a-b)^2 = a^2 - (a-b)b - (a-b)b - b^2 =$

$a^2 – ab + b^2 – ab + b^2 - b^2 =$

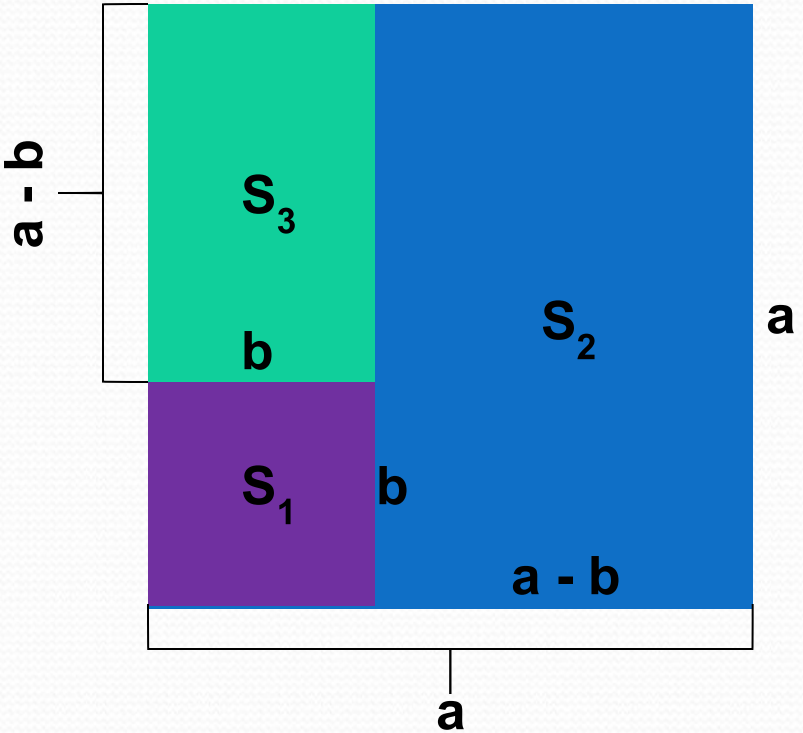
$a^2 - 2ab + b^2$.

К содержанию

Геометрическое доказательство формулы

$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

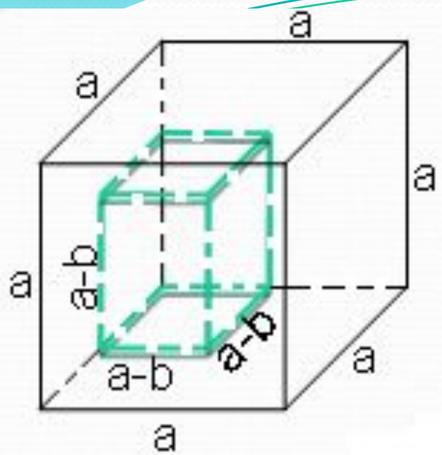
Построим квадрат со стороной a и разделим его на квадрат со стороной b и два прямоугольника со сторонами a-b, a и a-b, b, соответственно.

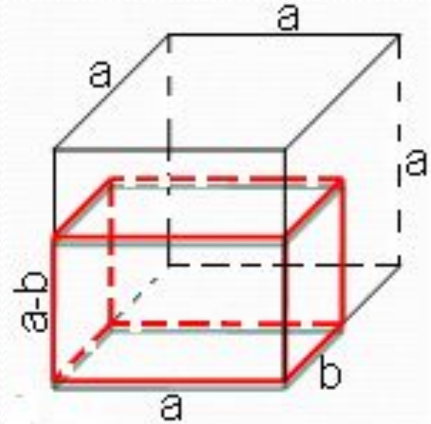


Площадь фигуры, определяемая как разность площади квадрата со стороной a (S) и площади квадрата со стороной b (S_1) равна сумме площадей прямоугольников со сторонами
a-b, a (S_2) и a-b, b (S_3).
Тогда $S - S_1 = S_2 + S_3$
или
$a^2 – b^2 = (a - b)a + (a - b)b = (a - b)(a + b)$.

К содержанию

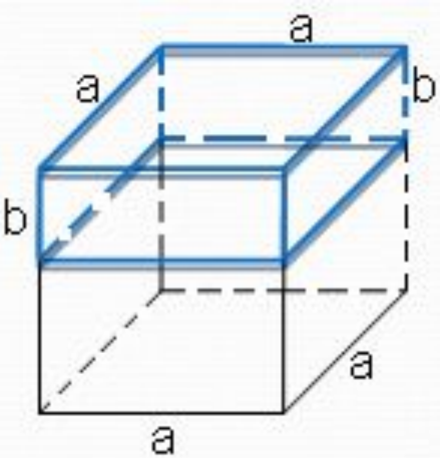
Геометрическое доказательство формулы $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$





$$V = V_1 - V_2 - V_3 - V_4$$

$$(a\text{-}b)^3 = a^3\text{-}baa\text{-}(a\text{-}b)ba\text{-}(a\text{-}b)(a\text{-}b)b =$$
$$= a^3\text{-}a^2b\text{-}(a^2b\text{-}b^2a)\text{-}(a^2\text{-}2ab+b^2)b =$$
$$= a^3\text{-}a^2b\text{-}a^2b+ab^2\text{-}a^2b+2ab^2\text{-}b^3 =$$
$$= a^3\text{-}3a^2b+3ab^2\text{-}b^3.$$



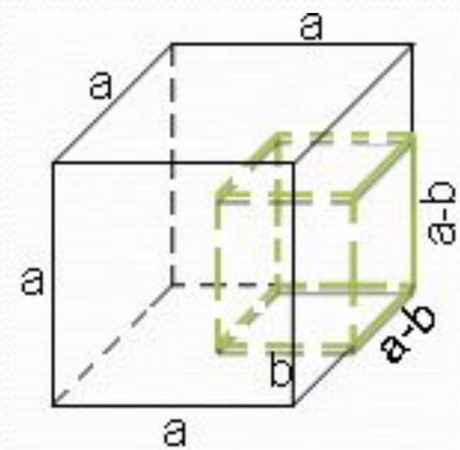
V – объем куба со стороной a-b

V1 – объем куба со стороной a

V2 –объем параллелепипеда a,b,a

V3- объем параллелепипеда a- b,b,a

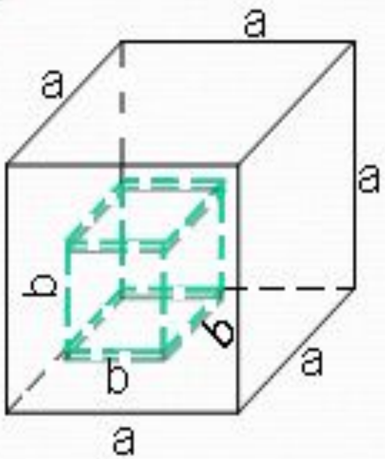
V4- объем параллелепипеда a- b, a- b, b



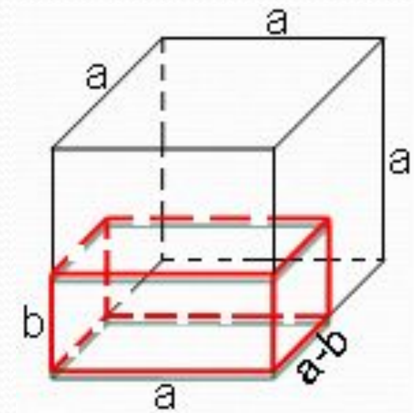
К содержанию

Геометрическое доказательство формулы

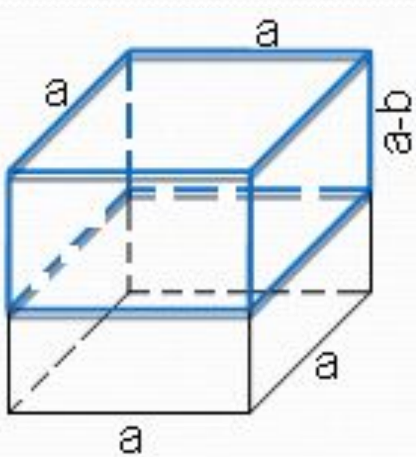
$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$



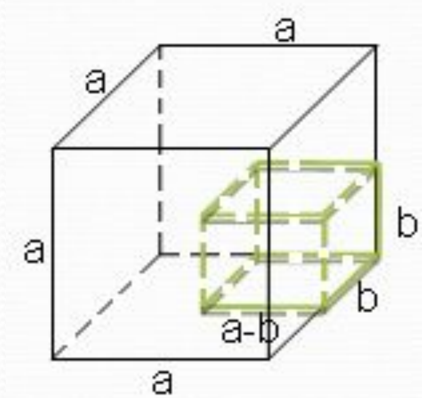
$$V_1 - V_2 = V_3 + V_4 + V_5$$



$$a^3 - b^3 = (a-b)aa + (a-b)ab + (a-b)bb =$$
$$= (a-b)(a^2+ab+b^2).$$

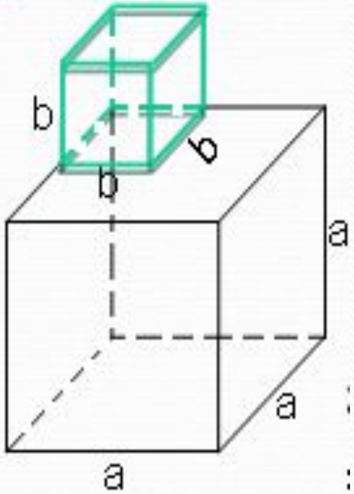


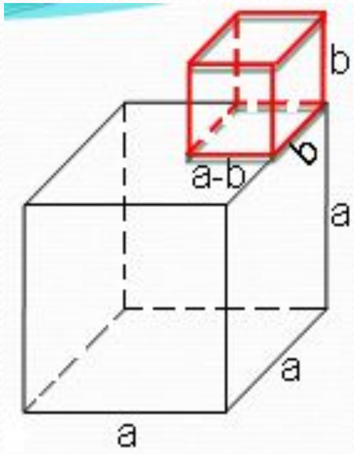
V1 – объем куба со стороной a
V2 - объем куба со стороной b
V3–объем параллелепипеда a- b,a, a
V4 - объем параллелепипеда a- b,b,a
V5 - объем параллелепипеда a- b,b, b



К содержанию

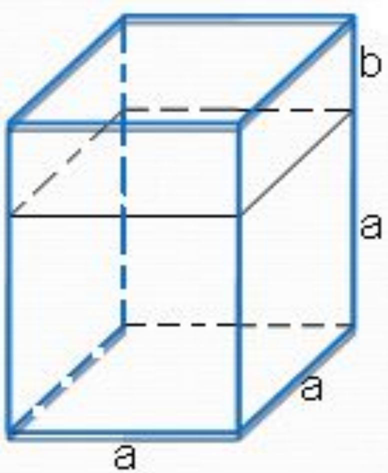
Геометрическое доказательство формулы $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

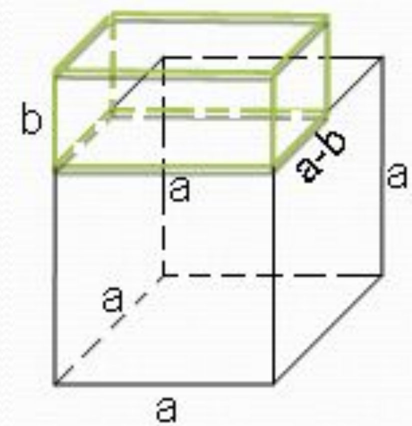




$$V_1 + V_2 = V_3 - V_4 - V_5$$

$$a^3+b^3 = (a+b)aa-(a-b)bb-(a-b)ab =$$
$$= a^2(a+b)-b^2(a-b)-ab(a-b) =$$
$$= a^2(a+b)-b(a-b)(a+b) =$$
$$= (a+b)(a^2-ab+b^2).$$





V1 – объем куба со стороной a
V2 - объем куба со стороной b
V3–объем параллелепипеда a+b,a, a
V4 - объем параллелепипеда a- b,b, b
V5 - объем параллелепипеда a- b,a, b

К содержанию

Выводы

1. Доказательство формул сокращенного умножения можно выполнить средствами геометрической алгебры.
2. Геометрические доказательства существенно проще и нагляднее, чем соответствующие алгебраические.
3. С помощью таких геометрических объектов, как отрезки, прямоугольники, параллелепипеды, удалось доказать формулы сокращенного умножения.

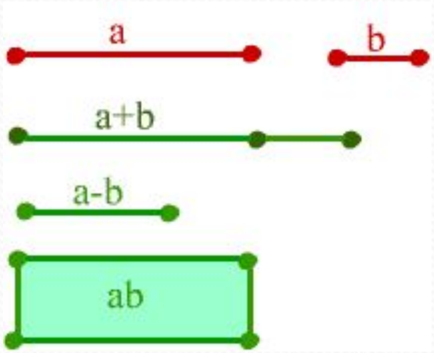
К содержанию

Информационные источники

- Рывкин А.А., Рывкин А.З., Хренов Л.С. Справочник по математике. М.: ВШ, 1975. – 554 с.
- http://mf.mgpu.ru/Materials/Geom_alg [Геометрическая алгебра].
- http://mf.mgpu.ru/Materials/Geom_alg [Агафонов В. В. Аналогия в математике].

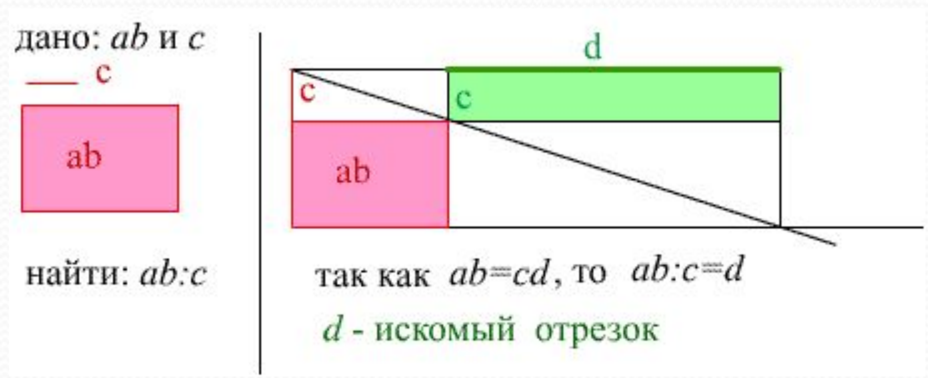
К содержанию

Геометрическая алгебра



Складывать можно было только однородные величины: отрезки с отрезками, прямоугольники с прямоугольниками. Во втором случае возникали трудности, ибо для объединения двух прямоугольников в один необходимо, чтобы у них была пара одинаковых сторон.

В геометрической алгебре величины стали изображать с помощью отрезков и прямоугольников.
Сложение отрезков осуществлялось путем приставления одного из них к другому вдоль прямой, *вычитание* - путем отсечения от большего отрезка части, равной меньшему отрезку.
Умножение осуществлялось путем построения прямоугольника на соответствующих отрезках.
Деление приводило к понижению размерности и выполнялось с помощью все того же “приложения площадей”.



К введению