



Томский политехнический университет

Ст. преп., к.ф.м.н.

Богданов Олег Викторович

Элементы теории вероятности

2010



Основные формулы комбинаторики

Число возможных **перестановок** множества из n элементов есть

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = n!$$

Пример:



Сколько существует способов расстановки на полке 6 разных книг?

Если из n разных объектов по k разных объектов, то с учетом порядка следования полное число разных выборок будет определять формула

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

-число **размещений** без повторений.

Пример:



Сколько трехзначных чисел (без повторений) можно составить из чисел **1,2,3,4,5**.

$$A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!}$$

Если в выборках из n объектов по k разных объектов порядок их следования по условию задачи не имеет значения, то используют формуле для числа **сочетаний**:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Пример:



Сколько комбинаций из трех монет можно собрать, имея пять разных монет:

$$A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

-без учета порядка в комбинации

$$C_5^3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$$

-с учетом порядка в комбинации



Понятие вероятности событий

Под **событием** понимают такой результат эксперимента или наблюдения, который при реализации данного комплекса условий может произойти или не произойти.

Различают **достоверное**, **невозможное** и **случайное** события.

Событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из событий A или B называют **суммой** событий. $A+B$

Событие, состоящее в наступлении обоих событий A или B называют **произведением** событий. $A*B$

Вероятностью события A называют отношение числа m благоприятных исходов, к числу n всех равновозможных несовместных элементарных исходов.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Пример:



Бросается игральная кость. Найти вероятность того, что выпадет не более четырех очков.

Общее число элементарных исходов $n=6$ (могут выпасть 1,2,3,4,5,6).
Благоприятных исходов 4, соответственно, искомая вероятность:

$$P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Пример:



В урне имеются 15 шаров: 5 белых и 10 черных. Какова вероятность извлечь синий шар?

$$P(A) = \frac{0}{15} = 0$$

Пример:



В урне 10 шаров: 6 белых и 4 черных. Извлекли два шара. Какова вероятность того, что оба шара белые?

$$n = C_{10}^2 = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 45$$

$$m = C_6^2 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15$$

$$P(A) = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$$



Теоремы сложения и умножения вероятностей

Теорема сложения вероятности. Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

Теорема умножения вероятностей. Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое имело место:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B / A)$$

Для независимых событий

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

Пример:



В урне 10 белых, 15 черных, 20 синих и 25 красных шаров. Извлекли один шар. Какова вероятность того, что извлеченный шар красный, белый или черный?

1) Имеем $n=10+15+20+25=70$.

$$P(K)=25/70=5/14.$$

2) Применяв теорему сложения вероятностей, получим:

$$P(B+Ч)=P(B)+P(Ч)=1/7+3/14=5/14.$$

Пример:



В первом ящике имеются 2 белых и 10 черных шаров, во втором 8 белых и 4 черных шара. Из каждого ящика извлекли по шару. Какова вероятность того, что оба шара белые?

События А и В - независимые. Речь идет о совмещении событий. Необходимо применить теорему умножения вероятностей: $P(A*B)=P(A)*P(B)=2/3 * 8/12=1/6 * 2/3=1/9$.

Пример:



В ящике имеются 6 белых и 8 черных шаров. Из ящика извлекли два шара (не возвращая извлеченный шар в ящик). Найти вероятность того, что оба шара белые.

Пусть событие А-появление белого шара при первом извлечении. В-при втором. По теореме умножения вероятностей в случае зависимых событий: $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B / A)$

$$P(A) = 6 / (6 + 8) = 3 / 7,$$

$$P(B / A) = (6 - 1) / (6 + 8 - 1) = 5 / 13.$$

$$P(AB) = 3 / 7 * 5 / 13 = 15 / 91.$$



Формула Бернулли.

Если проводится n независимых событий, в каждом из которых вероятность появления события A одна и та же и равна p ($q=1-p$), то вероятность того, что событие A появится в этих n испытаниях m раз, выражается **формулой Бернулли**.

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$$

Пример:



Определить вероятность того, что в семье, имеющей пять детей, будет три девочки и два мальчика. Вероятность рождения мальчика и девочки предполагаются одинаковыми.

$$P_5(3) = C_5^3 p^3 q^{5-3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} (0,5)^3 \cdot (0,5)^2 = \frac{5}{16}$$

Пример:



Что вероятнее, выиграть у равносильного противника (ничейный исход партии исключен): три партии из четырех или пять партий из восьми?



Пример:



Что вероятнее, выиграть у равносильного противника (ничейный исход партии исключен): три партии из четырех или пять партий из восьми?

Для решения задачи можно использовать схему Бернулли:

$$P_4(3) = C_4^3 p^3 q^{4-3} = C_4^3 \frac{1}{2^4} = \frac{1}{4},$$

$$P_8(5) = C_8^5 p^5 q^{8-5} = C_8^5 \frac{1}{2^8} = \frac{7}{32},$$

$$\frac{1}{4} > \frac{7}{32}$$



Формула полной вероятности.

Пусть H_1, H_2, \dots, H_n — полная группа событий (события H_i называются гипотезами). Тогда вероятность любого события A может быть вычислена по формуле:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(H_i)P(A \setminus H_i)$$

Отметим свойство: $\sum_{i=1}^{\infty} P(H_i) = 1$

Пример:



Радиолампа может принадлежать к одной из трех партий с вероятностями $p_1=0,25$, $p_2=0,35$ и $p_3=0,40$. Вероятность того, что лампа проработает заданное число часов для этих партий, равны соответственно 0,1, 0,2 и 0,3. Определить вероятность того, что случайно взятая лампа проработает заданное число часов.

Введем обозначения:

A-лампа проработает заданное число часов.

H_1, H_2, H_3 -лампа принадлежит соответственно первой, второй или третьей партии. По условию задачи: $P(H_1)=p_1$, $P(H_2)=p_2$, $P(H_3)=p_3$

$$\begin{aligned} \text{Тогда, } P(A) &= P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3) = \\ &= 0,25*0,1 + 0,35*0,2 + 0,40*0,3 = 0,215 \end{aligned}$$



Формула Байеса.

Пусть H_1, H_2, \dots — полная группа событий и A — некоторое событие положительной вероятности. Тогда условная вероятность того, что имело место событие H_k , если в результате эксперимента наблюдалось событие A , может быть вычислена по формуле:

$$P(H_k / A) = \frac{P(H_k)P(A \setminus H_k)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(H_i)P(A \setminus H_i)}$$

Пример:



Два стрелка подбрасывают монетку и выбирают, кто из них стреляет по мишени (одной пулей). Первый стрелок попадает по мишени с вероятностью 1, второй стрелок — с вероятностью 0,00001. Можно сделать два предположения об эксперименте:

$H_1 = \{\text{стреляет 1-й стрелок}\}$

$H_2 = \{\text{стреляет 2-й стрелок}\}$.

Вероятности этих гипотез одинаковы: $P(H_1) = P(H_2) = 1/2$.

Рассмотрим событие $A = \{\text{пуля попала в мишень}\}$. Известно, что $P(A|H_1) = 1$, $P(A|H_2) = 0,00001$

Поэтому вероятность пуле попасть в мишень $P(A) = 1/2*1 + 1/2*0,00001$. . Предположим, что событие A произошло. Какова теперь вероятность каждой из гипотез H_i ? Очевидно, что первая из этих гипотез много вероятнее второй (а именно, в 100000 раз). Действительно,

$$P(H_1/A) = \frac{1/2*1}{1/2*1+1/2*0,00001} = \frac{1}{1+0,00001}$$

Пример:



Имеются три одинаковые по виду ящика. В первом ящике – 20 белых шаров, во втором – 10 белых и 10 черных шара, в третьем 20 черных шаров. Из выбранного наугад ящика извлекли белый шар. Вычислить вероятность того, что этот шар извлечен из первого ящика.

Пусть H_1 , H_2 , H_3 – гипотезы, состоящие в выборе соответственно первого второго и третьего ящика, событие A – появление белого шара. Тогда $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = 1/3$ (выбор любого ящика равновозможен).

$P(A|H_1) = 1$ (вероятность извлечения белого шара из первого ящика); $P(A|H_2) = 10/20 = 1/2$ (вероятность извлечения белого шара из второго ящика); $P(A|H_3) = 0$ (вероятность извлечения белого шара из третьего ящика). Тогда искомая вероятность :

$$P(H_1 / A) = \frac{1/3 * 1}{1/3 * 1 + 1/3 * 1/2 + 1/3 * 0} = \frac{2}{3}$$

Спасибо за внимание