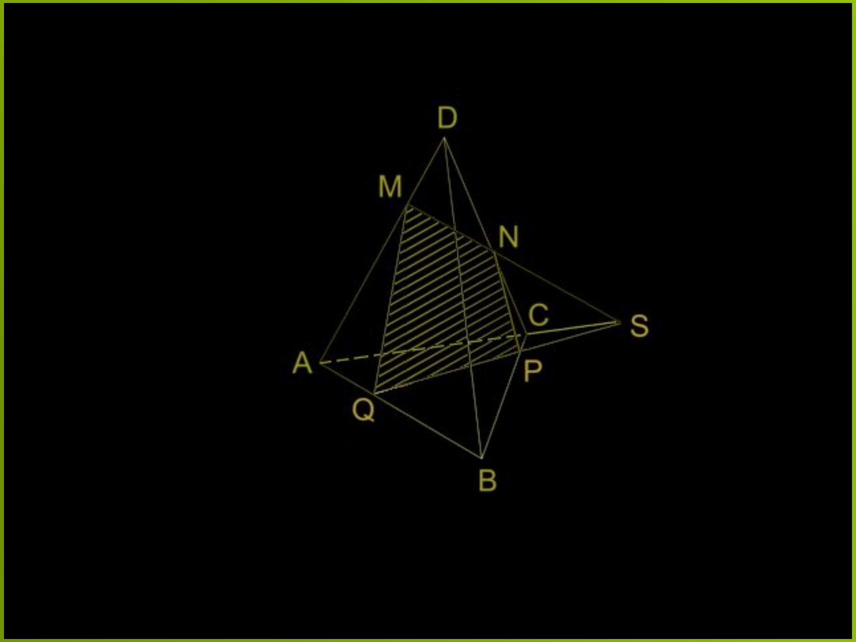
Построение сечения многогранника плоскостью

Сечения многогранника плоскостью используются при решении многих стереометрических задач. Мною разобраны некоторые способы построения сечений, а также задачи связанные с их построением. Рассмотрены сечения плоскостями, проходящими через данную точку и прямую, через три данные точки, а также сечения, когда секущая плоскость задана одним из условий.

Плоскость проходит через три данные точки

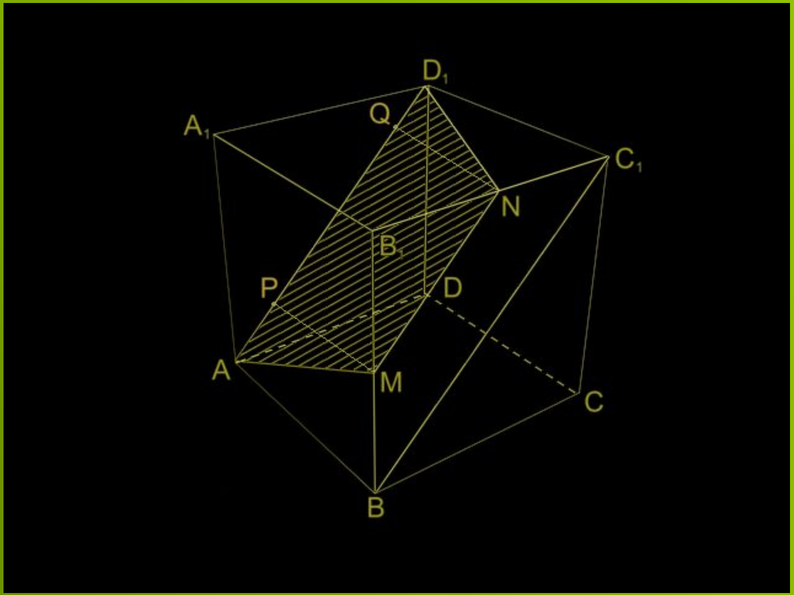
На рисунке показано построение сечения тетраэдра плоскостью, проходящей через точки M, N, P на ребрах тетраэдра. Точки M и N заданы так, что прямые MN и AC не параллельны. Отрезки MN и AP являются сторонами сечения. Точка P – общая для плоскостей MNP и ABC. Вторую общую точку находим в пересечении прямых MN и AC, S=MNAC. Прямая SP – линия пересечения плоскостей MNP и ABC. Пересечение этой прямой с ребром AB дает вершину Q сечения, Q=SPAB. Сечение – четырехугольник MNPQ.



Плоскость проходит через данную точку и прямую

Дано:

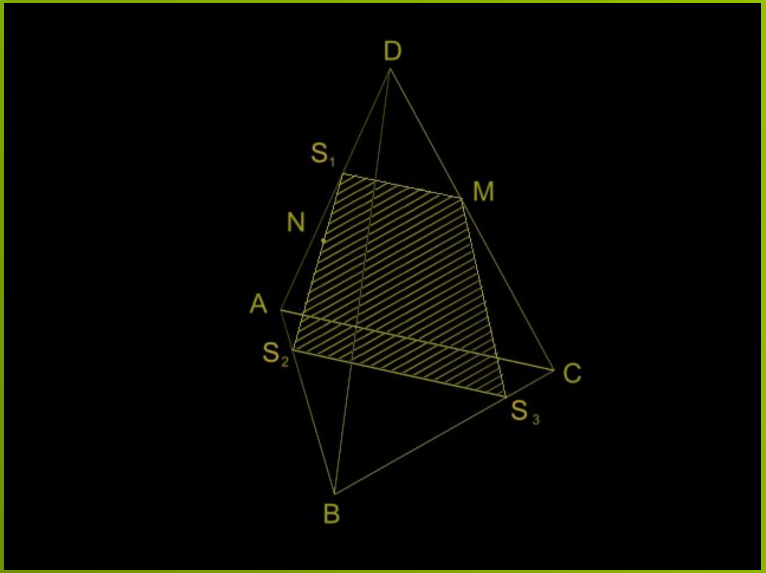
Длина ребра куба равна а. Найти площадь сечения проведенного через диагональ AD_1 грани AA_1D_1D и середину M ребра BB_1.



Решение:

Обозначим секущую плоскость α. отрезки AD_1 и AM принадлежат и плоскости и граням куба, поэтому являются сторонами сечения. Построим сторону сечения в грани BB_1C_1C. Плоскости BB_1C_1C и AA_1D_1D параллельны, поэтому линия пересечения плоскостей и BB_1C_1C параллельна прямой AD_1. Поскольку прямые BC_1 и AD_1 параллельны, эта линия пересечения параллельна и прямой BC_1. Проводим через точку M в плоскости BB_1C_1C прямую, параллельную прямой BC_1, ее пересечение с ребром B_1C_1 дает вершину сечения. Сечение – трапеция $AMND_1$, $MN \parallel AD_1$.
Найдем длины сторон этой трапеции. Имеем $AD_1 = \frac{a}{\sqrt{2}}$, отрезок MN – средняя линия в треугольнике BB_1C_1, поэтому $MN = \frac{1}{2} BC_1 = \frac{a}{\sqrt{2}}$. В прямоугольных треугольниках ABM и D_1C_1N ($AB = C_1D_1 = a$, $BM = NC_1 = \frac{a}{2}$) находим $AM = D_1N = \frac{a\sqrt{5}}{2}$. Значит, трапеция $AMND_1$ равнобедренная. Найдем ее высоту. Опускаем перпендикуляры MP и NQ на основание AD_1, получаем $PQ = MN = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $D_1Q = PA = \frac{1}{2}(D_1A\text{-}QP) = \frac{a}{2\sqrt{2}}$. В прямоугольном треугольнике D_1QN ($D_1N = \frac{a\sqrt{5}}{2}$, $D_1Q = \frac{a}{2\sqrt{2}}$) находим $NQ = \frac{3a}{2\sqrt{2}}$. Определяем площадь сечения
$S = \frac{1}{2}(MN + D_1A) * NQ = \frac{9}{8} a^2$.
Ответ: $\frac{9}{8} a^2$

Плоскость проходит через две точки параллельно ребру (прямой).



Дано:

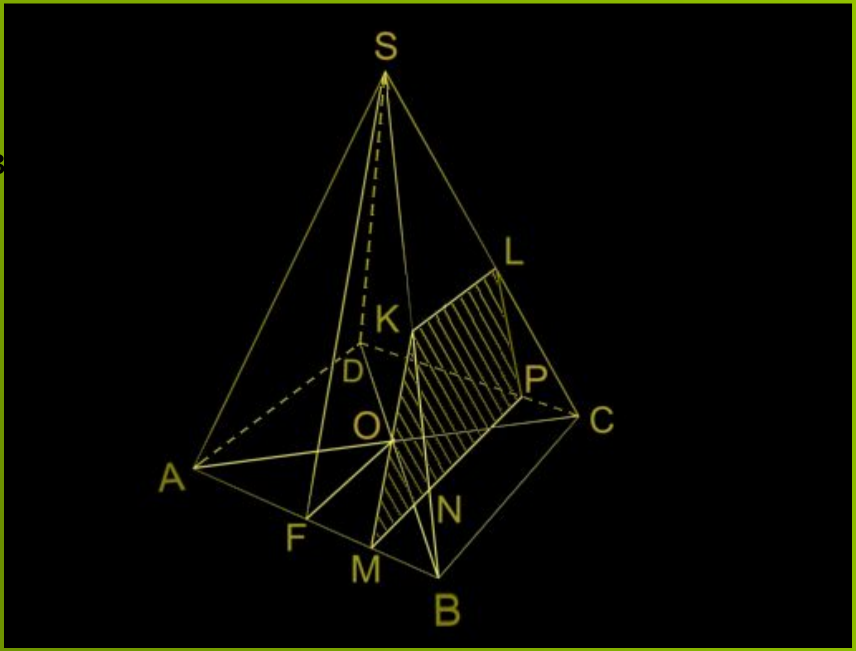
На рисунке показано построение сечения тетраэдра плоскостью, параллельной ребру AC и проходящей через точку M ребра CD и точку N в грани ABD.

Решение:

Построение основано на следующей теореме: *Если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой.* Обозначим плоскость сечения α. Плоскость ACD имеет с плоскостью α общую точку M и содержит прямую AC, параллельную плоскости α. Следовательно, линия пересечения этих плоскостей проходит через точку M параллельно прямой AC. В соответствии с этим построена сторона MS_1 сечения, $MS_1 \parallel AC$. Проведя прямую S_1N, найдем вторую сторону сечения – S_1S_2. На рисунке точка N дана так, что точка S_2 принадлежит ребру AB. Плоскость ABC также содержит прямую AC, параллельную плоскости сечения. Поэтому сторона сечения S_2S_3 проведена параллельно ребру AC. Отрезок S_3M – четвертая сторона сечения. Сечение $MS_1S_2S_3$ – трапеция ($MS_1 \parallel AC \parallel S_2S_3$).

Построение сечений многогранника плоскостью, заданной точкой и условием параллельности или перпендикулярности к указанным прямым и плоскостям.

1. Плоскость проходит через данную точку перпендикулярно к данной прямой.



Дано:

На ребре AB правильной четырехугольной пирамиды SABCD дана точка M, BM = AB. Через точку M проведена секущая плоскость перпендикулярно к прямой AB. Построить сечение и вычислить его площадь, если сторона основания пирамиды равна а, а высота пирамиды H.

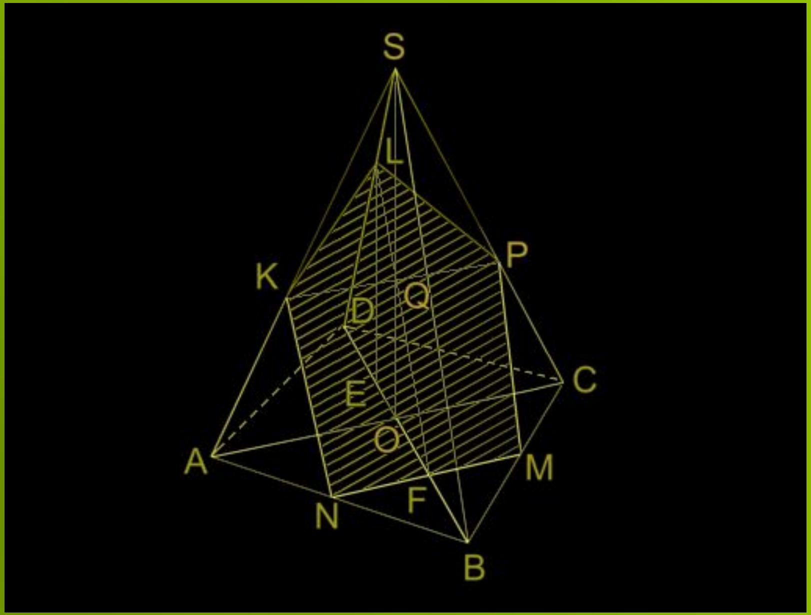
Решение:

На ребре AB пирамиды SABCD откладываем отрезок BM = AB. Через точку M в грани ASB проводим MKAB (точка K лежит на ребре, MK║SF, где SF – апофема пирамиды), а в основании ABCD проводим MPAB, где точка P лежит на ребре DC (MP║FO). Плоскости SFO и KMP параллельны между собой и перпендикулярны к AB, следовательно, перпендикуляры к основанию ABCD пирамиды. Так как BC║MP, то прямая BC параллельна секущей плоскости KMP. Поэтому грань BSC, имея с секущей плоскостью общую точку K, пересекается с нею по прямой KL║BC – по теореме, обратной теореме о параллельности прямой и плоскости. Искомое сечение трапеция MKLP. Пусть N– точка пересечения диагонали BD основания пирамиды и отрезка MP. Но KN║SO как линии пересечения параллельных плоскостей SFO и KMP третьей плоскостью DSB. Поскольку SO перпендикулярна к плоскости основания пирамиды, то и отрезок KN перпендикулярен к этой плоскости. Следовательно, KNMP, отрезок KM – высота трапеции MKLP.

2. Плоскость проходит через данную точку и параллельна двум пересекающимся или скрещивающимся прямым. Пример 1.

Дано:

Построить сечение правильной четырехугольной пирамиды SABCD плоскостью, проходящей через середину M стороны BC основания параллельно диагонали AC основания и боковому ребру SB. Вычислить площадь сечения, если длина стороны основания пирамиды а, а боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом α.

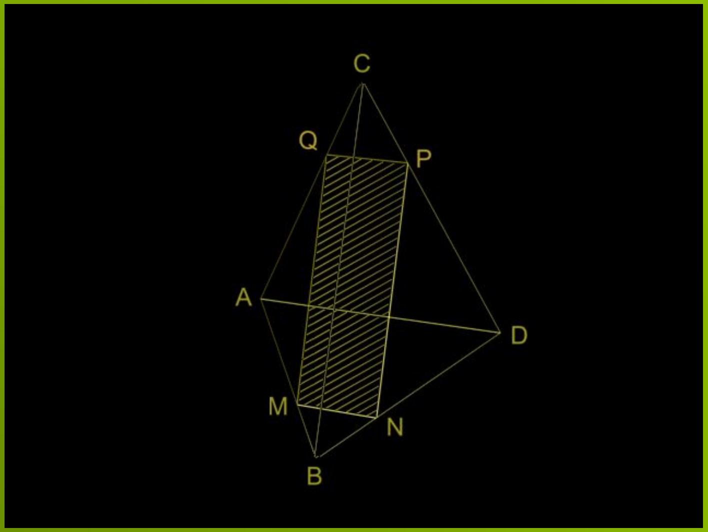


Решение:

Ссылаясь на упомянутую выше теорему, последовательно строим линии пересечения секущей плоскости с плоскостями основания ABC, DSB и ASC. Эти построения дают нам все искомые вершины сечения. Из хода построения следует, что N – середина AB, точка Q – середина SO, следовательно, точки K и P – середины боковых ребер SA и SC пирамиды соответственно. Отсюда: KN║SB║PM. Кроме того QF║KN║PM. Но QFNM, в чем легко убедиться применив теорему о трех перпендикулярах. Следовательно, сечение составлено из прямоугольника KNMP и равнобедренного треугольника KLP, имеющих общее основание KP.

2. Плоскость проходит через данную точку и параллельна двум пересекающимся или скрещивающимся прямым. Пример 2.

Дано:



На ребре AB тетраэдра расположена точка M так, что AM:AB = λ, $0<\lambda<1$. Построить сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точку M и параллельно ребрам AD и BC. При каком значении λ это сечение будет ромбом, если AD:BC = m?

Решение:

Секущую плоскость обозначим α. Линия пересечения этой плоскости с плоскостью ABD параллельна прямой AD (AD $\parallel$ α). Проводим MN $\parallel$ AD. Линии пересечения плоскостей BCA и BCD с плоскостью параллельны прямой BC (BC $\parallel$ α). Строим MQ $\parallel$ BC и NP $\parallel$ BC. Четвертая сторона сечения PQ параллельна ребру AD. Сечение – параллелограмм MNPQ (MN $\parallel$ AD $\parallel$ PQ, NP $\parallel$ BC $\parallel$ MQ).

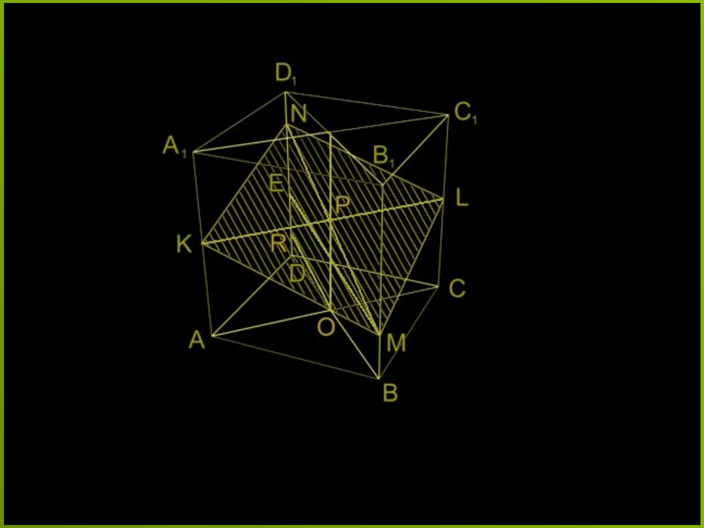
Выразим длины сторон параллелограмма MNPQ через длины ребер AD и BC. Из подобия треугольников AMQ и ABC имеем MQ:BC = AN:AB = λ, откуда MQ = λ*BC. Теперь находим BM = AB – AM = (1– λ)*AB и из подобия треугольников BMN и BAD получаем MN:AD = BM:BA = 1–λ, т.е. MN = (1– λ)*AD.подставляя в равенство MN = MQ получаем выражения, будем иметь (1– λ)*AD = λ*BC, откуда $\lambda = \frac{AD}{BC+AD} = \frac{m}{m+1}$

Ответ: сечение будет ромбом при $\lambda = \frac{m}{m+1}$.

3. Плоскость проходит через данную точку и параллельна двум пересекающимся или скрещивающимся прямым.

Дано:

В основании прямой призмы лежит ромб. В плоскости меньшего диагонального сечения призмы дана прямая MN, пересекающая оба боковых ребра призмы. Через эту прямую проведена секущая плоскость, параллельная диагонали основания призмы. Построить сечение и исследовать его форму.



Решение:

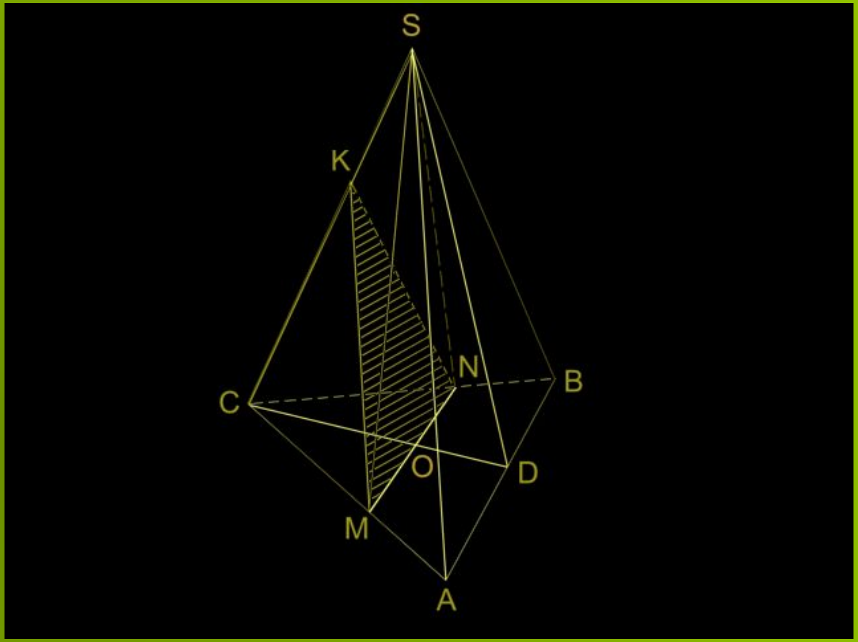
Пусть в ромбе ABCD BD<AC. Тогда меньшее диагональное сечение призмы проходит через BD. Построение искомого сечения не составляет труда. Находим точку P пересечения прямой MN с осью OO_1 призмы, в ее диагональном сечении AA_1C_1C проводим KL∥AC. Остается соединить последовательно отрезками точки K, M, L, N пересечения секущей плоскости с боковыми ребрами призмы.

Из условия следует, что секущая плоскость пересекает все боковые ребра параллелепипеда. В сечении получаем параллелограмм (противоположные боковые грани пересекаются секущей плоскостью по параллельным прямым). В данном случае сечение является ромбом. Для этого достаточно доказать, что в параллелограмме KMLN диагонали взаимно перпендикулярны. Последнее следует из того, что проекцией наклонной на плоскости основания призмы является диагональ DB основания, но ACDB, поэтому ACNM (для доказательства последнего утверждения можно провести OR∥MN и применить теорему о трех перпендикулярах). А так как KL∥AC, то KLNM.

4. Плоскость проходит через данную точку и параллельна данной плоскости.

Дано:

Построить сечение правильной треугольной пирамиды плоскостью, проходящей через центр основания параллельно боковой грани пирамиды.



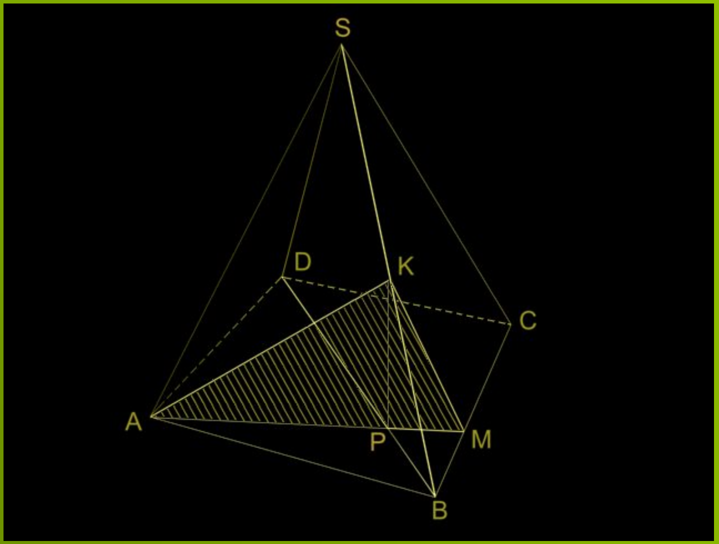
Решение:

Пусть секущая плоскость параллельна грани ASB пирамиды SABC. После проведения через центр O основания пирамиды прямой MN‖AB следы секущей плоскости в боковых гранях можно строить по-разному: либо провести OK‖SD (SD – апофема пирамиды) и соединить точку K с точками M и N, либо провести NK‖BS и MK‖AS (прямые MK и NK пересекаются в точке K на ребре SC). Можно, проведя NK‖BS и получив точку K, соединить ее с точкой M.

5. Плоскость проходит через данную прямую и перпендикулярна к данной плоскости (не перпендикулярной к данной прямой).

Дано:

Построить сечение правильной четырехугольной пирамиды SABCD плоскостью, проходящей через медиану AK боковой грани ASB и перпендикулярно к плоскости основания.

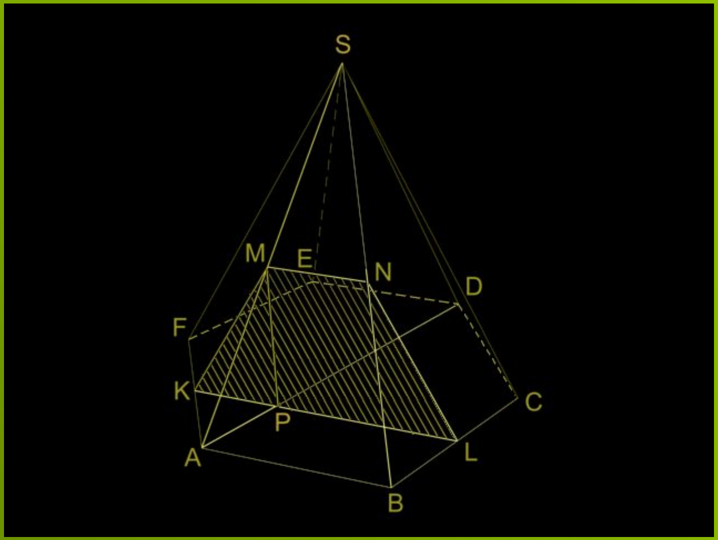


Решение:

Медиана боковой грани правильной пирамиды не перпендикулярна к плоскости основания, поэтому условия задачи определяют единственную секущую плоскость.

Если в условии задачи речь идет о перпендикулярности плоскости β к плоскости α,нужно постараться из удобной для нас точки плоскости β провести перпендикуляр к плоскости α В данном случае удобнее всего из конца K медианы AK боковой грани ASB опустить перпендикуляр на плоскость основания. Поскольку точка K лежит в плоскости DSB, перпендикулярной к плоскости основания, основание P этого перпендикуляра будет лежать на прямой BD пересечения перпендикулярных плоскостей DSB и ABC. Остается в плоскости основания пирамиды провести прямую AP и найти точку M ее пересечения прямой BC. В полученном треугольнике AKM построенный отрезок KP является высотой. Таким образом, в этом случае в ходе построения не только выяснена форма, но и построена высота треугольника AKM, необходимая для определения его площади.

6. Плоскость проходит через данную точку, перпендикулярна к данной плоскости и параллельна данной прямой.



Дано:

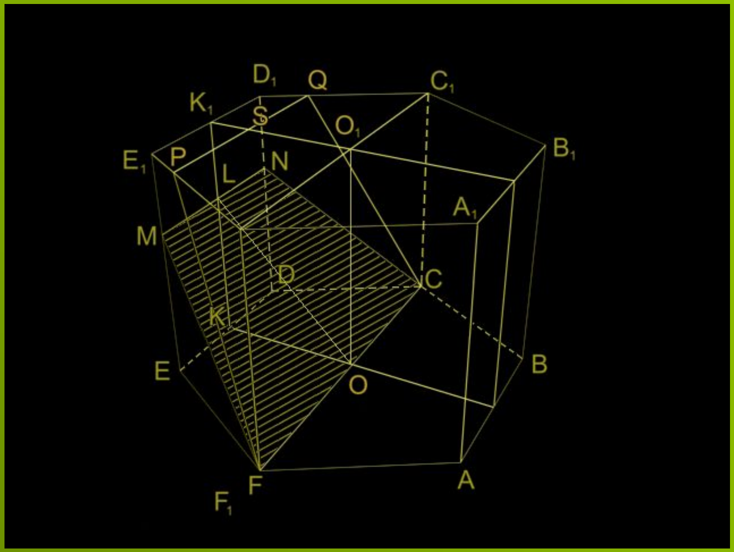
Построить сечение правильной шестиугольной пирамиды плоскостью, проходящей через середину бокового ребра параллельно стороне основания и перпендикулярно к плоскости основания пирамиды.

Решение:
Пусть секущая плоскость проходит через середину M бокового ребра SA данной пирамиды SABCDEF параллельно стороне основания AB. Как и в предыдущей задаче, прежде всего опустим из точки M перпендикуляр MP на плоскость Основания пирамиды. Основание P этого перпендикуляра окажется на OA. Затем через точку P (середину OA) проведем KL║AB. Точки K и L – середины сторон AF и BC основания пирамиды. Через M проводим MN║AB (это следует из условия параллельности секущей плоскости прямой AB). В сечении получена равнобедренная трапеция KMNL, отрезок MP – ее высота.

7. Плоскость проходит через данную прямую под данным углом к данной плоскости.

Дано:

Построить сечение правильной шестиугольной призмы плоскостью, проходящей через большую диагональ основания под углом α к плоскости основания.

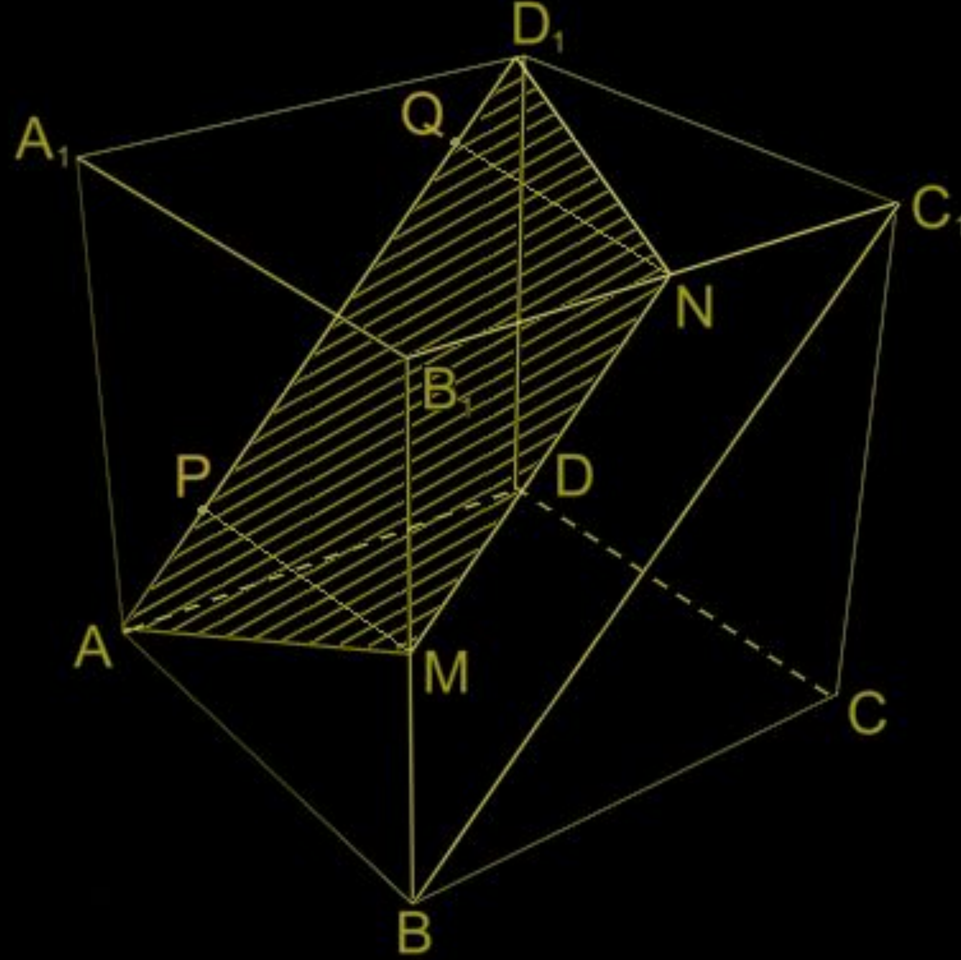


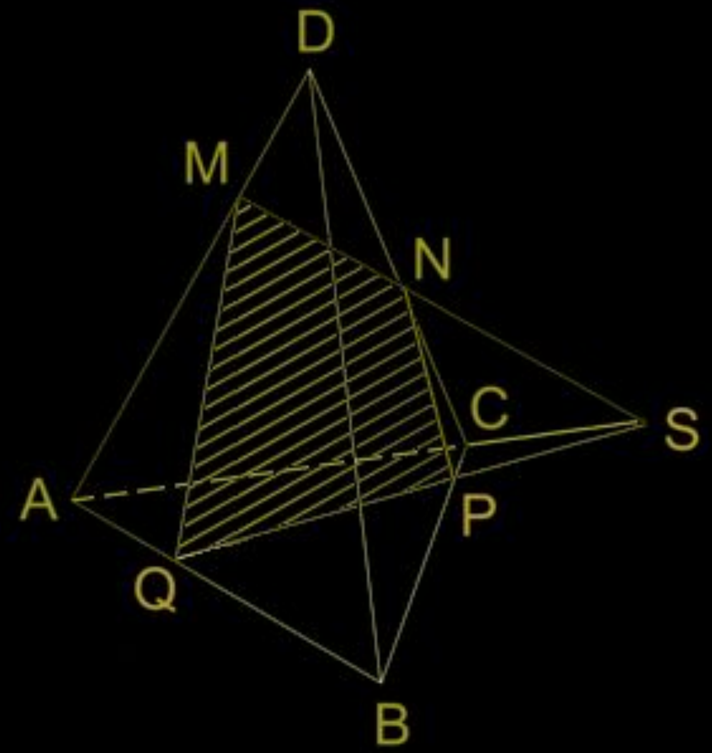
Решение:

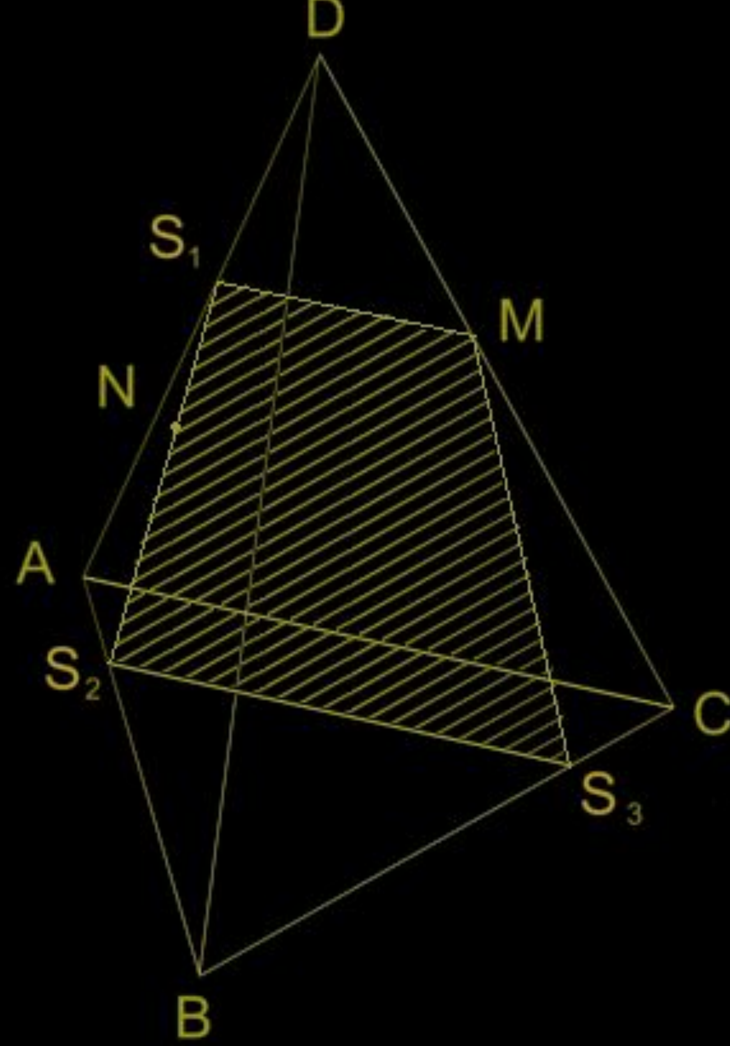
Решение таких задач начинаем с построения двугранного угла. Это облегчает дальнейшие построения и установление формы сечения.

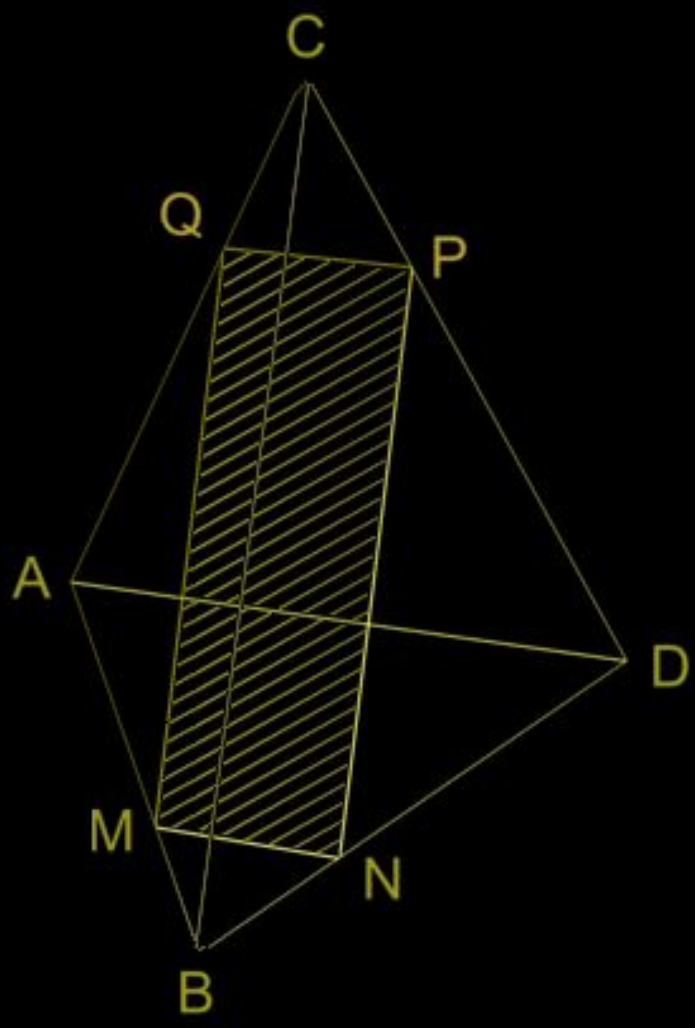
Пусть в данной правильной шестиугольной призме O – центр, FC – большая диагональ основания. Проводим OKDE (K– середина DE), $KK_1 \parallel DD_1$. Плоскость O_1OK перпендикулярна к плоскости снования призмы и к диагонали FC основания (так как FCOK и $FCOO_1$). Остается в это плоскости провести луч OL под данным углом к OK, чтобы получить линейный угол LOK двугранного угла между секущей плоскостью и плоскостью основания призмы.

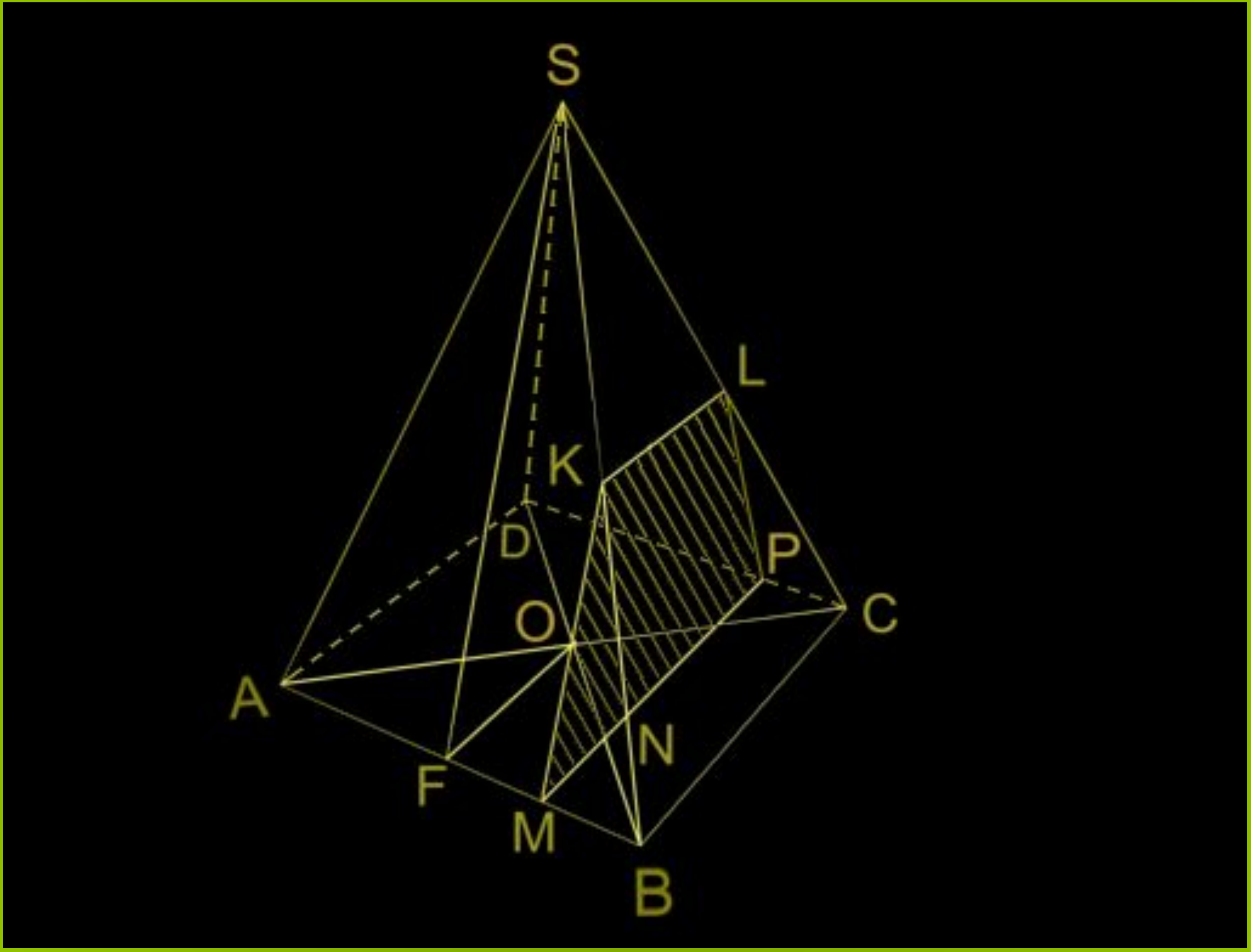
Точка L принадлежит секущей плоскости и плоскости грани DD_1E_1E. Эти плоскости пересекаются по прямой MN, проходящей через L параллельно прямой DE. Трапеция CNMF – искомое сечение. Из хода построения следует, что эта трапеция – равнобокая, отрезок LO служит ее высотой.

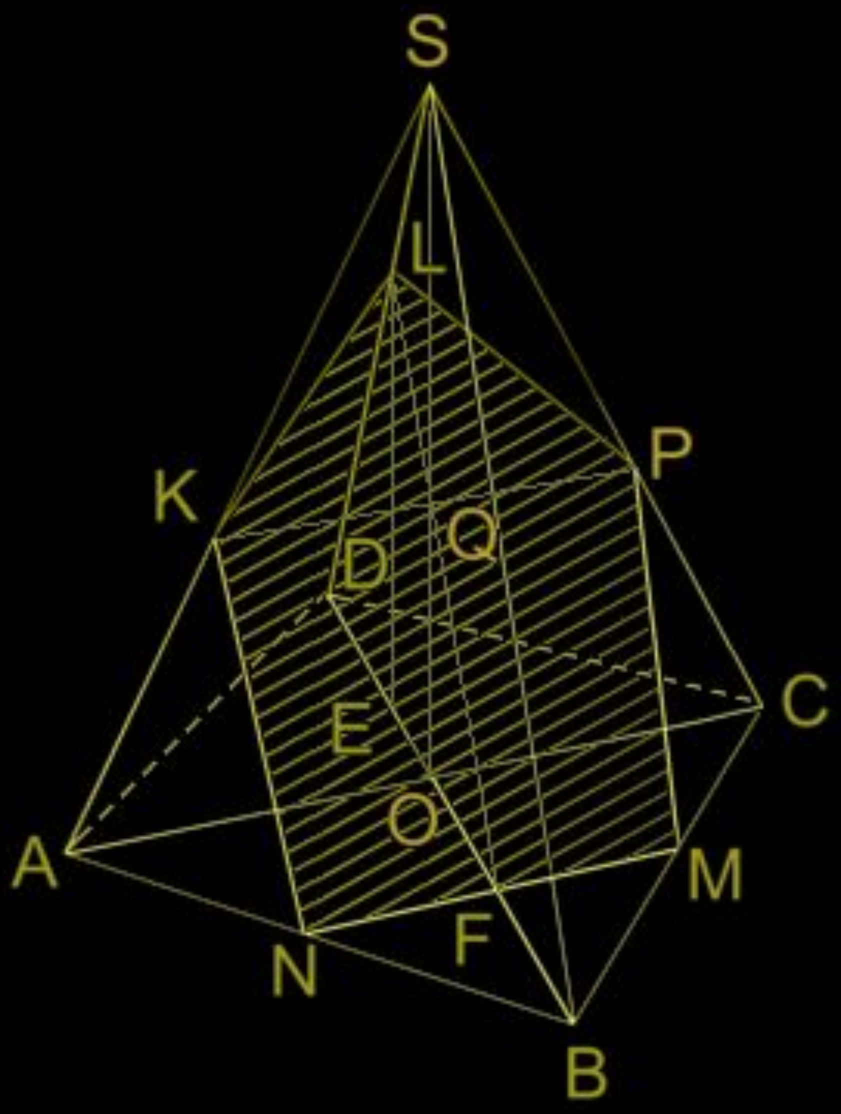

D1
Q
A1
C1
N
B1
P
D
A
M
C
B

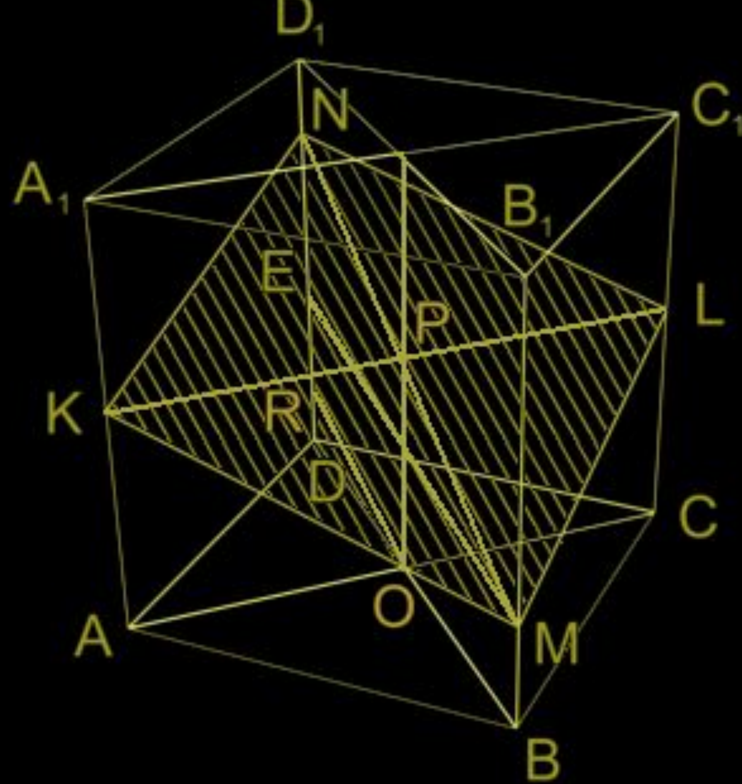

D
M
N
C
S
A
P
Q
B

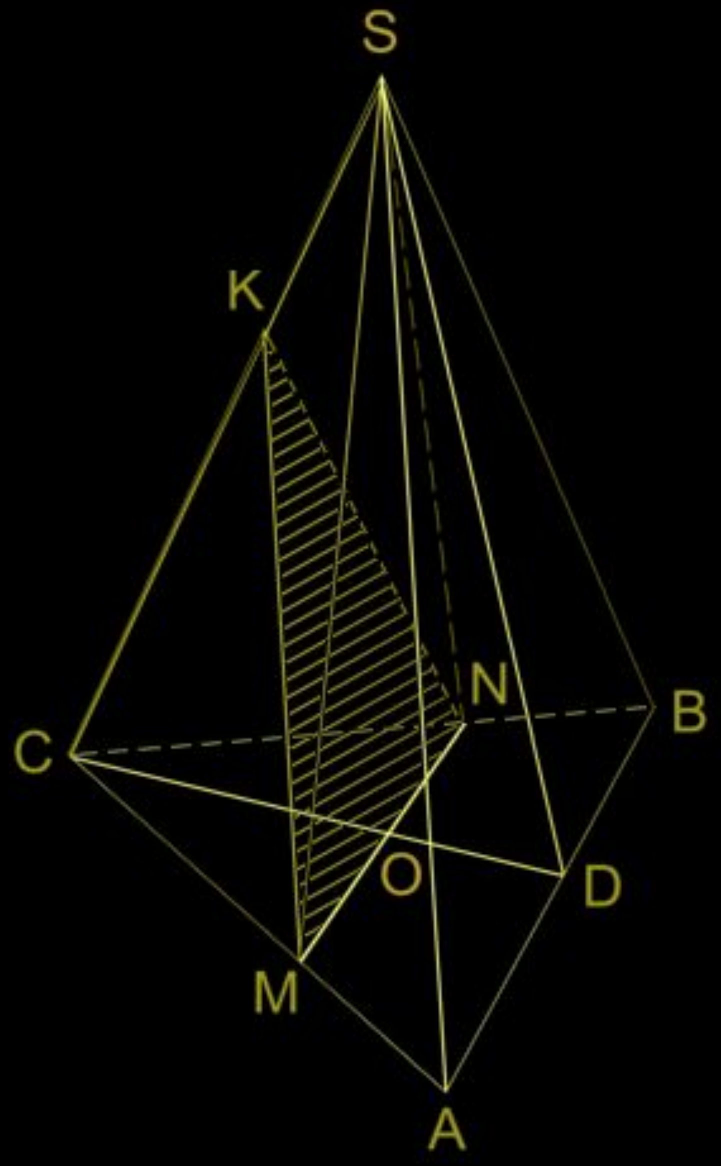

D
S1
M
N
A
S2
C
S3
B

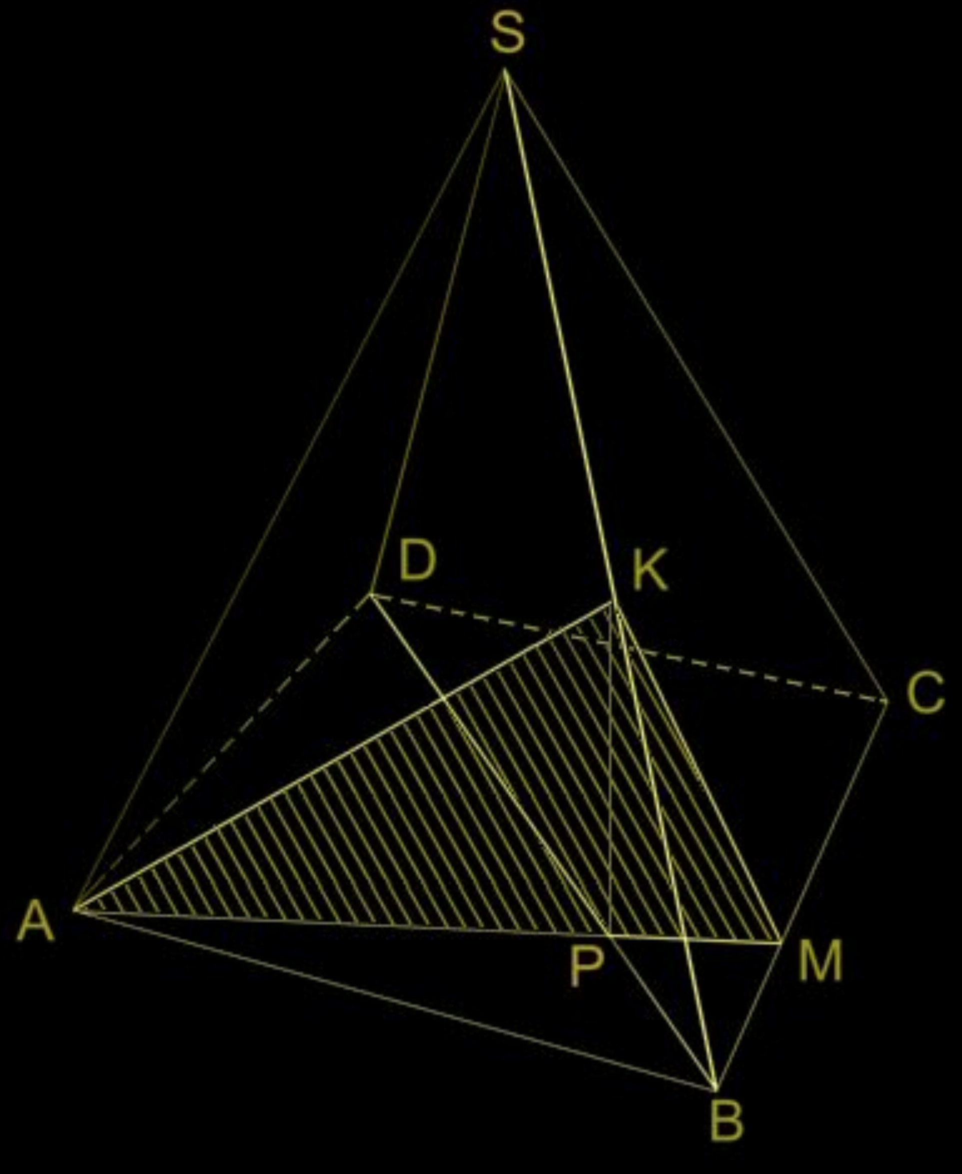

C
Q
P
A
D
M
N
B

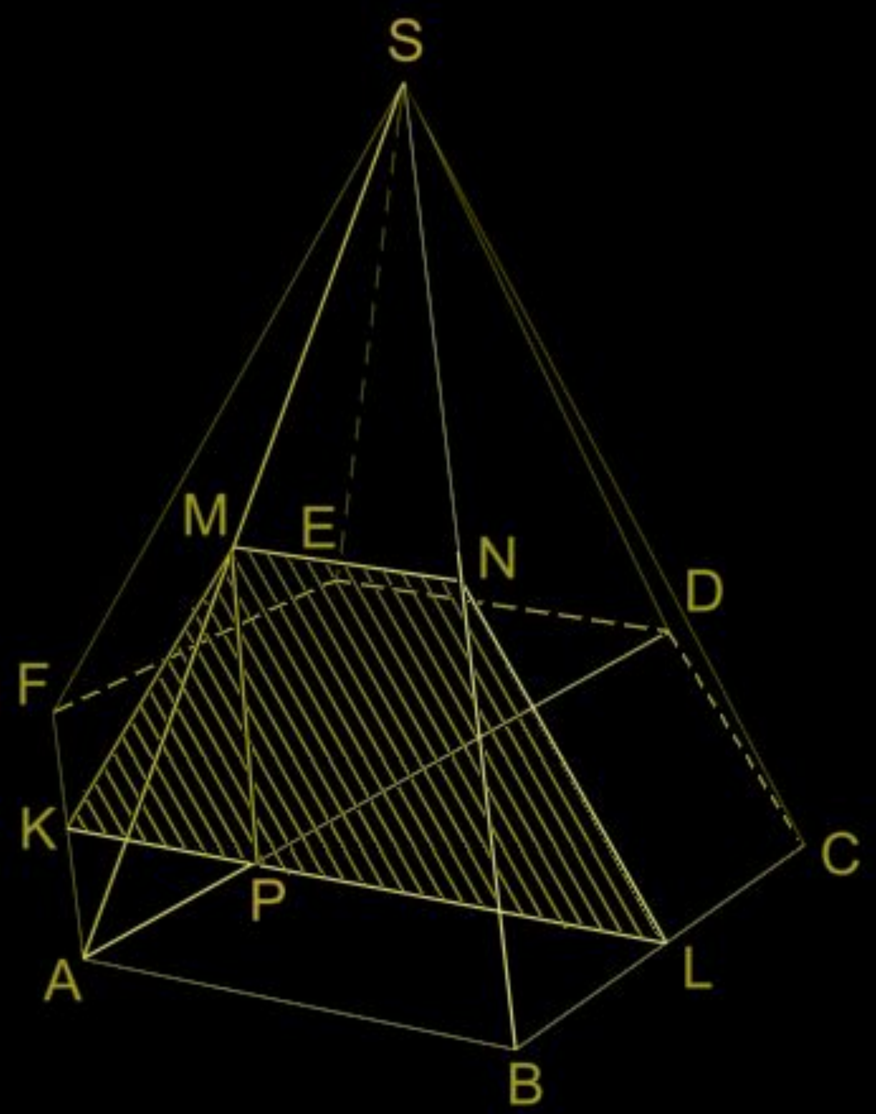

S
L
K
D
P
O
C
A
N
F
M
B

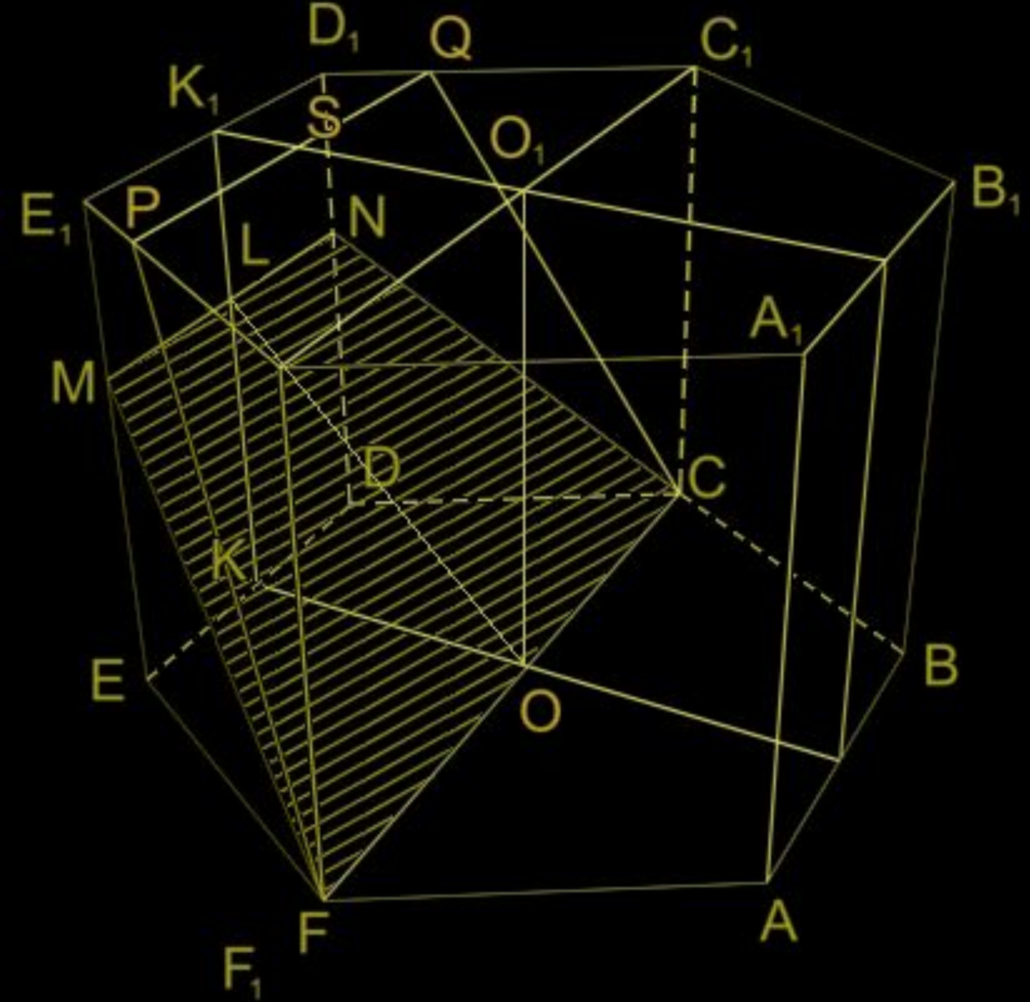

S
L
P
K
Q
D
C
E
O
A
M
F
N
B


D1
N
C1
A1
B1
E
L
P
K
R
D
C
O
A
M
B


S
K
N
B
C
O
D
M
A


S
D
K
C
A
P
M
B


S
M
E
N
D
F
K
C
P
L
A
B


D1
Q
C1
K1
S
O1
B1
E1
P
N
L
A1
M
D
C
K
E
B
O
F
A
F1