Конференция
на тему:
задачи на переливание
и геометриеский способ
их решения.

Цель работы:

привить интерес школьников к решению логических задач, к поиску новых нестандартных способов решения таких задач, на примере задач на переливание.

Задачи:

1.Подобрать задачи на переливание (Осуществить подборку задач).
2.Разработать различные способы представления решений этих задач.
3.Сделать сравнительный анализ табличного и геометрического способов решения задач на переливание.
4.Сформулировать правила для нахождения решения задач на переливание.

Задача: Как разлить 600мл поровну, имея сосуды: в 150мл, 350мл и 600мл, причём воду нельзя выливать, а только переливать.

150мл	350мл	600мл
0	350	250
150	200	250
150	0	450
0	150	450
150	150	300
0	300	300

Задачи на переливание подразделяются на два типа:

1-ый тип: задачи, где дается один сосуд, наполненный жидкостью и два или более пустых разной емкости, с помощью которых необходимо разделить весь объем жидкости на две или более равные части. Причем выливать жидкость нельзя, а можно только переливать!

2-ой тип: задачи, где дается два пустых сосуда, с помощью которых нужно налить определенный объем жидкости, отличный от емкости сосудов. Причем воду можно выливать из сосудов полностью.

В задачах на переливание можно наполнять сосуд только полностью, а не частично!

Рассмотрим табличный способ на примере одной задачи.

Задача (десять вёдер кваса).

Имеются три бочонка вместимостью 6 вёдер, 3 ведра и 7 вёдер. В первом и третьем содержится соответственно 4 и 6 вёдер кваса. Требуется пользуясь только этими тремя бочонками разделить квас между первым и третьим бочонками поровну, т. е. по 5 вёдер.

Решение:

Первый способ:

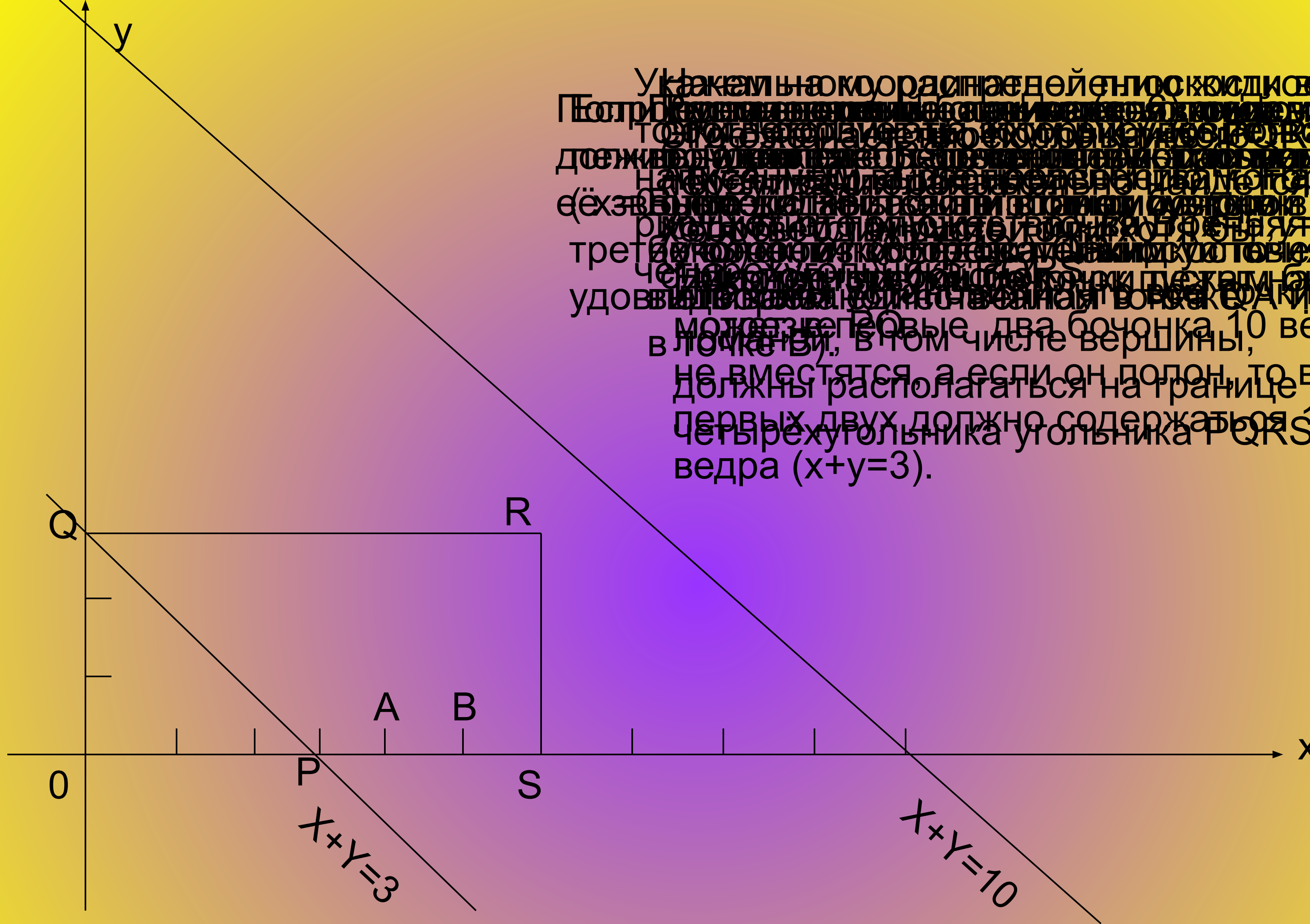
6 вёдер	3 ведра	7 вёдер
4	0	6
1	3	6
1	2	7
6	2	2
5	3	2
5	0	5

Второй способ:

6 вёдер	3 ведра	7 вёдер
4	0	6
4	3	3
6	1	3
2	1	7
2	3	5
5	0	5

Обозначим через X и Y количество жидкости, содержащейся после какого-либо переливания соответственно в первом и втором бочонках. При переливании общее количество жидкости не изменяется, т.е. всё время остаётся равным 4+6=10 вёдрам. Поэтому в третьем бочонке будет находиться 10-X-Y вёдер жидкости. Количество жидкости содержащейся в бочонке, не может быть больше объёма бочонка. Мы видим, что числа X, Y удовлетворяют таким условиям:

$$\begin{cases} 0 \le x \le 6, \\ 0 \le y \le 3, \\ 0 \le 10 - x - y \le 7 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 0 \le x \le 6, \\ 0 \le y \le 3 \\ 3 \le x + y \le 10 \end{cases}$$



не вместятся, а если он полон, то в

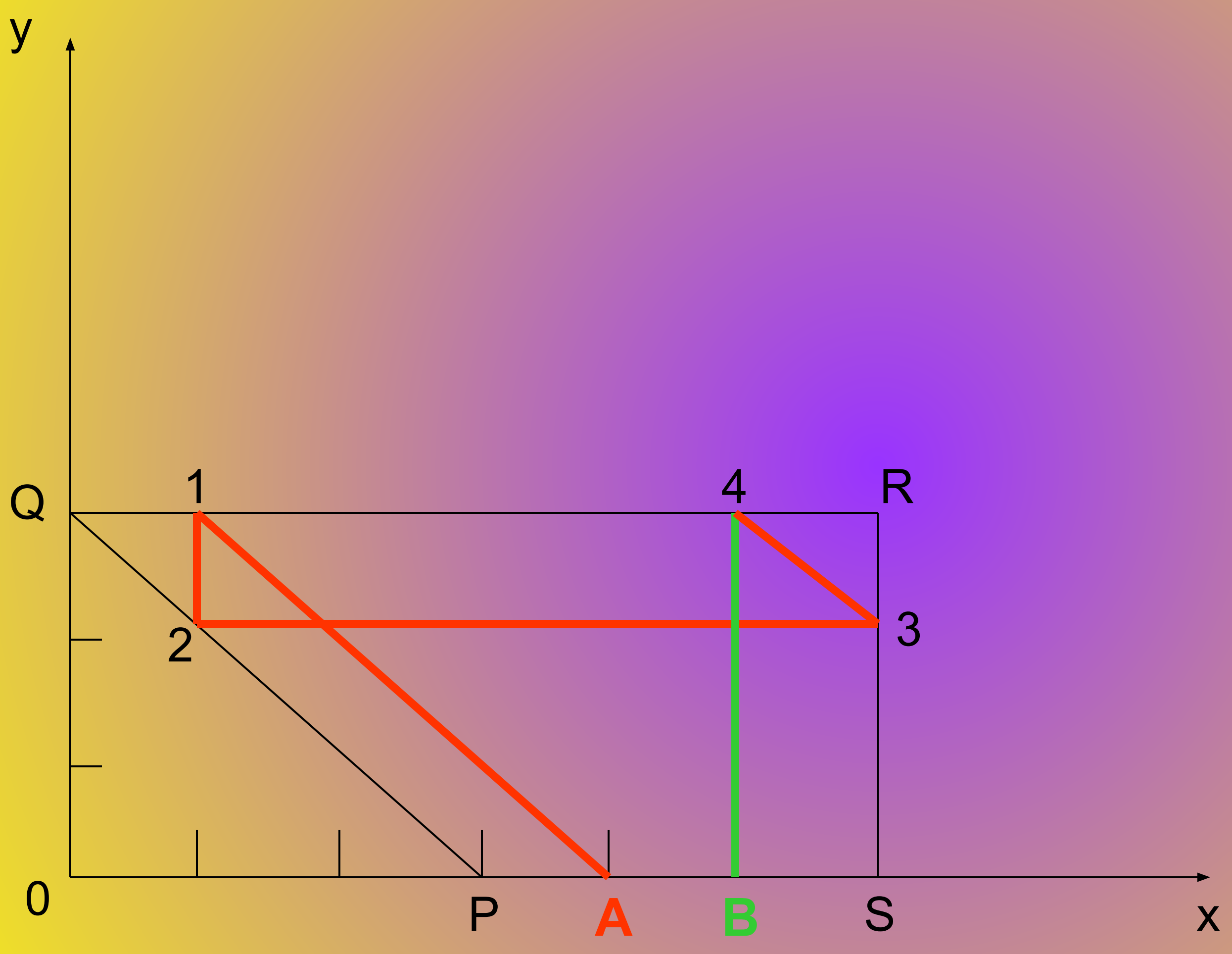
должны располагаться на границе

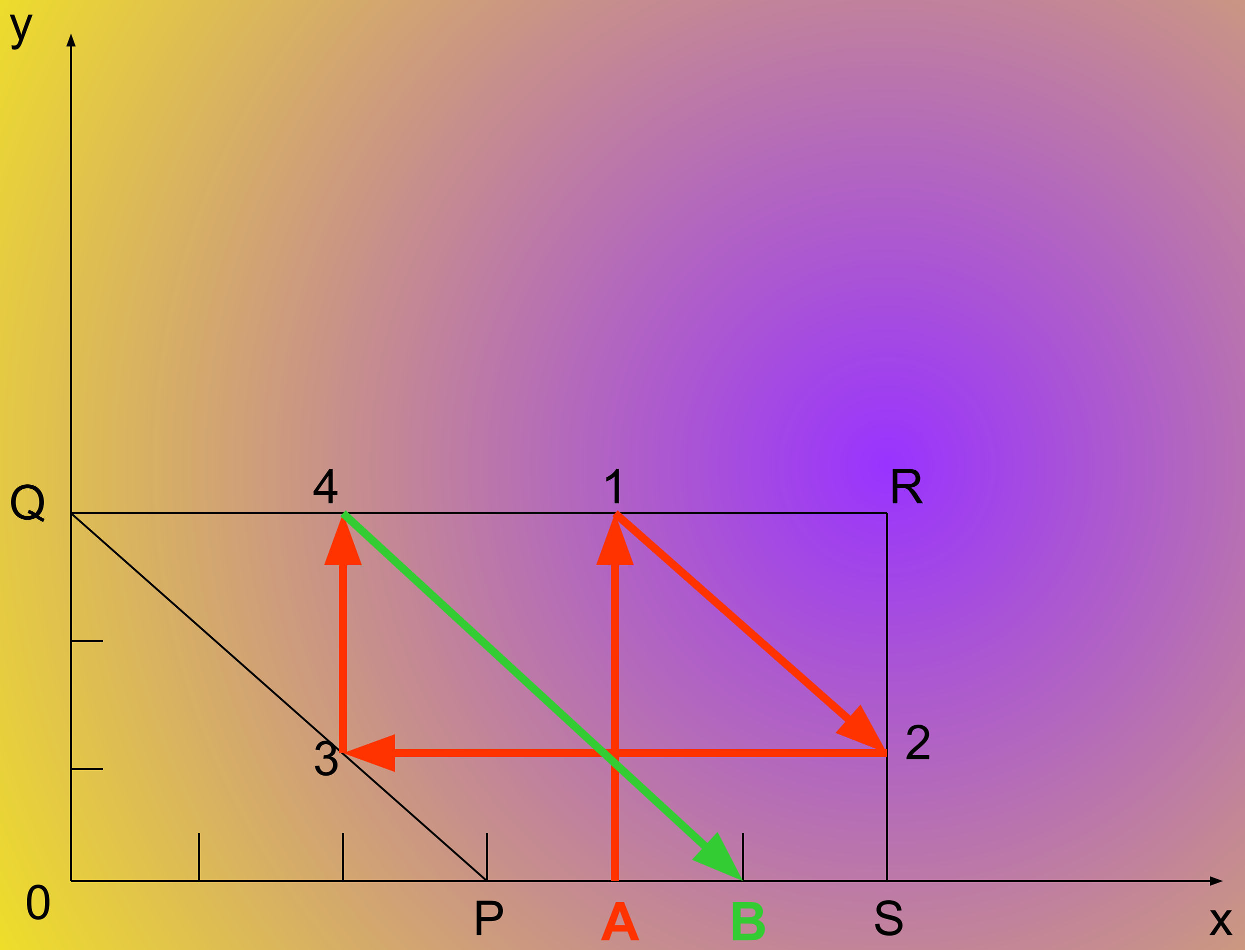
первых двух должно содержаться 10-7=3

четырехугольника угольника PQRS .

ведра (x+y=3).

Построение ломаной




y
Q
4
1
R
2
3
0
P
A
B
S
x

В других задачах роль четырёхугольника PQRS могут играть другие многоугольники: параллелограмм, пятиугольник. Могут встретиться шестиугольники, причём шесть - это максимально возможное число сторон. Формулировка задачи при этом остаётся той же самой, изменится только многоугольник и положения точек А и В.

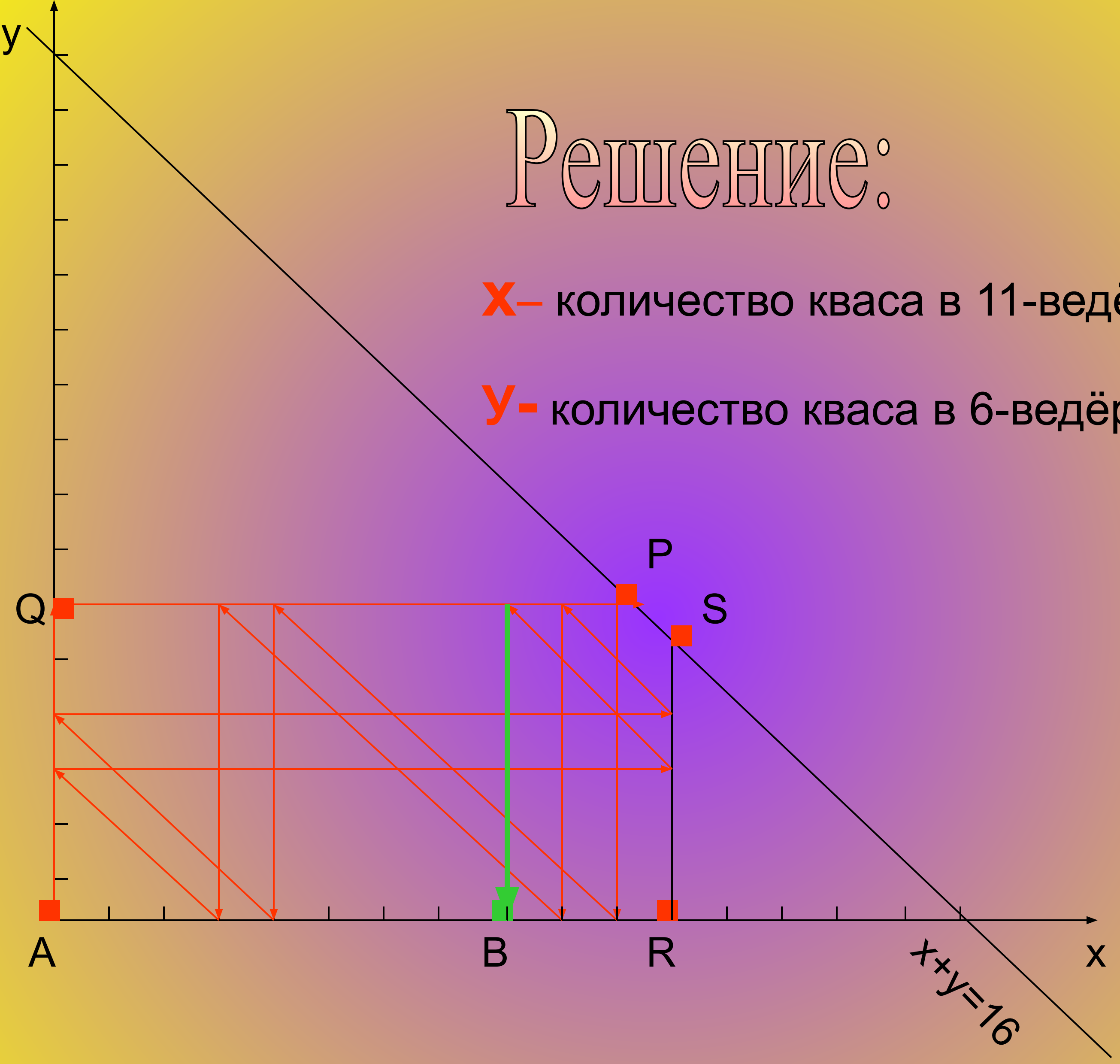
Задача (Шестнадцать вёдер кваса).

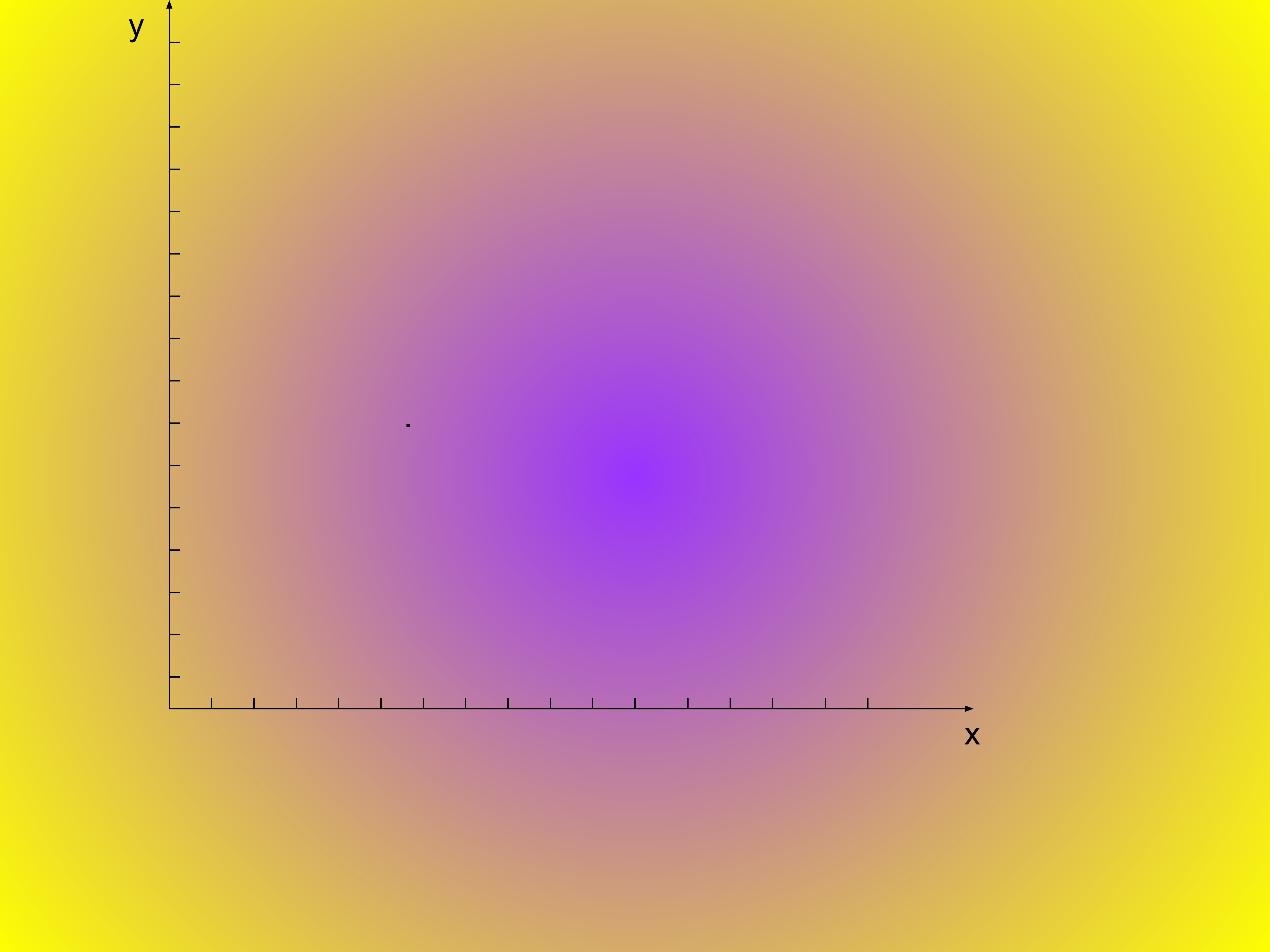
Как быть, если полный бочонок шестнадцативёдерный, а пустые- одиннадцати- и шестивёдерные и требуется разлить квас поровну в два из них?

Решение:

x– количество кваса в 11-ведёрном бочонке

y- количество кваса в 6-ведёрном бочонке




y
x

Геометрическое представление задачи и её решения наглядно, однако достаточно трудоёмко. Попробуем на основе геометрических соображений дать рекомендации, как в любой подобной задаче найти требуемый способ (если он существует), не прибегая к построениям.
Вершины многоугольника соответствуют распределениям жидкости, при которых сразу два бочонка находятся в граничном состоянии (оба пусты; оба полны; один пуст, другой полон).

Правило 1. Прежде всего нужно добиться с помощью переливаний, чтобы по крайне мере два бочонка находились в граничном состоянии.
Геометрически это соответствует тому, что мы строим ломаную, начинающуюся в точке А и кончающуюся в какой-либо вершине многоугольника.

Правило 2. Следует обойти все вершины многоугольника, переливая на каждом шаге жидкость из бочонка, который не участвовал в предыдущем переливании, и не изменяя содержимого одного из бочонков, находящихся в граничном состоянии.
Геометрически последовательное применение правила 2 означает переход от вершины многоугольника к соседней с ним вершине и так далее. Вершин не более шести, поэтому, применяя правило 2 не более шести раз, мы вернёмся к распределению, которое ранее уже встречалось.
Если, применяя 1, мы не попали в В и если В отлично от вершин многоугольника (применение 2 не даёт нам В), то далее нужно поступать следующим образом.

Правило 3. Отправляясь от точки А, а также от распределений, соответствующих каждой вершине многоугольника, совершать переливания, не приводящие к ранее встречавшимся распределениям, пока это будет возможно сделать или встретится распределение В. При этом, как легко видеть, в переливании должны участвовать бочонок, находящийся в граничном состоянии, и бочонок, не участвовавший в предыдущем переливании. Из геометрических соображений следует, что если это можно сделать, то единственным способом (из точки А иногда можно провести две ломаные, как в рассмотренной задаче). Если применение правила 3 не приведёт к распределению В, то, значит, переливаниями из А в В перейти невозможно.

3. Теоретическое обоснование применения метода трилинейных координат к решению задач на переливание.

<u>1). Понятие системы трилинейных координат</u>**.**

Рассмотрим применение геометрии к решению задач, в которых требуется разделить жидкость на определенные пропорции с помощью инструментов, казалось бы, непригодных для этого. Для решения нам понадобятся так называемые трилинейные координаты, которые мы сейчас и опишем.

Обычно для нанесения точек с заданными декартовыми координатами пользуются миллиметровой бумагой. Для наших целей лучше использовать триангулированную бумагу, т. е. бумагу, на которой проведены три системы параллельных линий, разбивающих ее на маленькие равносторонние треугольники. Нарисуем на такой бумаге большой равносторонний треугольник *ABC* со сторонами, проходящими по линиям сетки. Для произвольной точки *P* в этой плоскости определим числа *x, y, z* как расстояния от этой точки до прямых *BC*, *CA* и *AB* соответственно, причем для каждой из этих прямых расстояние будем считать положительным, если точка лежит по ту же сторону от этой прямой, что и треугольник *ABC*, и отрицательным в противном случае. Полученную тройку чисел (*x, y, z*) будем называть трилинейными координатами точки P относительно треугольника ABC. Заметим, что для точек, лежащих внутри треугольника *ABC*, все три координаты положительны. Кроме того, если *a* – длина стороны треугольника, а *h* – высоты($h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ $\frac{1}{2}$), то

(ax+ay+az) = $S_{PBC} + S_{PCA} + +S_{PAB} = S_{ABC} = \frac{1}{2}$ *ah*, откуда следует, что *x* + *y* + *z* = *h*.

Трилинейные координаты чрезвычайно удобны для описания ситуации, в которой участвуют три переменные величины, имеющие постоянную сумму. Если одна из этих величин *x, y* или *z* остается постоянной, а две другие изменяются, то точка (*x, y, z*) движется по прямой, параллельной одной из сторон треугольника *ABC*. В частности, прямые, на которых лежат стороны *BC*, *CA* и *AB*, описываются уравнениями: *x* = 0, *y* = 0, *z* = 0, а вершины *A*, *B*, *C* имеют координаты (*h*, 0, 0), (0,*h*,0), (0, 0, *h*).

Применение метода трилинейных координат к решению задач.

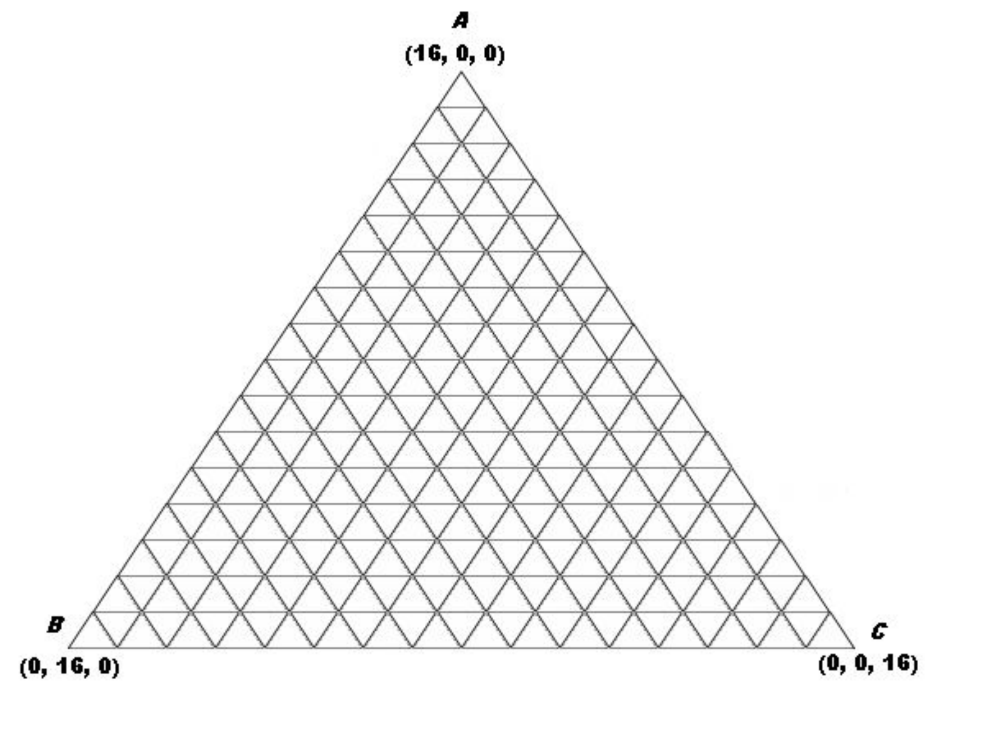
1)Построение трилинейной системы координат по данному условию задачи. Рассмотрим, как на практике можно применить данный способ решения задач.

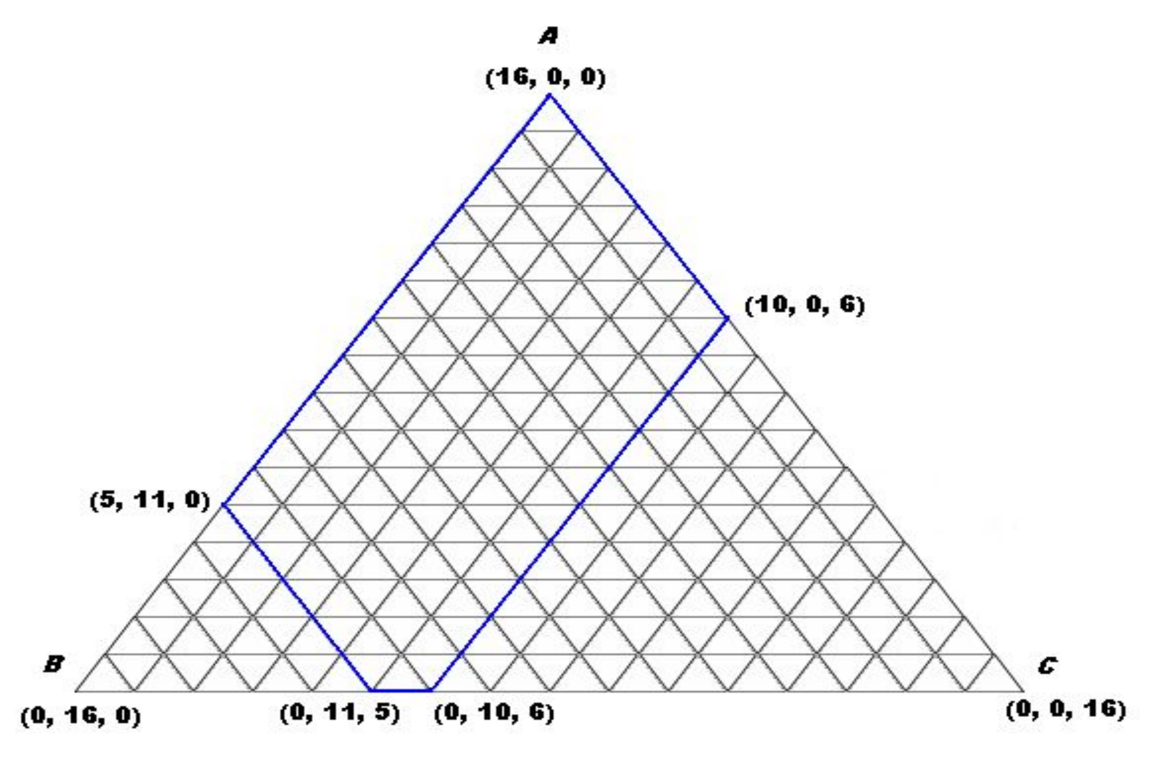
Задача: «Имеются три бочонка: 16, 11 и 6 - ведёрные. 16 - ведёрный бочонок полон, 11 и 6 - ведёрные пусты. Требуется разделить квас поровну, используя только эти бочонки».

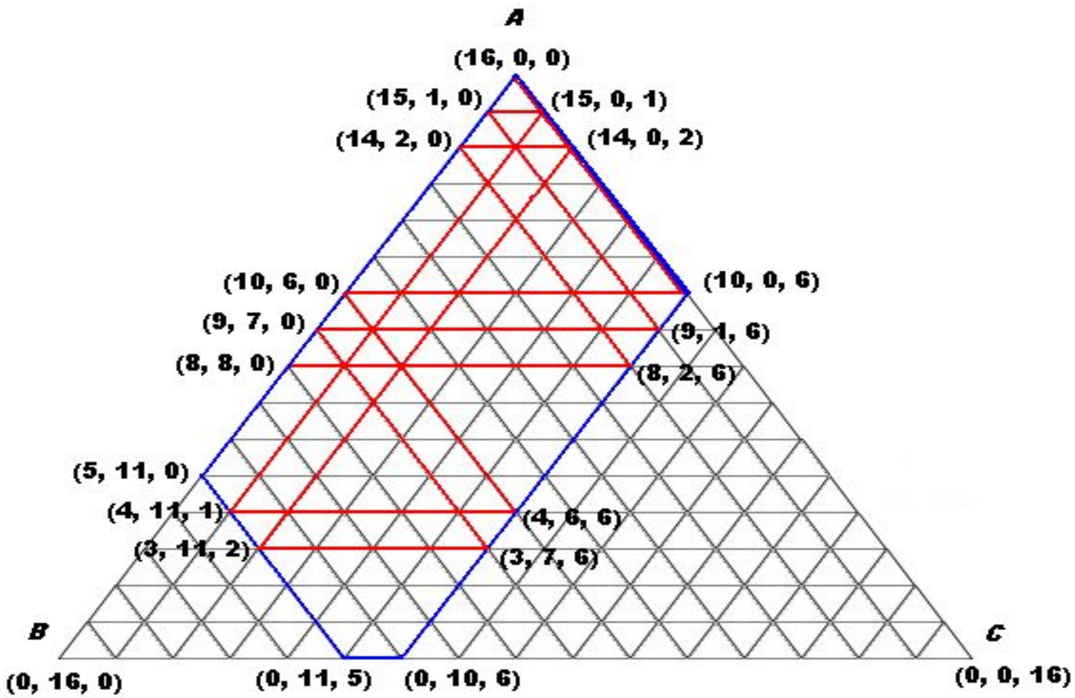
Так как по условию задачи у нас имеется 16 л кваса, 3 бочонка емкостью 16 л, 11 л и 6 л и первый бочонок полон, то чертим трилинейную координатную сетку, а именно: равносторонний треугольник с вершинами *A, B, C*, координаты которых равны *A*(16, 0, 0), *B* (0, 16, 0), *C*(0, 0, 16).

2) Определение области операций для данной задачи.

Определяем *область операций*: 0 ≤ *x* ≤ 16, 0 ≤ *y* ≤ 11, 0 ≤ *z* ≤ 6. Соответственно областью операций является пятиугольник, ограниченный прямыми *x = 0 и x = 16, y = 0 и y = 11, z = 0 и z = 6.* Получили пятиугольник с вершинами, координаты которых (16, 0, 0), (10, 0, 6), (0, 10, 6), (0, 11, 5), (5, 11, 0). Определяем 2 точки: начало операций в точке (16, 0, 0) и конец операций в точке (8, 8, 0) – так как по условию задачи 16 л кваса находятся в 16-ти литровом бочонке, а два других пусты; и требуется разделить 16 л пополам.




A
(16, 0, 0)
(10, 0, 6)
(5, 11, 0)
B
C
(0, 16, 0)
(0, 11, 5)
(0, 10, 6)
(0, 0, 16)



Используя данную схему, нужно пройти определенный путь, чтобы из точки (16, 0, 0) оказаться в точке (8, 8, 0), а именно: (16, 0, 0) → (10, 0, 6) → (10, 6, 0) → (4, 6, 6) → (4, 11, 1) → (15, 0, 1) → (15, 1, 0) → (9, 1, 6) → (9, 7, 0) → (3, 7, 6) → (3, 11, 2) → (14, 0, 2) → (14, 2, 0) → (8, 2, 6) → (8, 8, 0).

3)Выводы**:**

Можно сделать вывод, что для выполнения, поставленного в задаче условия необходимо сделать 15 переливаний, чтобы разделить при помощи данных сосудов имеющиеся 16 л кваса пополам.

Если бы эту задачу решали методом подбора, то на нахождение данного решения ушло бы очень много времени. А применение системы трилинейных координат является более рациональным способом.

Заключение:

Таким образом, мы видим, что геометрический способ решения задач на переливание позволяет наглядно представить этот процесс, делает его более осознанным, т.е. сводит решение задачи к построению ломаной с началом в точке А и концом в точке В, все вершины которой лежат на границе некоторого многоугольника. Также такой способ решения позволяет привлечь новые интеллектуальные ресурсы ученика (умение составлять систему двойных неравенств, навыки работы с координатной плоскостью).
Нельзя сказать однозначно какой способ лучше табличный или геометрический. Мы считаем, что владеть двумя способами решения какой-либо задачи лучше, чем одним, т.к. есть выбор. А право выбора остаётся за каждым конкретным человеком.

Выполнили работу:

Ильина Маша и Максимова Катя.