# Нормальное распределение

Тема №1

1. Случайная величина и ее распределение
2. Математическое ожидание и его оценка
3. Дисперсия и ее оценка
4. Анормальные модели распределения. Асимметрия и эксцесс распределения

# Вопросы для обсуждения

# ВОПРОС №1

Случайная величина и ее распределение

- *Генеральная совокупность* – все множество объектов, по поводу которого строится рассуждение теоретика.
- *Генеральная совокупность* – как правило, не имеет четко очерченных границ.

# Генеральная совокупность

- *Выборка* – часть генеральной совокупности, ее *статистическая* модель.
- *Выборка* – должна максимально точно соответствовать генеральной совокупности. Как правило, это достигается за счет применения различных процедур *рандомизации*.
- Иными словами, *выборка* – это *случайная модель* генеральной совокупности, которая может быть отождествлена с ней лишь с определенной долей вероятности.

# Выборка

- *Случайные величины* связаны со случайными событиями.
- О случайных событиях говорят тогда, когда оказывается невозможным однозначно предсказать результат, который может быть получен в тех или иных условиях.

# Случайная величина

## Дискретная

- Может принимать конкретные значения из ограниченного множества.
- Набор значений ограничен, *фиксирован*.

## Непрерывная

- Может принимать неопределенный набор значений из фиксированного множества.
- Набор значений неограничен, *случаен*.

# Случайные величины

- *Теория вероятностей* и *математическая статистика* исследуют законы, описывающие поведение случайных величин, как дискретных, так и непрерывных.
- Такие законы отражают оценку вероятности того или иного значения случайной величины, что обычно обозначают как *распределение случайной величины*.

# Моделирование случайных событий

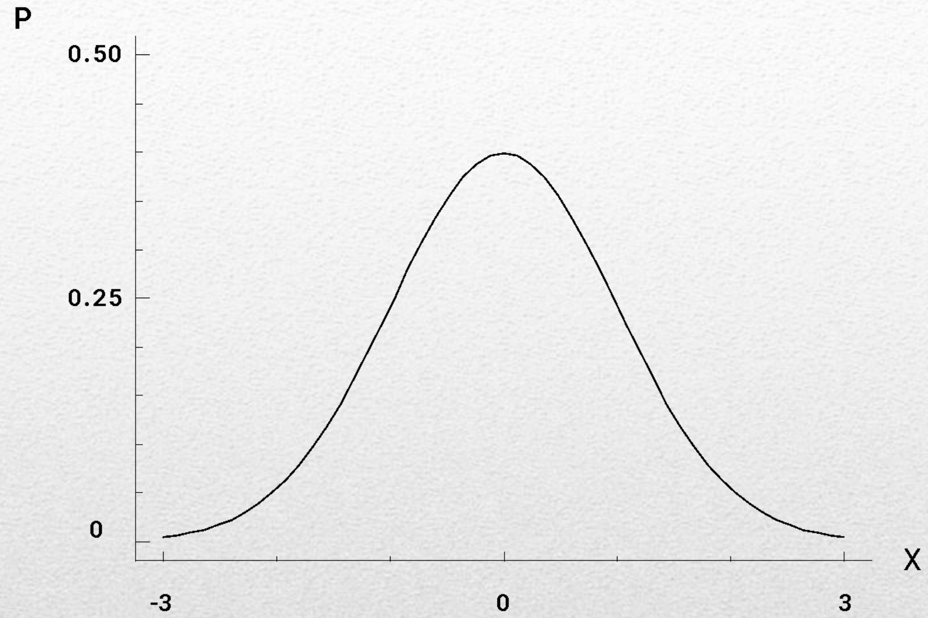
*Нормальное распределение* имеет место тогда, когда интересующее нас явление подвержено влиянию бесконечного числа случайных факторов, уравновешивающих друг друга.

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

# Нормальное распределение

# Z-распределение

*Единичным* (стандартным) нормальным распределением (*z-распределением*) называется такое нормальное распределение, математическое ожидание для которого равно 0, а дисперсия 1




# Параметры распределения

# ВОПРОС №2

Математическое ожидание и его оценка

- *Математическим ожиданием* в математической статистике обозначают *центральный момент первого порядка*.

# Математическое ожидание

Среднее арифметическое

$$\bar{X} = \frac{\sum x}{n}$$

Мода

Наиболее часто встречающееся значение в выборке

Медиана

Величина соответствующая половине распределения

# Оценка математического ожидания

- *Наиболее часто* используемая оценка математического ожидания.
- Предполагает, что результат измерения задан в *метрической* шкале.
- Является *несмещенной* оценкой математического ожидания, т.е. *ожидаемое* значение этой величины *равно* математическому ожиданию.

# Среднее арифметическое

- Обычно используется в случае, когда набор значений случайной величины *ограничен* и имеется *большое число повторяющихся значений*.
- Является *несмещенной* оценкой математического распределения.
- Если *два* значения в выборке встречаются одинаково часто, то такое распределение называют *бимодальным*.
- Если *все* значения в выборке встречаются одинаково часто, то такая выборка *не имеет моды*.

# Мода

# Медиана

- Частный случай *квантиля* распределения.
- *Квантиль* распределения определяют как интегральное значение распределения между двумя величинами переменной *X*.
- Таким образом, величина *X* будет являться медианой распределения, если интегральное значение распределения от -∞ до *X равно* интегральному значению распределения от *X* до +∞.
- *Медиана* также является *несмещенной оценкой* математического ожидания.

# ВОПРОС №3

Дисперсия и ее оценка

- *Дисперсией* в математической статистике обозначают *центральный момент второго порядка*:
- $$D\xi = M(\xi - M\xi)^2$$
- где ξ – случайная величина, *D* – дисперсия, *M* – математическое ожидание

# Дисперсия

Где:

*x* – результаты измерения случайной величины, *n* – объем выборки, $s^2$- оценка дисперсии

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}{n}$$

# Оценка дисперсии

- Так как оценка дисперсии в приведенной ранее формуле осуществляется относительно среднего по выборке, полученная статистика $s^2$ оказывается смещенной относительно истинного значения дисперсии $\sigma^2$, т.е.:

$$E\left(s^2\right) = \frac{n-1}{n}\sigma^2$$

# Оценка по выборке

# Оценка по генеральной совокупности

- Чтобы получить оценку дисперсии для генеральной совокупности, необходимо воспользоваться следующей формулой:

$$\hat{s}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n-1}$$

- На практике вместо оценки дисперсии чаще используют производную от нее – *стандартное отклонение*, иначе называемое *средне-квадратичным отклонением (уклонением)*.
- Значение стандартного отклонения определяется как квадратный корень от величины дисперсии.

# Стандартное отклонение

# ВОПРОС №4

Анормальные модели распределения. Асимметрия и эксцесс распределения

- Нормальное распределение имеет место, когда на интересующее нас явление оказывают влияние неопределенное множество неконтролируемых факторов, которые *уравновешивают* друг друга.
- Если в ходе измерения действует какой-либо *однонаправленный* фактор, распределение случайной величины может отличаться от закона нормального распределения.
- Для описания распределения, отличающегося от нормального, необходимо учесть моменты более высокого порядка – *асимметрию* и *эксцесс*.

# Анормальное распределение

- *Асимметрия* представляет собой момент *третьего* порядка, т.е., говоря неформальным языком, представляет собой дисперсию дисперсии.
- На графике асимметрия проявляет себя как степень скошенности распределения в положительную (положительная асимметрия) или отрицательную (отрицательная асимметрия) сторону.

# Асимметрия

- При измерении *времени реакции* испытуемого неминуемо получается *положительная* асимметрия ответов, так как испытуемый не может реагировать быстрее известного предела, но может бесконечно замедлять реакцию.

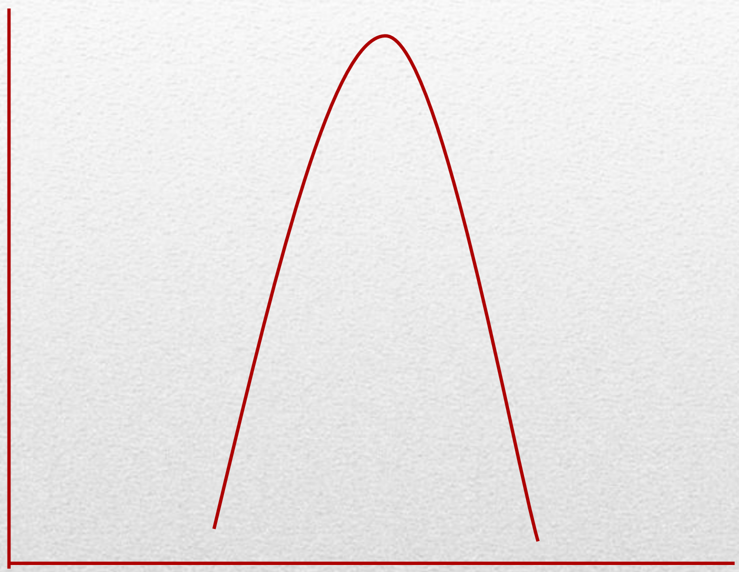
# Пример: асимметрия времени реакции

- *Эксцесс* представляет собой момент *четвертого порядка.*
- Об эксцессе наглядно можно судить по степени «выпуклости» или «заостренности» распределения.

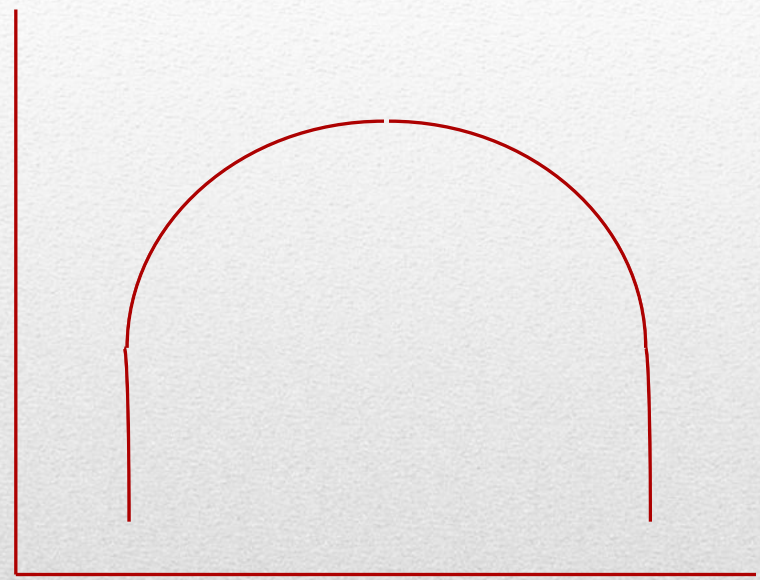
# Эксцесс

# Примеры эксцесса

## Положительный



## Отрицательный



# www.ebbinghaus.ru