

доказательство формул сокращенного умножения



Подготовил:
ученик 7Г класса
Дмитриев Виктор Андреевич
Научный руководитель:
Заслуженный учитель РФ,
к.п.н. Уласевич О.Н.

Номинация «Геометрические миниатюры»

Липецк, 2009

Цель проекта:

- изучение исторических аспектов темы;
- доказательство формул сокращенного умножения с помощью геометрии;
- изучение предмета геометрической алгебры;
- систематизация полученных данных;
- создание презентации.

Методы и приемы:

- анализ научной и исторической литературы по проблеме исследования,
- построение геометрических моделей доказательства формул сокращенного умножения,
- использование информационно-коммуникационных технологий,
- качественный анализ результатов.

Историческая справка

Использование геометрических чертежей как иллюстрации алгебраических соотношений встречалось еще в Древнем Египте и Вавилоне. Например, при решении уравнений с двумя неизвестными, одно называлось “длиной”, другое - “шириной”. Произведение неизвестных называли “площадью”. В задачах, приводящих к кубическому уравнению, встречалась третья неизвестная величина - “глубина”, а произведение трех неизвестных именовалось “объемом”.

Древние египтяне и вавилоняне излагали свои алгебраические познания в числовой форме. Они не знали ни отрицательных чисел, ни, тем более комплексных и уравнения, не имеющие положительных корней ими не рассматривались. Все задачи и их решения излагались словесно.

Геометрический путь, несомненно, был гениальной находкой античных математиков. Но, к сожалению, он сдерживал дальнейшее развитие алгебры. Ведь геометрически можно выразить лишь первые степени (длины), квадратные (площади) и кубы (объемы), но не высшие степени неизвестных. Да и неизвестные в этом случае могут быть только положительными числами. Наконец, вместо алгебраических преобразований приходилось производить геометрические построения, часто очень громоздкие. Чтобы построить неизвестное, иногда нужно было быть подлинным виртуозом - это шло на пользу геометрии, но не алгебре.

Введение

Евклид все действия над рациональными числами описывал на «геометрическом» языке: сложение чисел объяснял как сложение отрезков, а их произведение выражал площадью прямых прямоугольника со сторонами, равными данным отрезкам. Так возникла называемая геометрическая алгебра.

Числа в геометрической алгебре аналогичны отрезкам прямой, а произведение их аналогично площади геометрической фигуры (прямоугольника или квадрата).

Рассмотрим вывод формул сокращенного умножения, выполненный средствами геометрической алгебры. При этом, как будет показано, геометрические доказательства оказываются **проще и нагляднее**, чем соответствующие алгебраические.

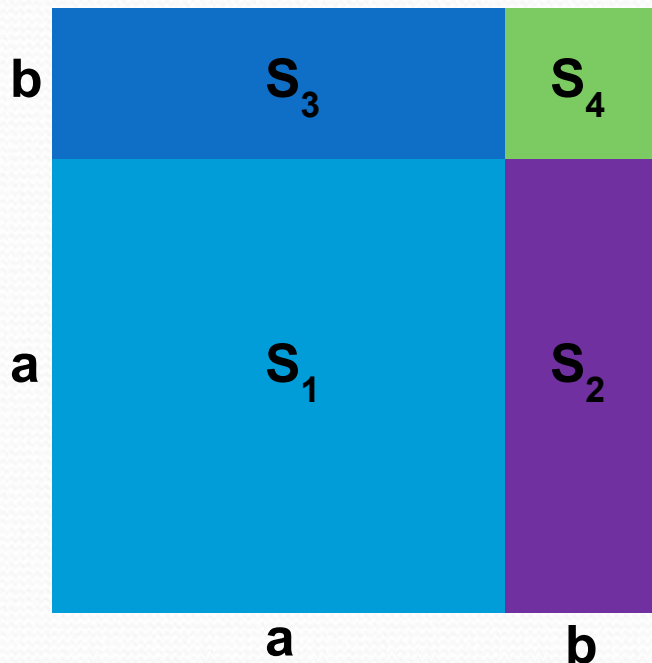
Содержание

1. Введение.
2. Историческая справка.
3. Доказательство формулы Доказательство формулы $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
4. Доказательство формулы $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
5. Доказательство формулы $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.
6. Доказательство формулы $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
7. Доказательство формулы $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.
8. Доказательство формулы $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.
9. Доказательство формулы $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$.
10. Выводы.

Геометрическое доказательство формулы $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Построим квадрат со стороной a , его площадь $S_1 = a^2$.

Продолжим стороны квадрата на отрезок b , получим квадрат со стороной $a+b$, площадь которого $S = (a+b)^2$



Вместе с тем,

площадь квадрата со стороной $a+b$ (S) состоит

из площади квадрата со стороной a (S_1), площади квадрата со стороной b (S_4) и двух прямоугольников с площадями ab (S_2, S_3).

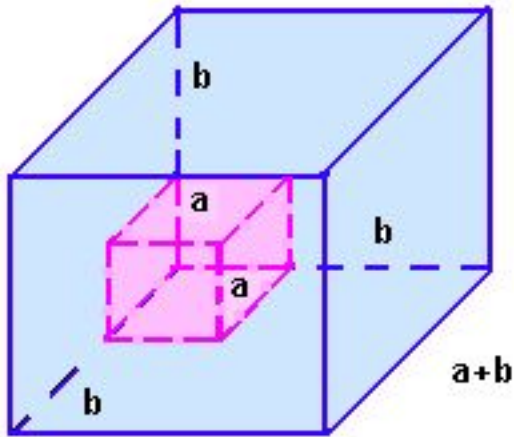
$$\text{Тогда } S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$$

или

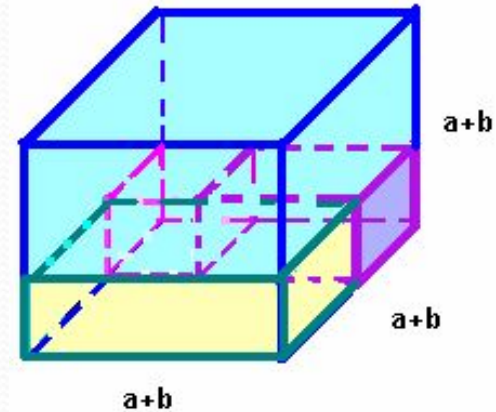
$$(a+b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

[К содержанию](#)

Геометрическое доказательство формулы $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

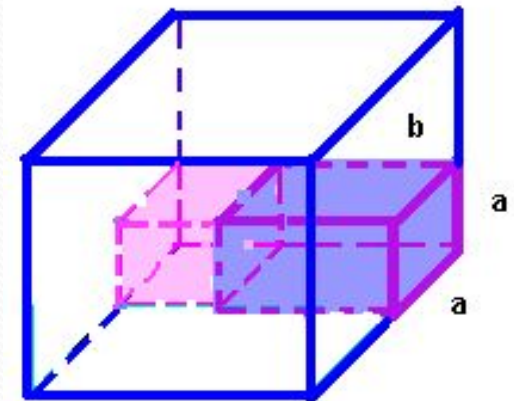
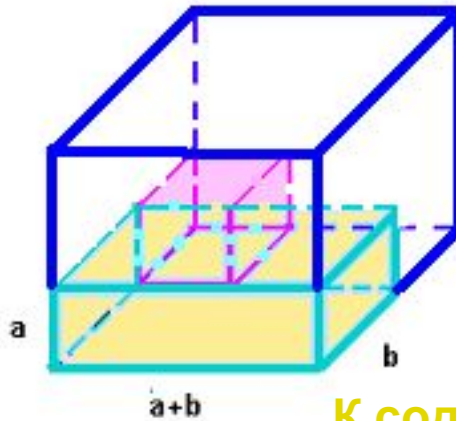
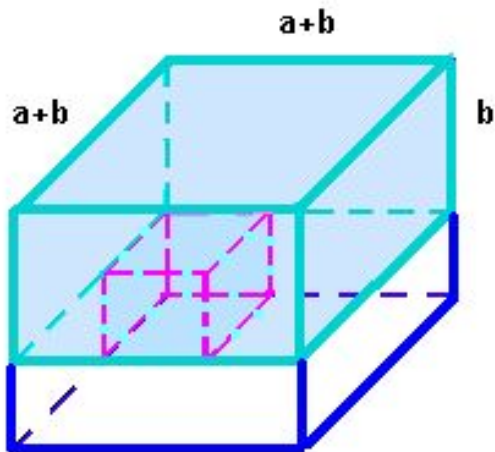


$a+b$



$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4$$

$$(a+b)^3 = a^3 + b(a+b)(a+b) + a(a+b)b + aab = a^3 + b(a^2 + 2ab + b^2) + aab + abb + aab = a^3 + a^2b + 2ab^2 + b^3 + a^2b + ab^2 + a^2b = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$



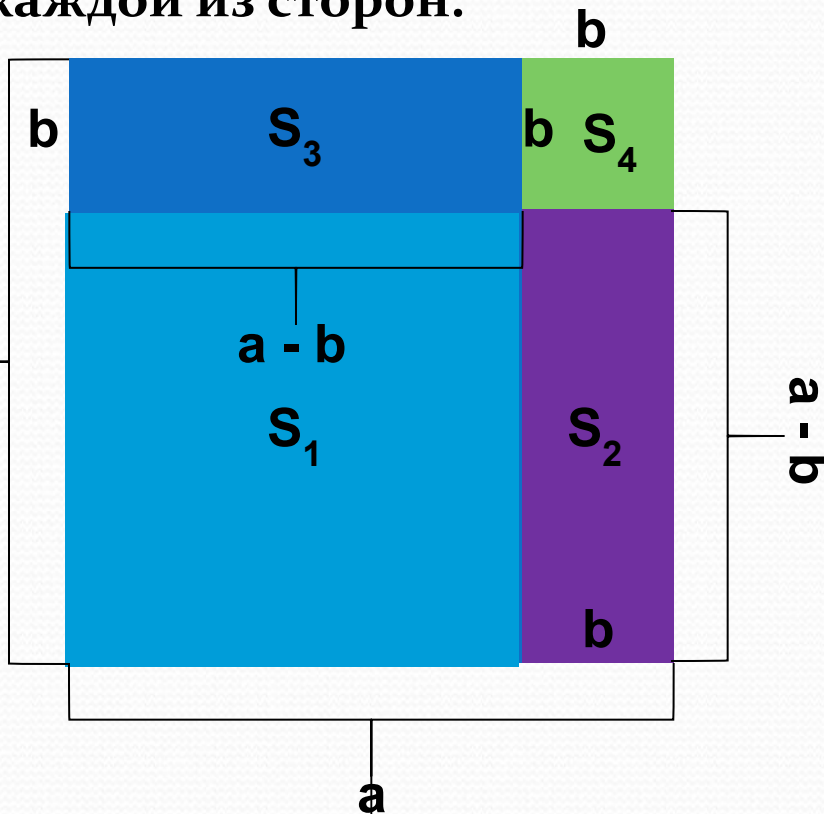
[К содержанию](#)

Геометрическое доказательство формулы $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Построим квадрат со стороной a , его площадь $S = a^2$.

Отложим на сторонах квадрата отрезок b , получим квадрат со стороной $a-b$, площадь которого $S_1 = (a-b)^2$

Проведем отрезки, соединяющие концы отрезков $a-b$ и b на каждой из сторон.



Площадь квадрата со стороной a (S) состоит из площади квадрата со стороной $a-b$ (S_1), площади квадрата со стороной b (S_4) и двух прямоугольников с площадями $(a-b)b$ (S_2, S_3).

$$\text{Тогда } S_1 = S - S_2 - S_3 - S_4$$

или

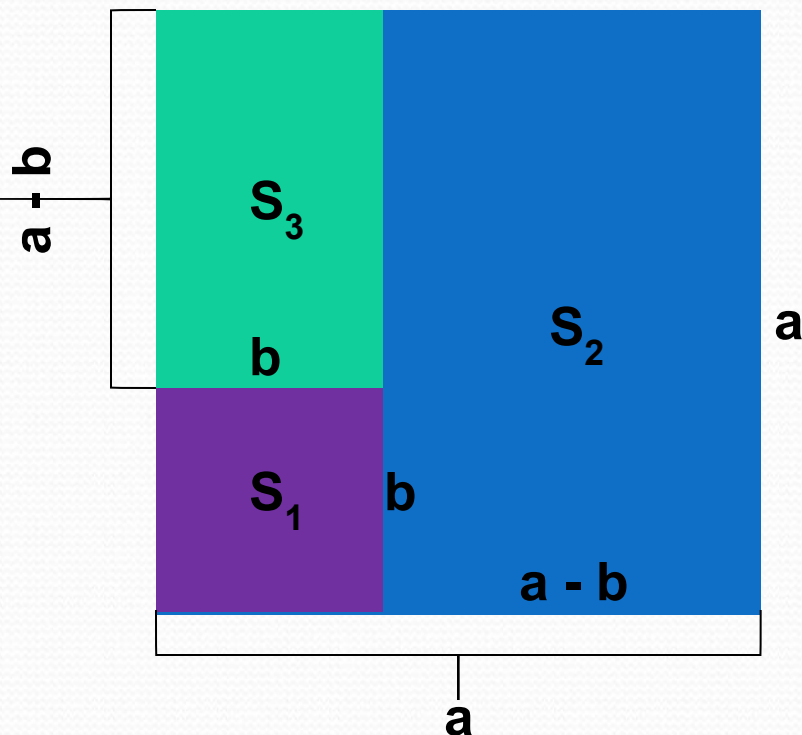
$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= a^2 - (a-b)b - (a-b)b - b^2 = \\ &= a^2 - ab + b^2 - ab + b^2 - b^2 = \\ &= a^2 - 2ab + b^2.\end{aligned}$$

[К содержанию](#)

Геометрическое доказательство формулы

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Построим квадрат со стороной a и разделим его на квадрат со стороной b и два прямоугольника со сторонами $a - b$, a и $a - b$, b , соответственно.



Площадь фигуры, определяемая как разность площади квадрата со стороной a (S) и площади квадрата со стороной b (S_1) равна сумме площадей прямоугольников со сторонами $a - b$, a (S_2) и $a - b$, b (S_3).

$$\text{Тогда } S - S_1 = S_2 + S_3$$

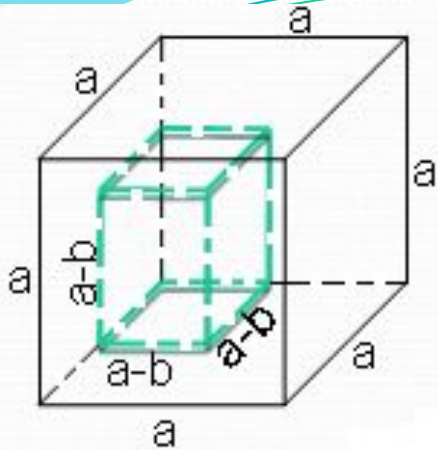
или

$$a^2 - b^2 = (a - b)a + (a - b)b = (a - b)(a + b).$$

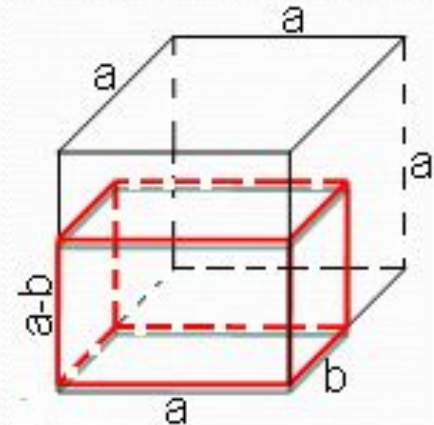
[К содержанию](#)

Геометрическое

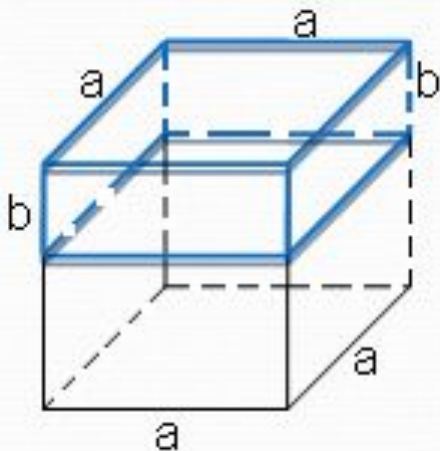
доказательство формулы $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$



$$V = V_1 - V_2 - V_3 - V_4$$



$$\begin{aligned} (a-b)^3 &= a^3 - \mathbf{baa} - \mathbf{(a-b)ba} - \mathbf{(a-b)(a-b)b} = \\ &= a^3 - a^2b - (a^2b - b^2a) - (a^2 - 2ab + b^2)b = \\ &= a^3 - a^2b - a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3 = \\ &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3. \end{aligned}$$



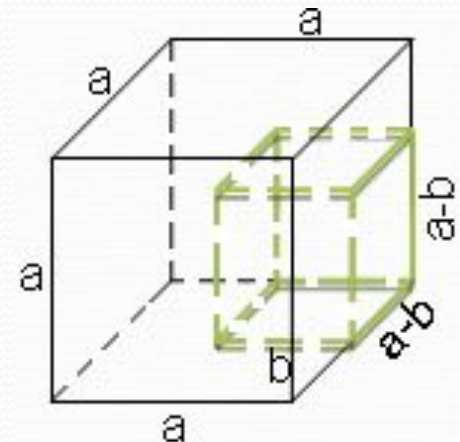
V – объем куба со стороной a-b

V1 – объем куба со стороной a

V2 – объем параллелепипеда a,b,a

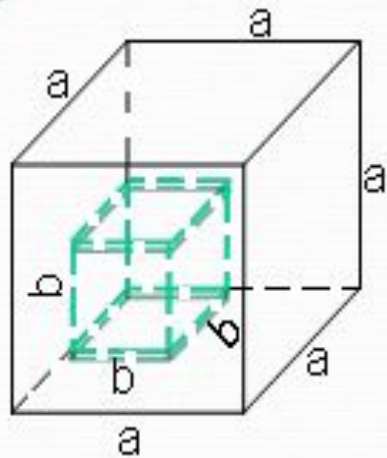
V3 – объем параллелепипеда a- b,b,a

V4 – объем параллелепипеда a- b, a- b, b

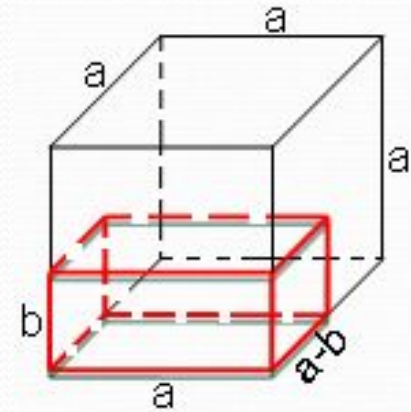


[К содержанию](#)

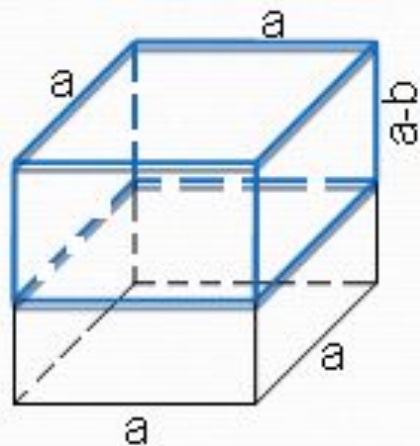
Геометрическое доказательство формулы $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$



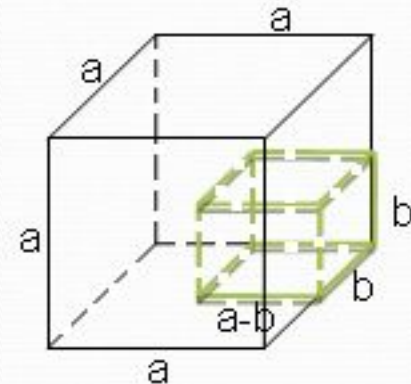
$$V_1 - V_2 = V_3 + V_4 + V_5$$



$$a^3 - b^3 = (a-b)aa + (a-b)ab + (a-b)bb = \\ = (a-b)(a^2 + ab + b^2).$$

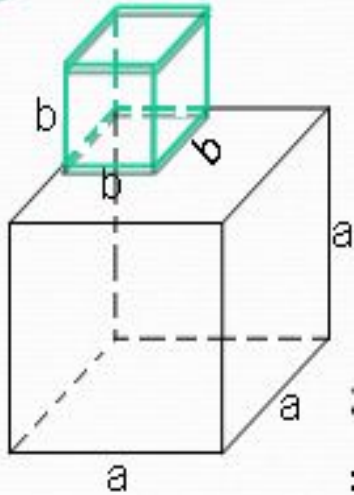


- V_1 – объем куба со стороной a
- V_2 - объем куба со стороной b
- V_3 – объем параллелепипеда $a - b, a, a$
- V_4 - объем параллелепипеда $a - b, b, a$
- V_5 - объем параллелепипеда $a - b, b, b$



[К содержанию](#)

Геометрическое доказательство формулы $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$



$$V_1 + V_2 = V_3 - V_4 - V_5$$

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 &= (a+b)aa - (a-b)bb - (a-b)ab = \\ &= a^2(a+b) - b^2(a-b) - ab(a-b) = \\ &= a^2(a+b) - b(a-b)(a+b) = \\ &= (a+b)(a^2 - ab + b^2). \end{aligned}$$

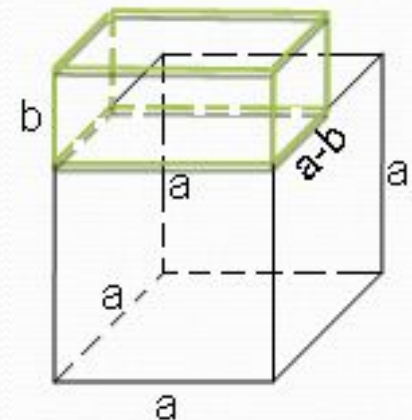
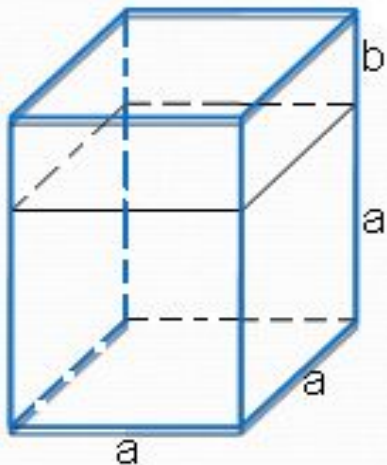
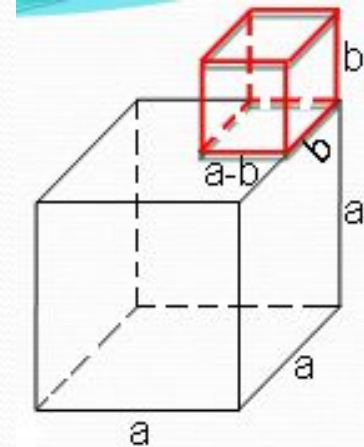
V1 – объем куба со стороной a

V2 - объем куба со стороной b

V3 – объем параллелепипеда $a+b, a, a$

V4 - объем параллелепипеда $a-b, b, b$

V5 - объем параллелепипеда $a-b, a, b$



[К содержанию](#)

Выводы

1. Доказательство формул сокращенного умножения можно выполнить средствами геометрической алгебры.
2. Геометрические доказательства существенно проще и нагляднее, чем соответствующие алгебраические.
3. С помощью таких геометрических объектов, как отрезки, прямоугольники, параллелепипеды, удалось доказать формулы сокращенного умножения.

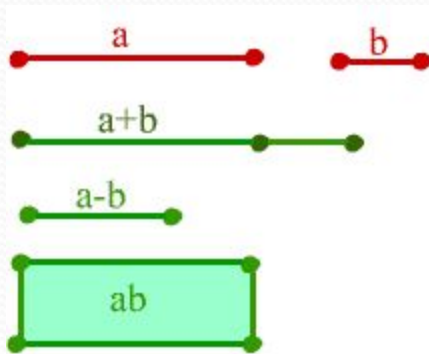


Информационные ИСТОЧНИКИ

- Рывкин А.А., Рывкин А.З., Хренов Л.С. Справочник по математике. М.: ВШ, 1975. – 554 с.
- http://mf.mgpi.ru/Materials/Geom_alg [Геометрическая алгебра].
- http://mf.mgpi.ru/Materials/Geom_alg [Агафонов В. В. Аналогия в математике].

[К содержанию](#)

Геометрическая алгебра



Складывать можно было только однородные величины: отрезки с отрезками, прямоугольники с прямоугольниками. Во втором случае возникали трудности, ибо для объединения двух прямоугольников в один необходимо, чтобы у них была пара одинаковых сторон.

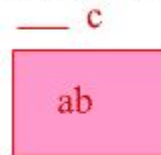
В геометрической алгебре величины стали изображать с помощью отрезков и прямоугольников.

Сложение отрезков осуществлялось путем приставления одного из них к другому вдоль прямой, *вычитание* - путем отсечения от большего отрезка части, равной меньшему отрезку.

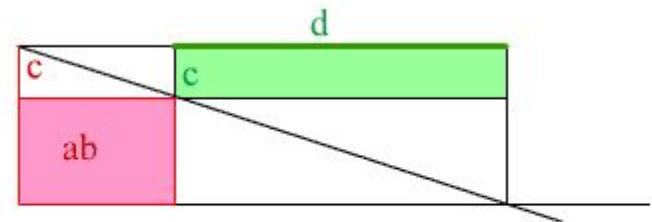
Умножение осуществлялось путем построения прямоугольника на соответствующих отрезках.

Деление приводило к понижению размерности и выполнялось с помощью все того же “приложения площадей”.

дано: ab и c



найти: $ab:c$



так как $ab = cd$, то $ab:c = d$

d - искомый отрезок

[К введению](#)