

·  
·  
·  
·  
·  
·  
·  
·  
·  
·

# Геометрическое исследование решений ограниченной задачи трех тел

Прикладные аспекты



В.И. Прохоренко ИКИ РАН

<http://www.iki.rssi.ru/vprokhor/vprokhor.htm>

# Геометрическое исследование решений ограниченной задачи трех тел

## Прикладные аспекты

- Излагается геометрическая интерпретация решения ограниченной проблемы трех тел, полученного М.Л. Лидовым. Представление этого решения в специально выбранных цилиндрической и сферической системах координат открывает возможность придать ему более наглядную форму и сделать прозрачной его топологическую структуру.
- Дальнейший анализ с использованием разделения переменных позволяет лучше продемонстрировать роль начальных условий движения КА, что облегчает переход к прикладным аспектам, связанным с проектированием высоко-апогейных орбит КА с длительным временем существования с учетом возмущений от Луны и Солнца и конечного радиуса Земли.
- В качестве примера проводится анализ эволюции элементов орбиты и времени существования семейства орбит КА серии "Прогноз" и орбит КА проекта "Кластер" (Европейского Космического Агентства).

- 
- 
- 



*М. Л. Лидов. Эволюция орбит искусственных спутников планет под действием гравитационных возмущений внешних тел. Искусственные Спутники Земли. 1961. Вып. 8. С. 5-45*

# Интегралы

пространственной двукратно-осредненной  
ограниченной круговой задачи трех тел, полученные

М. Л. Лидовым

- $a = \text{const};$
- $c_1 = \varepsilon \cos^2 i;$
- $c_2 = (1-\varepsilon) (2/5 - \sin^2 \omega \sin^2 i).$

$a$  - большая полуось орбиты ИСЗ;

$\varepsilon = 1 - e^2$ ,  $e$  - эксцентриситет;

$i$  - наклонение орбиты ИСЗ к плоскости орбиты  
возмущающего тела;

$\omega$  - аргумент перигея, измеренный от линии узлов на  
плоскости возмущающего тела.

•  
•  
•

# Системы координат, используемые для геометрических исследований

## Цилиндрическая:

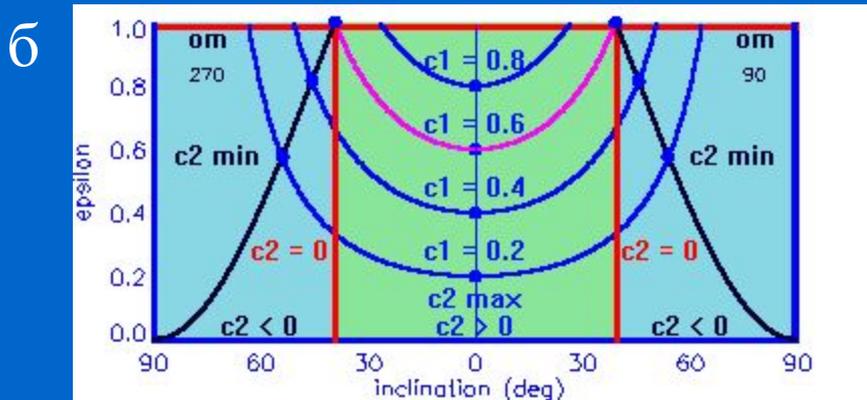
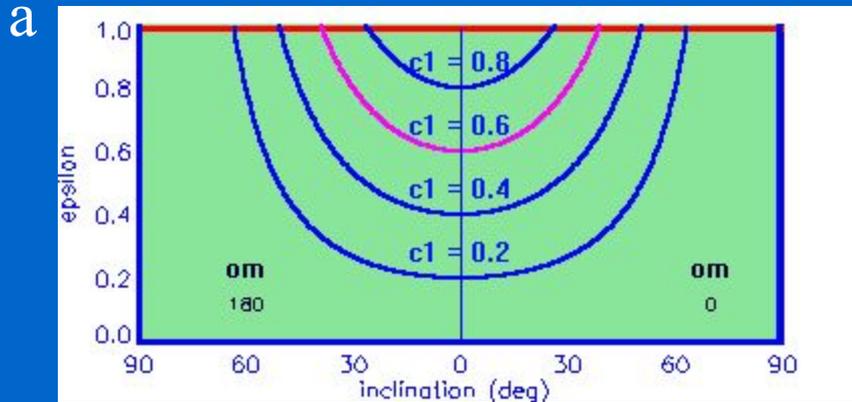
- полярный радиус - наклонение  $i$  ( $0 \leq i \leq 90^\circ$ );
- полярный угол - аргумент перигея  $\omega$  ( $0 \leq \omega \leq 360^\circ$ );
- координата  $z$  - параметр  $\varepsilon$  ( $0 \leq \varepsilon \leq 1$ ).

## Сферическая:

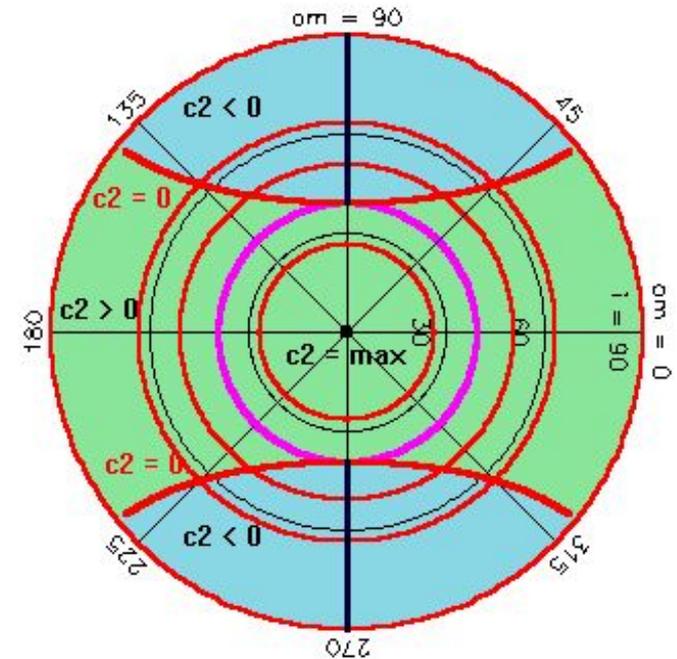
- радиус - параметр  $\varepsilon$  ( $0 \leq \varepsilon \leq 1$ );
- ко-широта - наклонение  $i$  ( $0 \leq i \leq 180^\circ$ );
- долгота - аргумент перигея  $\omega$  ( $0 \leq \omega \leq 360^\circ$ ).

- Геометрическое исследование в цилиндрической системе координат

## Семейство поверхностей $c1 = \text{const}$ (0,0.8,0.2)



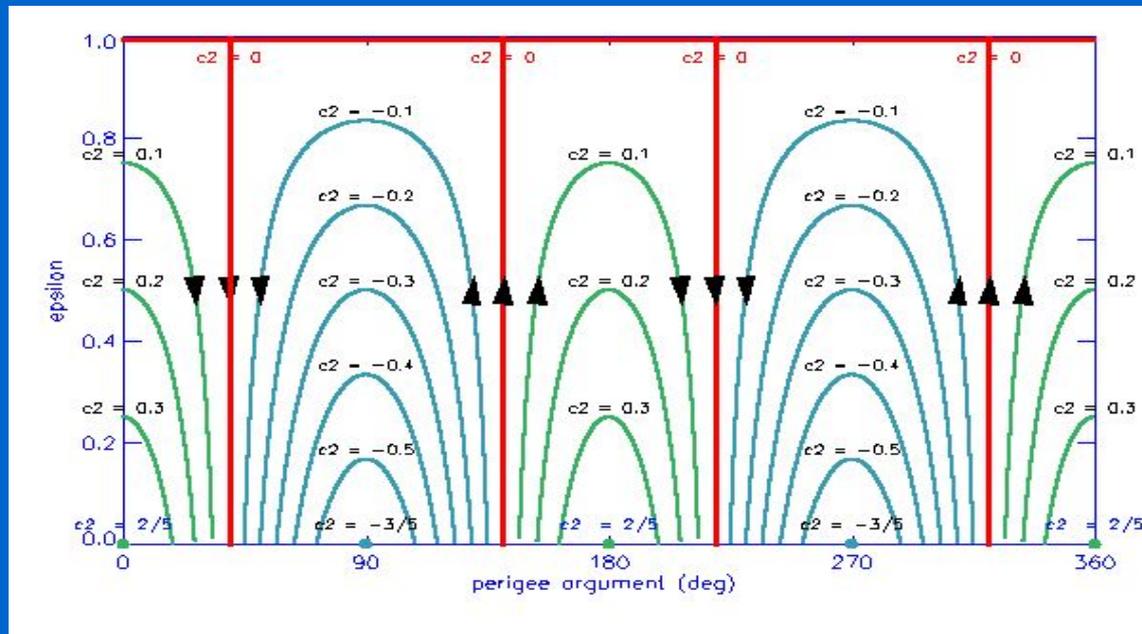
в



а) сечение плоскостью  $\omega = 0, 180^\circ$ ; б) плоскостью  $\omega = 90^\circ, 270^\circ$

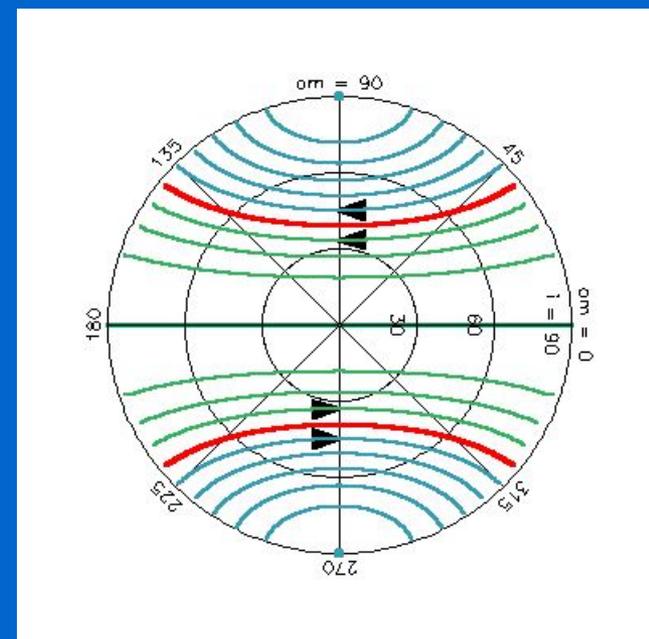
в) плоскость  $\epsilon = 1$

# Линии $c_2 = \text{const}$ на поверхности $c_1 = 0$ (плоскость, перпендикулярная к плоскости эклиптики)



← Развертка поверхности цилиндра ( вид изнутри)

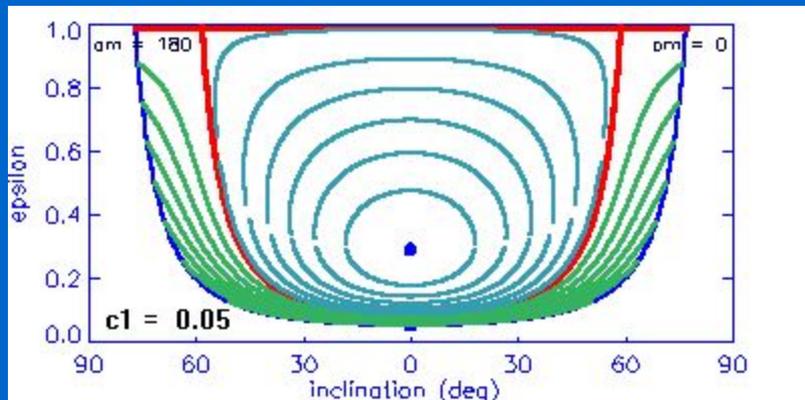
↓ Дно цилиндра ( $\epsilon = 0$ )



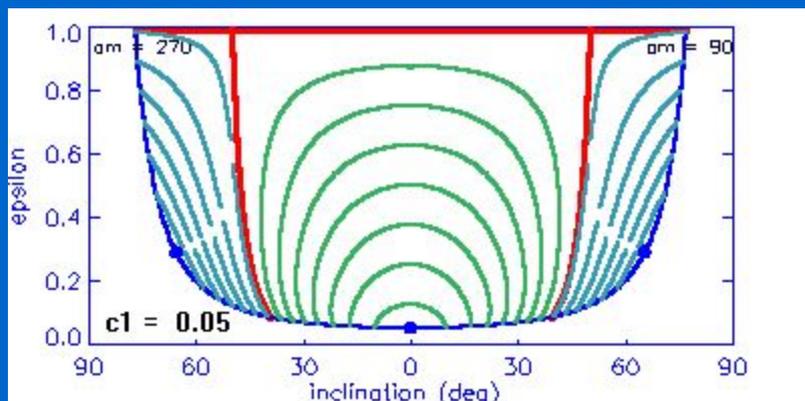
- Здесь и далее линия  $c_2 = 0$  показана красным цветом
- Линии  $c_2 < 0$  - зеленым цветом
- Линии  $c_2 > 0$  - голубым

# Линии $c_2 = \text{const}$ на поверхности: $c_1 = 0.05$

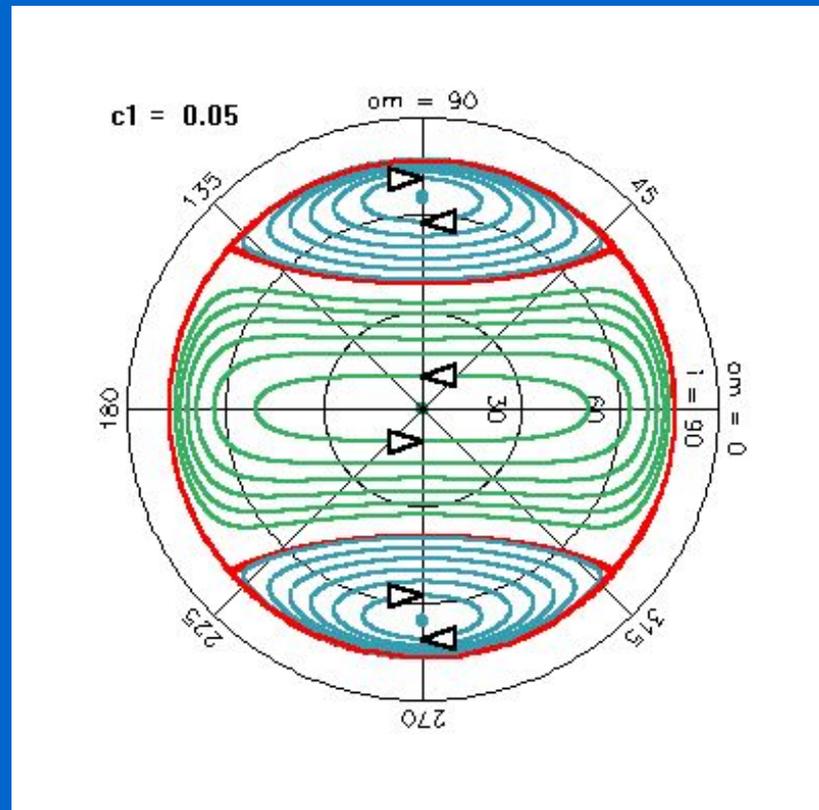
а



б



в

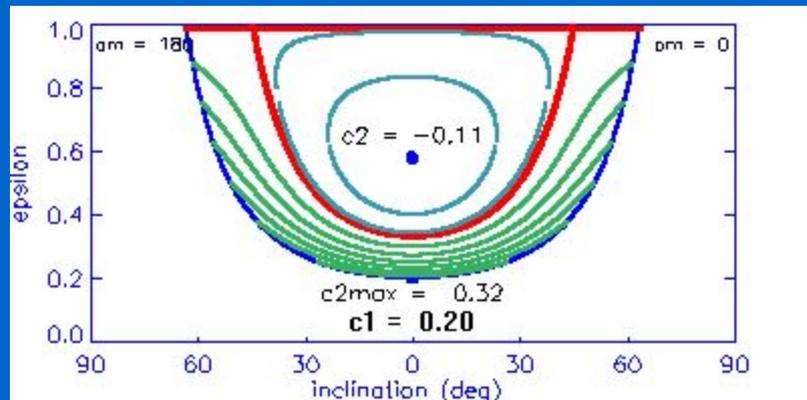


а) картинная плоскость  $\omega = 0, 180^\circ$ ; б)  $\omega = 90^\circ, 270^\circ$

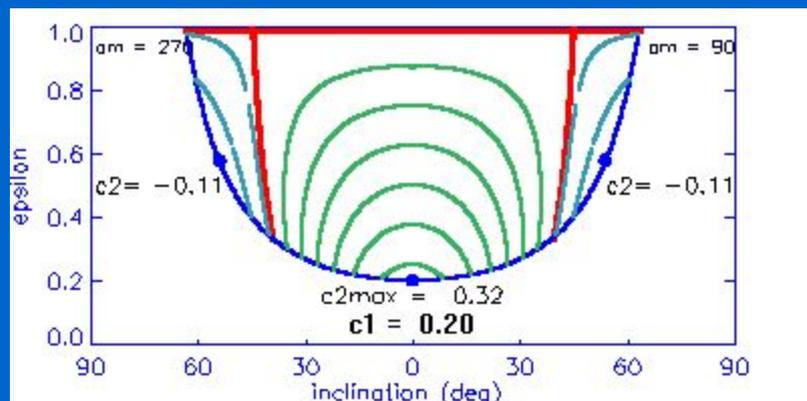
в) вид сверху

# Линии $c_2 = \text{const}$ на поверхности: $c_1 = 0.2$

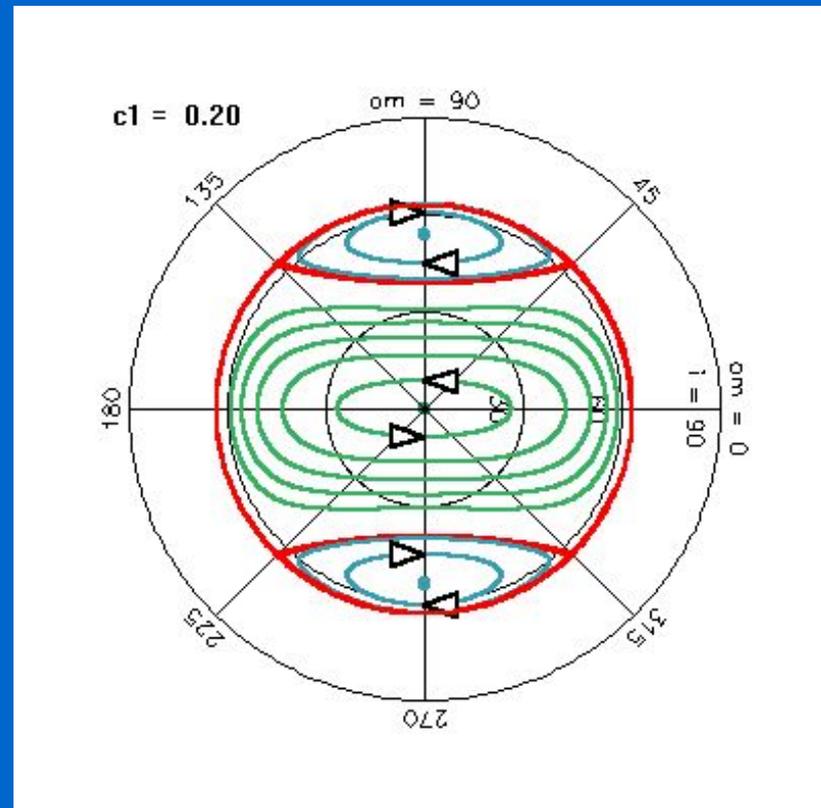
а



б



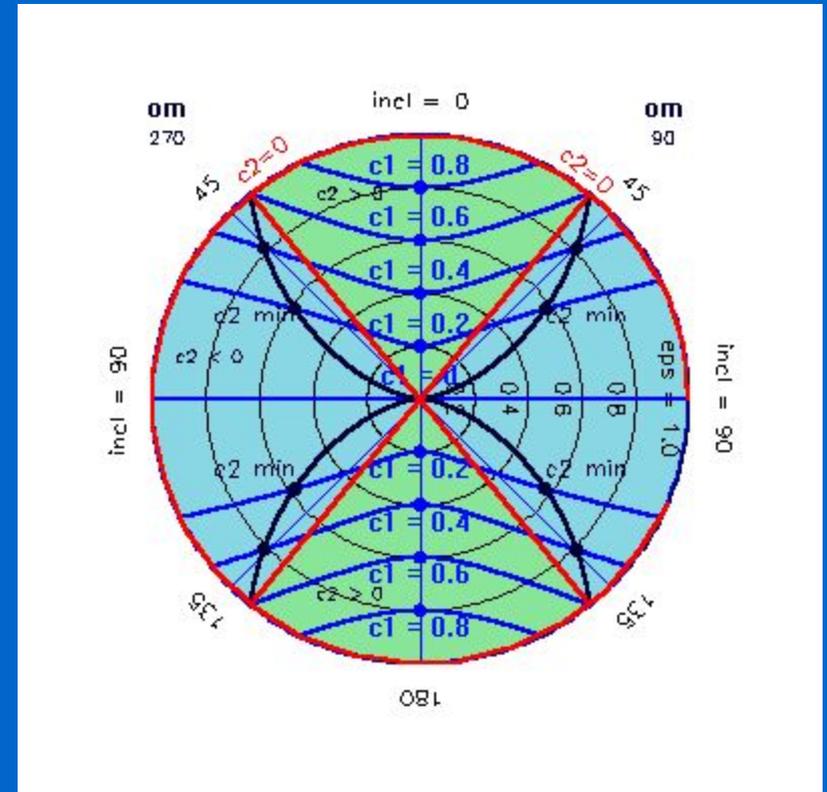
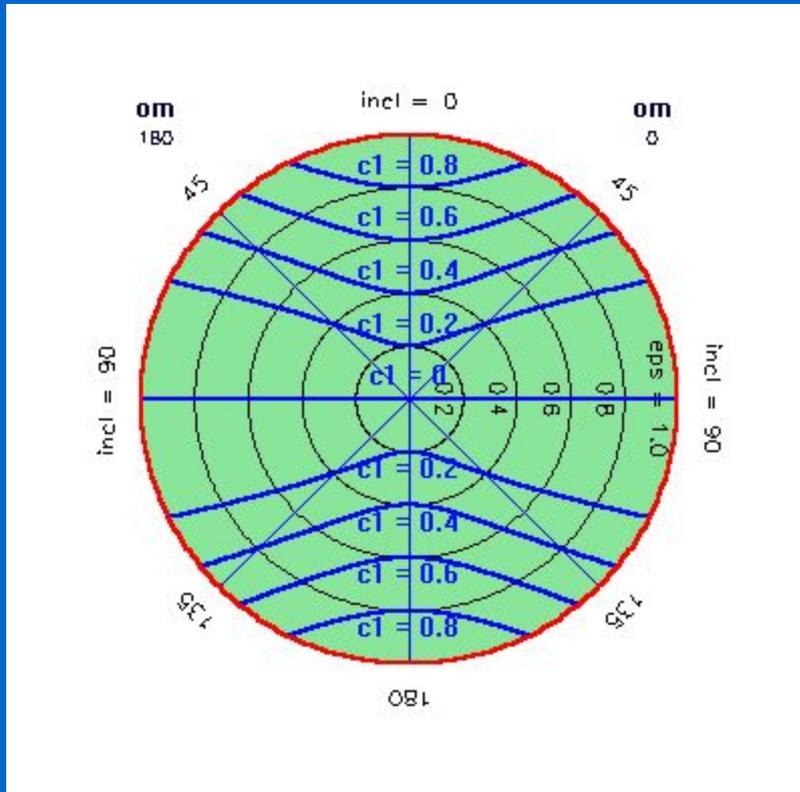
в



а) картинная плоскость  $\omega = 0, 180^\circ$ ; б)  $\omega = 90^\circ, 270^\circ$

в) вид сверху

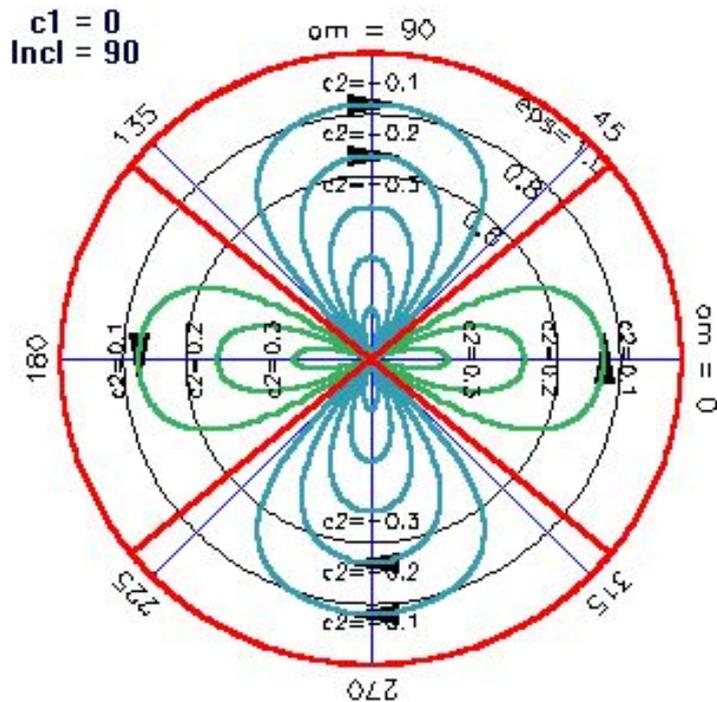
# Семейство поверхностей $c1 = \text{const}$ (0,0.8,0.2)



Показаны сечения двумя плоскостями:  $\omega = 0, 180^\circ$ ;  $\omega = 90^\circ, 270^\circ$

•  
•  
•

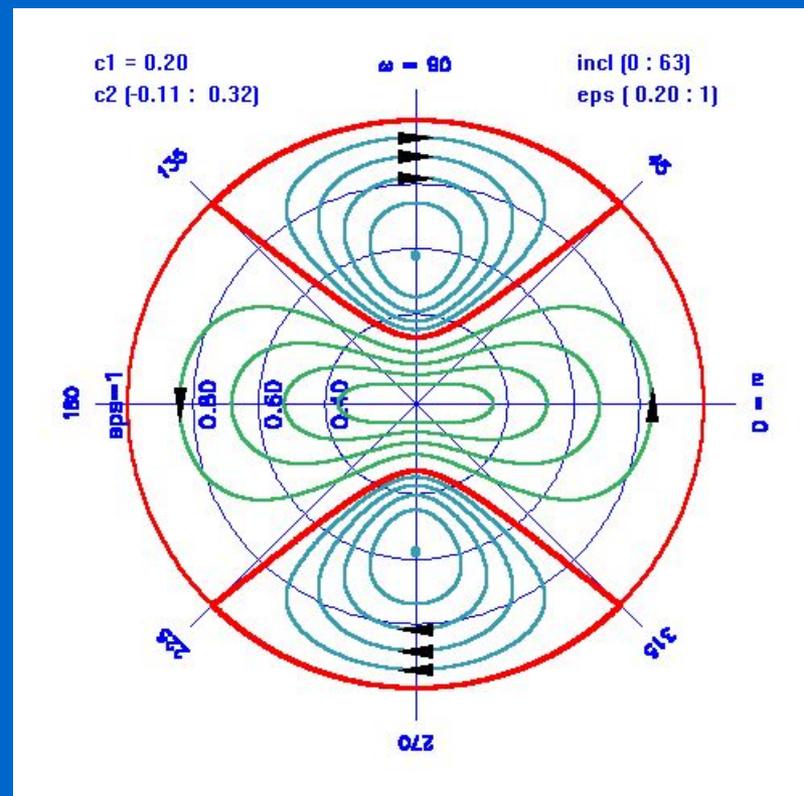
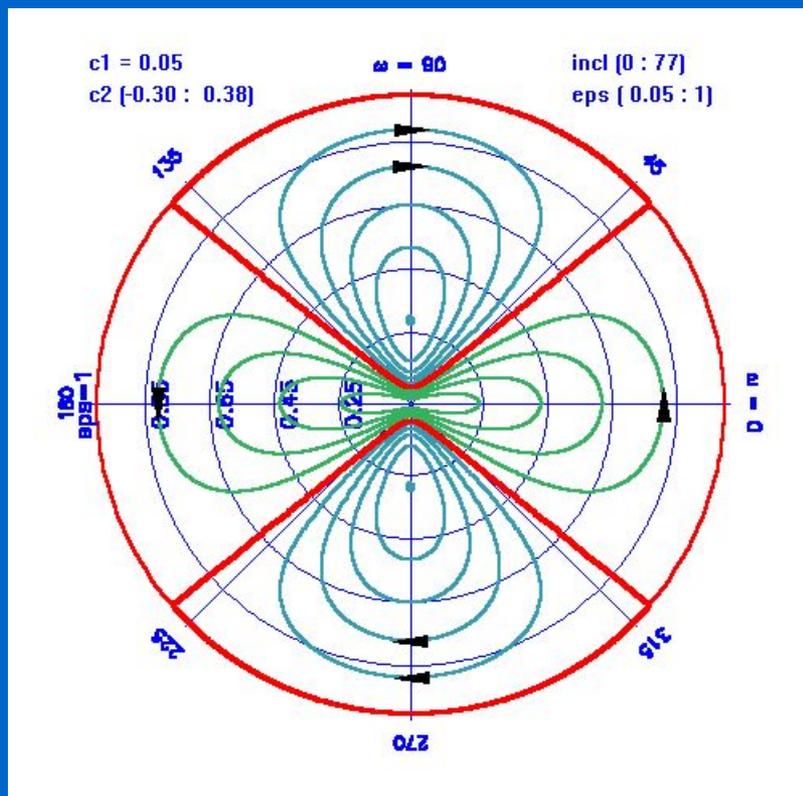
# Линии $c_2 = \text{const}$ на поверхности $c_1 = 0$ (плоскость, перпендикулярная к плоскости эклиптики)



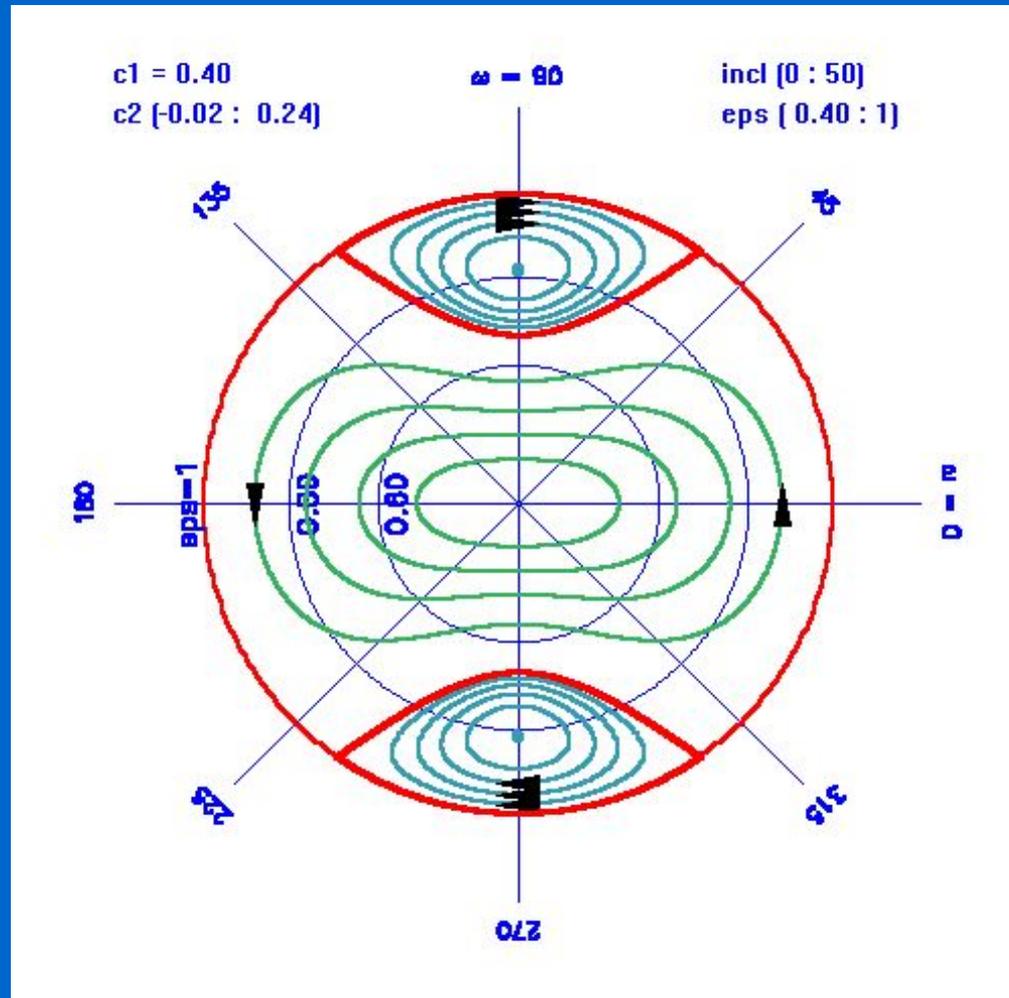
- Здесь и далее линия  $c_2 = 0$  показана красным цветом
- Линии  $c_2 < 0$  - зеленым цветом
- Линии  $c_2 > 0$  - голубым



# Линии $c_2 = \text{const}$ на поверхностях: $c_1 = 0.05, 0.2$



# Линии $c_2 = \text{const}$ на поверхности $c_1 = 0.4$





# Геометрическое исследование эволюции орбит ИСЗ серии ПРОГНОЗ



# Учет конечных размеров центрального тела

Баллистическое существование реальных ИСЗ прекращается при их соударении с центральным телом (Землей), имеющим конечный радиус  $R$ . Принимая минимальное значение высоты перигея  $R_p = R$ , получаем минимальное значение параметра  $\varepsilon_{\min}$ :

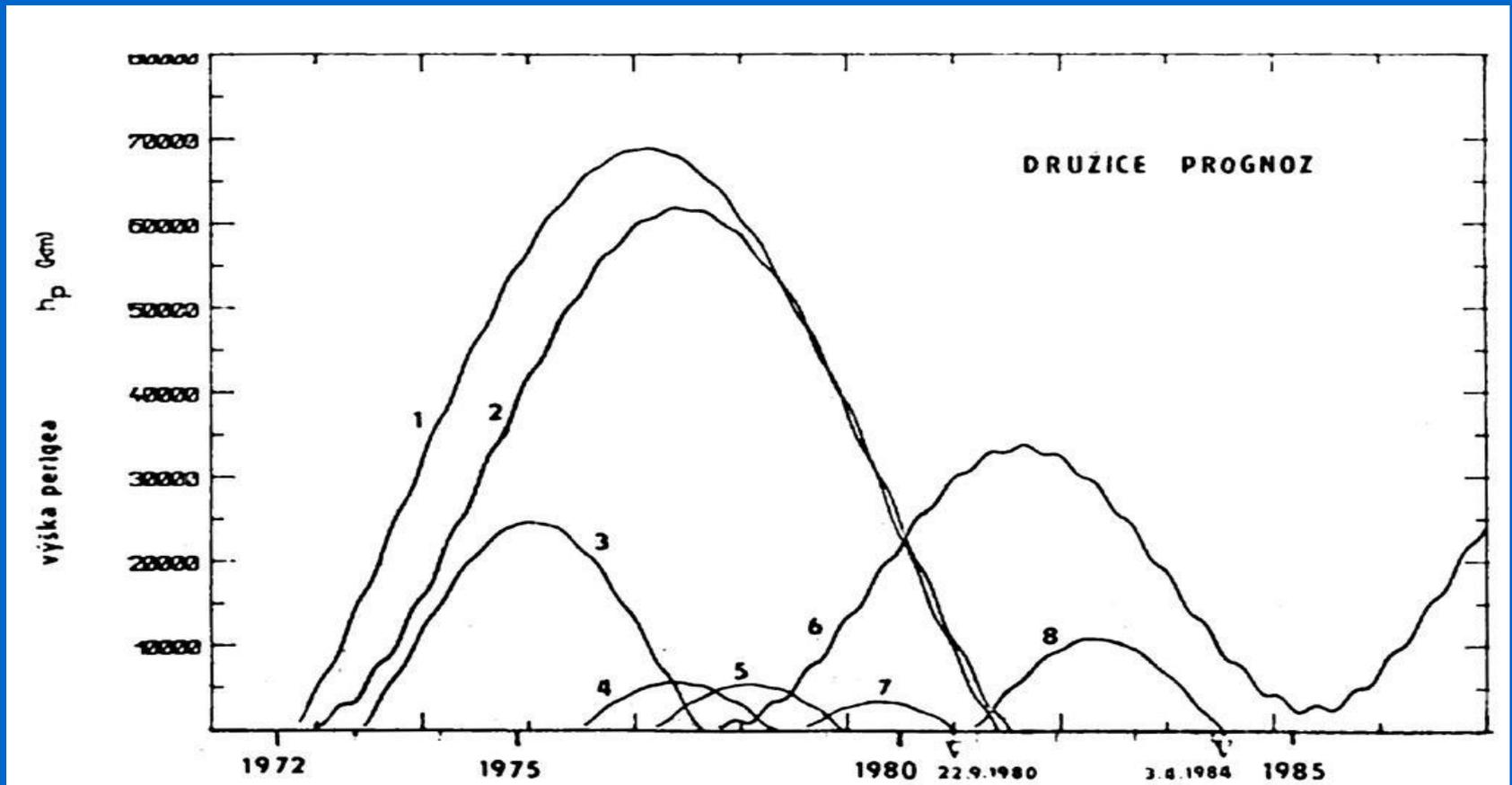
$$Ra = 2a - R; e = 1 - R/a; \varepsilon_{\min} = 1 - (1 - R/a)^2.$$

Для орбит серии ПРОГНОЗ  $\varepsilon_{\min} = 0.12$ .

На последующих рисунках минимальное значение  $\varepsilon$  показано черной окружностью.

• **Время существования**  
• **ИСЗ серии ПРОГНОЗ 1 - 8 (1972 - 1987)\***

*Показана эволюция высоты перигея (км) в функции времени с учетом гравитационных возмущений от Луны и Солнца*



\* Эти расчеты были выполнены в 1980  
в Астрономическом Институте Чешской Академии Наук

- 
- Соотношения между угловыми элементами орбиты измеряемыми относительно плоскостей земного экватора и эклиптики

$$\cos ie = \cos \Omega \sin i \sin \delta + \cos i \cos \delta ,$$

$$\omega e = \omega - \Delta\omega e,$$

$$\cos \Delta\omega e = (\sin i \cos \delta - \cos \Omega \cos i \sin \delta )/\sin ie,$$

знак  $\sin \Delta\omega e$  совпадает со знаком  $\sin \Omega$  ,

$i$ ,  $ie$  - наклонение,  $\omega$ ,  $\omega e$  - аргумент перигея,

$\Omega$  - прямое восхождение восходящего узла,

$\delta$  - угол между плоскостями эклиптики и земного экватора.



•  
•  
•

## Зависимость $\Omega$ от долготы точки старта, даты и времени старта

$$\Omega = \lambda + S_0 + \omega_E UT$$

- $\lambda$  - географическая долгота точки старта,
- $S_0$  - звездное время в гринвичскую полночь даты старта,
- $\omega_E$  - угловая скорость собственного вращения Земли,
- $UT$  - время старта

• Начальные значения орбитальных элементов  
и константы  $c_1, c_2$   
для орбит ИСЗ ПРОГНОЗ № 3, 4, 5, 7, 8  
( $c_1 < 0.001$ )

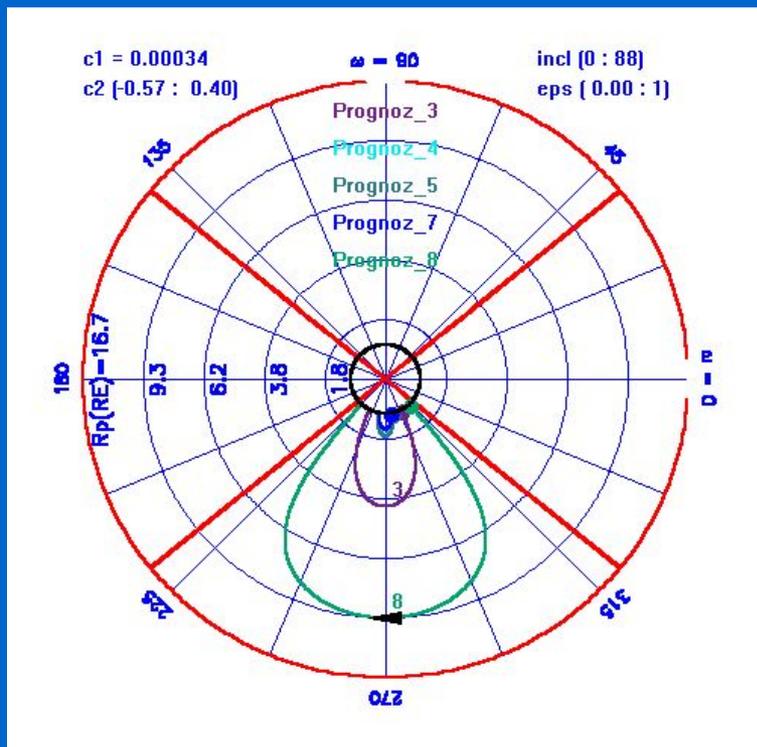
№	a	e	i	$\omega$	$\Omega$	ie	$\omega_e$	$c_1$	$c_2$
3	16.74	.93	65.0	290.0	198.0	87.0	296.9	0.00034	-0.34295
4	16.67	0.93	65.0	290.0	158.0	86.5	281.6	0.00047	-0.48529
5	16.66	0.94	65.0	290.0	160.0	86.8	282.3	0.00040	-0.48234
7	16.97	0.94	65.0	290.0	154.0	85.9	280.1	0.00061	-0.49502
8	16.66	0.93	65.0	309.0	189.9	87.7	312.9	0.00020	-0.11931

•  
 • Начальные значения орбитальных элементов  
 и константы  $c_1, c_2$   
 для орбит ИСЗ ПРОГНОЗ № 1, 2, 6, 10, 12  
 ( $0.07 > c_1 > 0.01$ )

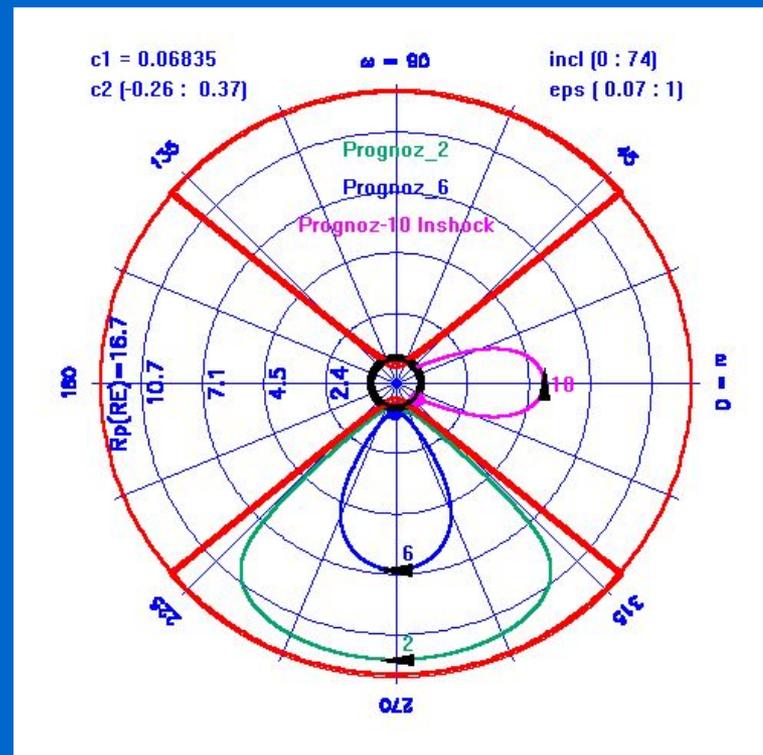
№	a	e	i	$\omega$	$\Omega$	ie	$\omega_e$	c1	c2
1	16.77	0.93	65.0	290.0	252.0	73.8	312.8	0.01035	-0.08394
2	16.74	0.94	65.0	290.0	10.00	42.5	284.2	0.06835	-0.02462
6	16.57	0.93	65.0	290.0	49.00	51.6	267.9	0.04861	-0.18627
10	16.75	0.94	65.0	310.0	336.7	44.4	322.8	0.06279	0.19345
12	16.12	0.93	62.9	314.2	260.8	68.7	338.7	0.01787	0.24658

# Линии с2 для орбит ИСЗ Прогноз 2-8 и 10, объединенных одинаковыми значениями с1

а)  $c1 = .00034$



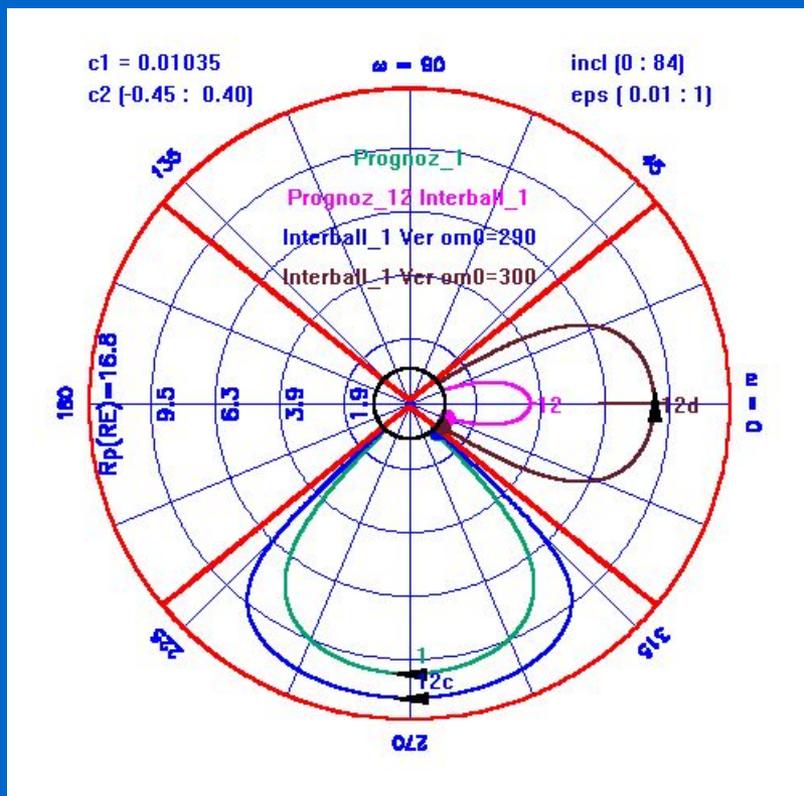
б)  $c1 = .068$



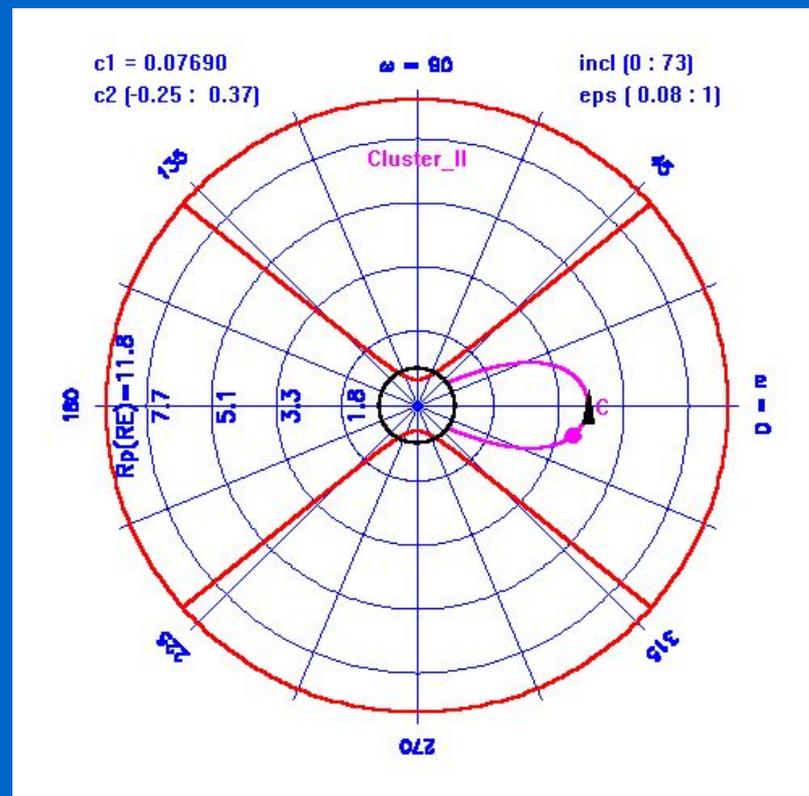
Здесь и далее геоцентрическое расстояние перигея использовано в качестве радиуса в сферической системе координат  $Rp = a(1 - e^2) / (1 + e)$ .

# Линии c2 для орбит ИСЗ ПРОГНОЗ 1, ИНТЕРБОЛ и CLUSTER II (ESA/NASA)

а)  $c1 = .01$



б) Cluster II,  $c1 = .07$ ,  $c2 = .17$



Положение начальной точки на линии c2 показано кружочком, направление обхода - стрелкой

# ПРОГНОЗ 6

Эволюция элементов орбиты на интервале времени  
(22.09.1977- 1.01.2013)

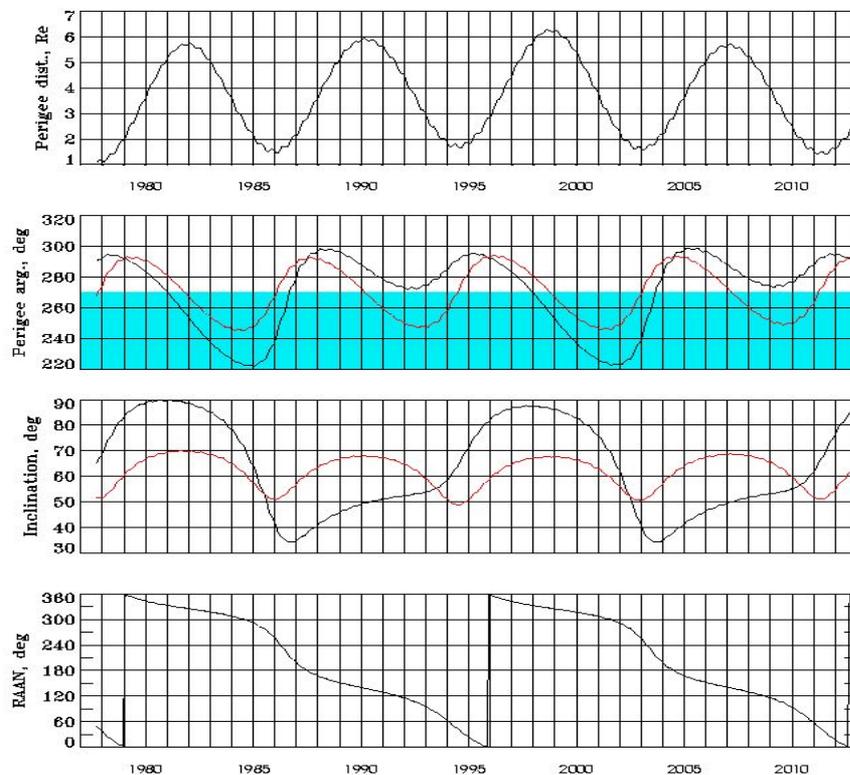
IKI - Satellite Situation Center (SSC)

PROGNOZ 6

Launch 22.09.1977, Ra = 31 Re, hp = 498 km, i = 65°,  $\Omega = 50^\circ$ ,  $\omega = 290^\circ$ , P = 4 d

Ballistic life-time and evolution of the orbital elements

(Red lines show orbital elements measured relatively to the ecliptic plane)



Численный расчет  
эволюции элементов  
орбиты с учетом  
гравитационных  
возмущений от Луны  
и Солнца

- Высота перигея
- Аргумент перигея
- Наклонение
- Прямое восхождение восходящего узла

Значения аргумента перигея и наклонения показаны как относительно плоскости земного экватора так и относительно плоскости эклиптики (линии красного цвета)

# ИНТЕРБОЛ 1

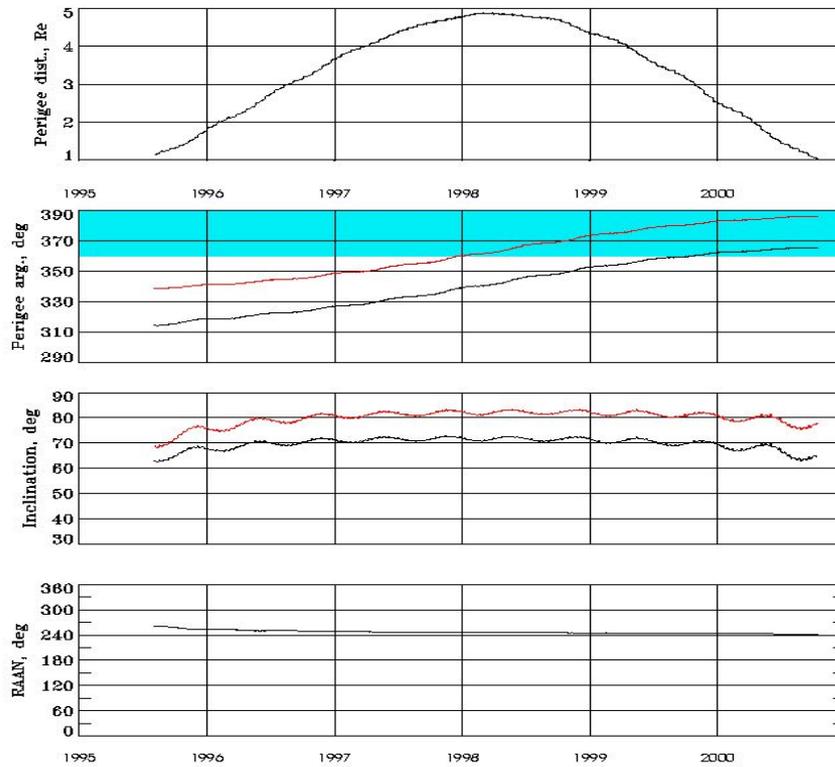
Эволюция элементов орбиты на интервале времени  
(03.08.1995- 16.10.2000)

IKI - Satellite Situation Center (SSC)

INTERBALL TAIL PROBE

Launch: 03.08.1995. Ra = 31 Re, hp = 800 km, i = 62.8°,  $\Omega = 261^\circ$ ,  $\omega = 314^\circ$ , P = 4 d

Ballistic life-time and evolution of the orbital elements  
(Red lines show orbital elements measured relatively to the ecliptic plane)



Численный расчет  
эволюции элементов  
орбиты с учетом  
гравитационных  
возмущений от Луны и  
Солнца

- Высота перигея
- Аргумент перигея
- Наклонение
- Прямое восхождение восходящего узла

Значения аргумента перигея и наклонения показаны как относительно плоскости земного экватора так и относительно плоскости эклиптики (линии красного цвета)

# Заклучение

- Разработан метод геометрического анализа решения ограниченной проблемы трех тел, полученного М.Л. Лидовым.
- Представлены результаты анализа топологической структуры частных решений, ориентированные на использование при проектировании высоко-апогейных орбит.
- Наглядно показано, что периодические решения, реализующиеся при  $C_2 < 0$ , характеризуются колебаниями линии апсид около значений аргумента перигея  $90^\circ$  (или  $270^\circ$ ) с амплитудой строго меньше  $90^\circ$ .
- Проведен анализ обит ИСЗ серии ПРОГНОЗ и проекта CLUSTER II (ESA/NASA), позволяющий установить связь между начальными параметрами орбит и временем их существования
- На основе численного интегрирования с использованием полной математической модели движения ИСЗ с учетом гравитационных возмущений от Луны и Солнца дана оценка эффективности аналитического метода, используемого при проектировании орбит.
- Выработаны рекомендации по выбору высоко-апогейных орбит с длительным временем существования.

- 
- 
- 

# Благодарность

Автор считает своим приятным долгом выразить благодарность профессору Б.И. Рабиновичу за ценные советы и полезные обсуждения в процессе выполнения этой работы.

# Павел Ефимович Эльясберг



Заведующий отдела Космической динамики и математической обработки данных ИКИ РАН (1968 - 1986), светлой памяти которого посвящается эта работа