Томский политехнический университет

Ст. преп., к.ф.м.н.

Богданов Олег Викторович

Элементы теории вероятности

2010

Основные формулы комбинаторики

Число возможных **перестановок** множества из *n* элементов есть

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$$

Пример:

Сколько существует способов расстановки на полке 6 разных книг?

Если из ***n*** разных объектов по ***k*** разных объектов, то с учетом порядка следования полное число разных выборок будет определять формула

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

-число размещений без повторений.

Пример:

Сколько трехзначных чисел (без повторений) можно составить из чисел ***1,2,3,4,5***.

$$A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!}$$

Если в выборках из ***n*** объектов по ***k*** разных объектов порядок их следования по условию задачи не имеет значения, то используют формуле для числа сочетаний:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Пример:

Сколько комбинаций из трех монет можно собрать, имея пять разных монет:

$A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ -без учета порядка в комбинации

$C_n^k = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$ -с учетом порядка в комбинации

Понятие вероятности событий

Под событием понимают такой результат эксперимента или наблюдения, который при реализации данного комплекса условий может произойти или не произойти.

Различают достоверное, невозможное и случайное события.

Событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из событий А или В называют суммой событий. А+В

Событие, состоящее в наступлении обоих событий А или В называют произведением событий. А*В

Вероятностью события А называют отношение числа ***m*** благоприятных исходов, к числу ***n*** всех равновозможных несовместных элементарных исходов.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Пример:

Бросается игральная кость. Найти вероятность того, что выпадет не более четырех очков.

Общее число элементарных исходов n=6 (могут выпасть 1,2,3,4,5,6). Благоприятных исходов 4, соответственно, искомая вероятность:

$$P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Пример:

В урне имеются 15 шаров: 5 белых и 10 черных. Какова вероятность извлечь синий шар?

$$P(A) = \frac{0}{15} = 0$$

Пример:

В урне 10 шаров: 6 белых и 4 черных. Извлекли два шара. Какова вероятность того, что оба шара белые?

$$n = C_{10}^{2} = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 45 \qquad m = C_{6}^{2} = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15$$

$$P(A) = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$$

Теоремы сложения и умножения вероятностей

Теорема сложения вероятности. Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

Теорема умножения вероятностей. Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое имело место:

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B/A)$$

Для независимых событий

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$$

Пример:

В урне 10 белых, 15 черных, 20 синих и 25 красных шаров. Извлекли один шар. Какова вероятность того, что извлеченный шар красный, белый или черный?

1) Имеем n=10+15+20+25=70.
   P(К)=25/70=5/14.
2) Применив теорему сложения вероятностей, получим:
   P(Б+Ч)=P(Б)+P(Ч)=1/7+3/14=5/14.

Пример:

В первом ящике имеются 2 белых и 10 черных шаров, во втором 8 белых и 4 черных шара. Из каждого ящика извлекли по шару. Какова вероятность того, что оба шара белые?

События А и В - независимые. Речь идет о совмещении событий. Необходимо применить теорему умножения вероятностей: P(A*B)=P(A)*P(B)=2/3 * 8/12=1/6 * 2/3=1/9.

Пример:

В ящике имеются 6 белых и 8 черных шаров. Из ящика извлекли два шара (не возвращая извлеченный шар в ящик). Найти вероятность того, что оба шара белые.

Пусть событие А-появление белого шара при первом извлечении. В-при втором. По теореме умножения вероятностей в случае зависимых событий: $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B/A)$

P(A)=6/(6+8)=3/7,
P(B/A)=(6-1)/(6+8-1)=5/13.

P(AB)= 3/7 * 5/13=15/91.

Формула Бернулли.

Если проводится ***n*** независимых событий, в каждом из которых вероятность появления события ***A*** одна и та же и равна ***p*** ***(q=1-p)***, то вероятность того, что событие ***A*** появится в этих ***n*** испытаниях ***m*** раз, выражается формулой Бернулли.

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$$

Пример:

Определить вероятность того, что в семье, имеющей пять детей, будет три девочки и два мальчика. Вероятность рождения мальчика и девочки предполагаются одинаковыми.

$$P_5(3) = C_5^3 p^3 q^{5-3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3}(0,5)^3 \cdot (0,5)^2 = \frac{5}{16}$$

Пример:

Что вероятнее, выиграть у равносильного противника (ничейный исход партии исключен): три партии из четырех или пять партий из восьми?

Пример:

Что вероятнее, выиграть у равносильного противника (ничейный исход партии исключен): три партии из четырех или пять партий из восьми?

Для решения задачи можно использовать схему Бернулли:

$$P_4(3) = C_4^3 p^3 q^{4-3} = C_4^3 \frac{1}{2^4} = \frac{1}{4},$$

$$P_8(5) = C_8^5 p^5 q^{8-5} = C_8^5 \frac{1}{2^8} = \frac{7}{32},$$

$$\frac{1}{4} > \frac{7}{32}$$

Формула полной вероятности.

Пусть H_1, H_2,…, H_n — полная группа событий (события H_i называются гипотезами). Тогда вероятность любого события A может быть вычислена по формуле:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(H_i) P(A \setminus H_i)$$

Отметим свойство: $$\sum_{i=1}^{\infty} P(H_i) = 1$$

Пример:

Радиолампа может принадлежать к одной из трех партий с вероятностями $p_1=0,25$, $p_2=0,35$ и $p_3=0,40$. Вероятность того, что лампа проработает заданное число часов для этих партий, равны соответственно 0,1, 0,2 и 0,3. Определить вероятность того, что случайно взятая лампа проработает заданное число часов.

Введем обозначения:
А-лампа проработает заданное число часов.
H_1, H_2, H_3 -лампа принадлежит соответственно первой, второй или третьей партии. По условию задачи: $P(H_1)=p_1$, $P(H_2)=p_2$, $P(H_3)=p_3$

Тогда, $P(A)= P(H_1)P(A/H_1)+ P(H_2)P(A/H_2)+ P(H_3)P(A/H_3)=$
$=0,25*0,1+0,35*0,2+0,40*0,3=0,215$

Формула Байеса.

Пусть H_1, H_2 …— полная группа событий и A — некоторое событие положительной вероятности. Тогда условная вероятность того, что имело место событие H_k, если в результате эксперимента наблюдалось событие A, может быть вычислена по формуле:

$$P(H_k / A) = \frac{P(H_k)P(A \setminus H_k)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(H_i)P(A \setminus H_i)}$$

Пример:

Два стрелка подбрасывают монетку и выбирают, кто из них стреляет по мишени (одной пулей). Первый стрелок попадает по мишени с вероятностью 1, второй стрелок — с вероятностью 0,00001. Можно сделать два предположения об эксперименте:

H_1 = {стреляет 1-й стрелок}

H_2 = { стреляет 2-й стрелок } .

Вероятности этих гипотез одинаковы: $P(H_1) = P(H_2) = 1/2$.

Рассмотрим событие A = {пуля попала в мишень}. Известно, что $P(A\backslash H_1) = 1$, $P(A\backslash H_2) = 0{,}00001$

Поэтому вероятность пуле попасть в мишень $P(A) = 1/2*1 + 1/2*0{,}00001$. . Предположим, что событие А произошло. Какова теперь вероятность каждой из гипотез H_i? Очевидно, что первая из этих гипотез много вероятнее второй (а именно, в 100000 раз). Действительно,

$$P(H_1/A) = \frac{1/2*1}{1/2*1 + 1/2*0{,}00001} = \frac{1}{1 + 0{,}00001}$$

Пример:

Имеются три одинаковые по виду ящика. В первом ящике – 20 белах шаров, во втором – 10 белых и 10 черных шара, в третьем 20 черных шаров. Из выбранного наугад ящика извлекли белый шар. Вычислить вероятность того, что этот шар извлечен из первого ящика.

Пусть H_1 , H_2 , H_3 – гипотезы, состоящие в выборе соответственно первого второго и третьего ящика, событие А – появление белого шара. Тогда $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) =1/3$ (выбор любого ящика равновозможен).
$P(A \backslash H_1) = 1$ (вероятность извлечения белого шара из первого ящика); $P(A \backslash H_2) = 10/20=1/2$ (вероятность извлечения белого шара из второго ящика); $P(A \backslash H_3) = 0$ (вероятность извлечения белого шара из третьего ящика). Тогда искомая вероятность :

$$P(H_1 / A) = \frac{1/3*1}{1/3*1+1/3*1/2+1/3*0} = \frac{2}{3}$$

Спасибо за внимание