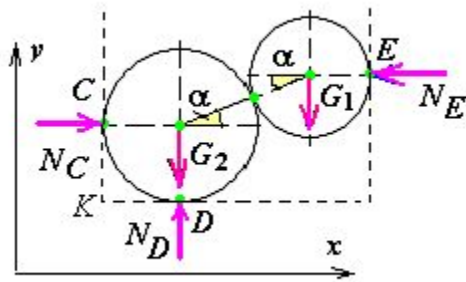


Бондаренко А.Н.

Курс лекций по теоретической механике

Статика



Электронный учебный курс написан на основе лекций, читавшихся автором для студентов, обучавшихся по специальностям СЖД, ПГС и СДМ в НИИЖТе и МИИТе (1974-2006 гг.). Учебный материал соответствует календарным планам в объеме трех семестров.

Для полной реализации анимационных эффектов при презентации необходимо использовать средство просмотра Power Point не ниже, чем встроенный в Microsoft Office операционной системы Windows-XP Professional. Запуск презентации – F5, навигация – Enter, навигационные клавиши, щелчок мыши, кнопки.

Завершение – Esc.

Замечания и предложения можно послать по e-mail: bond@miit.ru.

Москва - 2007

■ Лекция 3.

Произвольная плоская система сил.

Момент силы относительно точки.

Пара сил. Теоремы о парах.

Метод Пуансо.

Главный вектор и главный момент.

Уравнения равновесия.

Три формы уравнений равновесия.

Теорема Вариньона.

Лекция 3

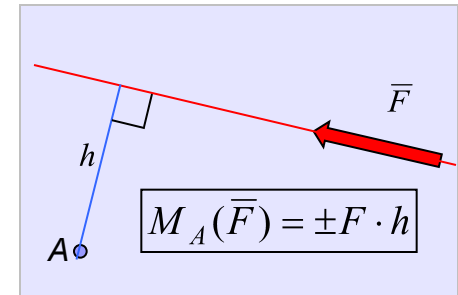
- **Плоская произвольная система сил** – силы лежат в одной плоскости и их линии действия не пересекаются в одной точке.

Для рассмотрения такой системы сил необходимо ввести новые понятия:

1. Момент силы относительно точки на плоскости.
2. Пара сил. Момент пары сил.

- **Момент силы относительно точки на плоскости** – алгебраическая величина, равная произведению модуля силы на плечо, взятая со знаком + (плюс), если вращение плоскости под действием силы происходит против часовой стрелки, и со знаком – (минус) в противном случае.

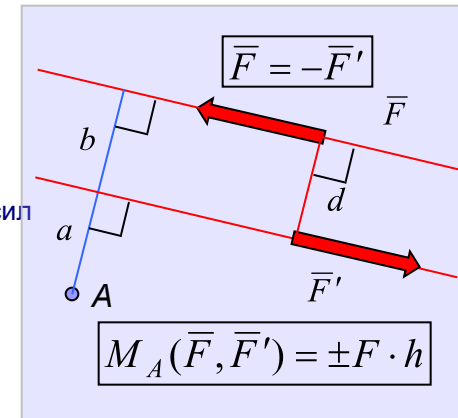
Плечо силы – длина перпендикуляра, опущенного из точки на линию действия силы.



- **Пара сил** – совокупность двух параллельных друг другу сил, равных по величине и направленных в противоположные стороны. Пара сил более не может быть упрощена (не может быть заменена одной силой) и представляет собой новую силовую характеристику механического взаимодействия.

- **Момент пары сил на плоскости (теорема о моменте пары сил)** – не зависит от выбора центра приведения (полюса) и равен произведению модуля любой из сил пары на плечо пары, взятым со знаком + (плюс), если вращение плоскости под действием пары сил происходит против часовой стрелки, и со знаком – (минус) в противном случае.

Плечо пары сил – длина перпендикуляра, опущенного из любой точки на линии действия одной из сил пары на линию действия другой силы этой пары.



В независимости момента пары от выбора полюса можно убедиться вычислением суммы моментов от каждой из сил относительно любого центра.

$$M_A(\bar{F}, \bar{F}') = F \cdot (a + b) - F'a = Fb = Fd$$

- **Теоремы о парах:** (Теоремы приводятся без доказательств. Подробные доказательства с графической анимацией см. демонстрационную программу автора по теории пар “Теория пар” на сайте МИИТа. [Посмотреть...](#))

- **О переносе пары сил в плоскости ее действия** – Пару сил можно перенести в любое место в плоскости ее действия. Кинематическое состояние тела не изменится.

- **Об эквивалентности пар сил** – Пару сил можно заменить другой парой сил, если их моменты алгебраически равны. Кинематическое состояние тела не изменится.

$$M(\bar{F}_1, \bar{F}'_1) = F_1 d_1, \quad M(\bar{F}_2, \bar{F}'_2) = F_2 d_2; \quad F_1 d_1 = F_2 d_2 \Rightarrow (\bar{F}_1, \bar{F}'_1) \equiv (\bar{F}_2, \bar{F}'_2)$$

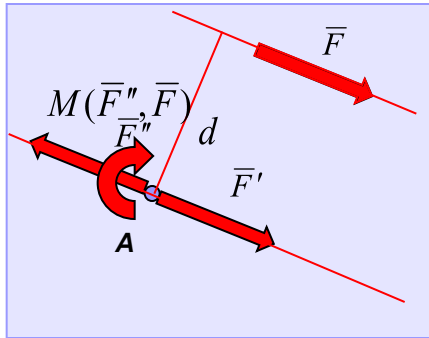
- **О сложении пар сил на плоскости** – Систему пар сил на плоскости можно заменить одной парой, момент которой равен алгебраической сумме моментов исходных пар. Кинематическое состояние тела не изменится.

- **Условие равновесия системы пар сил** -

$$M = \sum M_i = 0$$

Лекция 3 (продолжение – 3.2)

Приведение силы к заданному центру (метод Пуансо) – силу можно перенести параллельно самой себе в любую точку плоскости, если добавить соответствующую пару сил, момент которой равен моменту этой силы относительно рассматриваемой точки.



Добавим к системе в точке A две силы, равные по величине между собой и величине заданной силы, направленные по одной прямой в противоположные стороны и параллельные заданной силе:

$$\bar{F}'' = -\bar{F} \quad \text{Кинематическое состояние не изменилось (аксиома о присоединении).}$$

Исходная сила и одна из добавленных сил противоположно направленная образуют пару сил.

Момент этой пары численно равен моменту исходной силы относительно центра приведения.

$$M(\bar{F}'', \bar{F}) - F \cdot d = -F \cdot h = M_A(\bar{F})$$

Во многих случаях пару сил удобно изображать дуговой стрелкой.

Приведение плоской произвольной системы сил к заданному центру – выбираем произвольную точку на плоскости и каждую из сил переносим по методу Пуансо в эту точку. Вместо исходной произвольной системы получим сходящуюся систему сил и систему пар.

Сходящаяся система сил приводится к одной силе, называемой равнодействующей, но теперь эта сила (или система пар), момент которой равен алгебраической сумме моментов сил относительно центра приведения.

В общем случае плоская произвольная система сил приводится к одной силе, называемой главным вектором и к паре с моментом, равным главному моменту всех сил системы относительно центра приведения:

$$\bar{R}^* = \sum \bar{F}_i \quad \text{Главный вектор,}$$

$$M = M_A = \sum M_{iA} \quad \text{Главный момент.}$$

Условием равновесия плоской произвольной системы сил является одновременное обращение главного вектора и главного момента системы в ноль:

$$\bar{R}^* = \sum \bar{F}_i = 0$$

$$M = M_A = \sum M_{iA} = 0$$

Уравнения равновесия (I форма) получаются в виде системы трех уравнений из условий равновесия с использованием выражений для проекций главного вектора:

$$\begin{cases} \sum X_i = 0; \\ \sum Y_i = 0; \\ \sum M_{iA} = 0 \end{cases}$$

Существуют еще две формы уравнений Равновесия (II и III формы):

$$\begin{cases} \sum X_i = 0; \\ \sum M_{iB} = 0; \\ \sum M_{iA} = 0 \end{cases} \begin{matrix} x \\ \perp \\ AB \end{matrix}$$

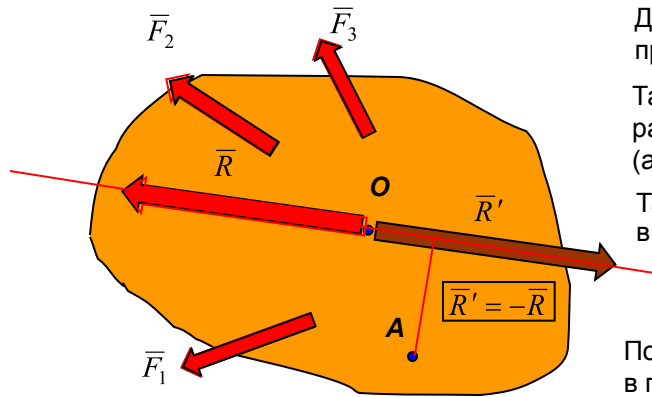
$$\begin{cases} \sum M_{iC} = 0; \\ \sum M_{iB} = 0; \\ \sum M_{iA} = 0 \end{cases} \begin{matrix} C \\ \notin \\ AB \end{matrix}$$

Лекция 3 (продолжение – 3.3)

Следует обратить внимание на то, что II и III формы уравнений равновесия имеют **ограничения**, связанные с выбором одной из осей, например, x , и точки C относительно положения точек A и B . Ограничения, накладываемые на выбор оси x (**не перпендикулярно AB**) и точки C (**не лежит на AB**), гарантируют, что ни одно из уравнений не обращается в тождество, при выполнении двух других уравнений.

$\sum X_i = 0;$	x	$\sum M_{iC} = 0;$	C
$\sum M_{iB} = 0;$	\perp	$\sum M_{iB} = 0;$	\notin
$\sum M_{iA} = 0$	AB	$\sum M_{iA} = 0$	AB

Теорема Вариньона о моменте равнодействующей – Если система сил имеет равнодействующую, то момент этой равнодействующей относительно любого центра равен алгебраической сумме моментов сил системы относительно того же центра.



Доказательство: Пусть система сил $F_1, F_2, F_3 \dots$ приводится к равнодействующей, приложенной в точке O .

Такая система не находится в равновесии ($R \neq 0$). Уравновесим эту систему силой R' , равной равнодействующей R , направленной по линии ее действия в противоположную сторону (аксиома о двух силах).

Таким образом, система исходных сил $F_1, F_2, F_3 \dots$ и уравновешивающей силы R' находится в равновесии и должна удовлетворять уравнениям равновесия, например:

$$\sum M_{iA} + M_A(R') = 0$$

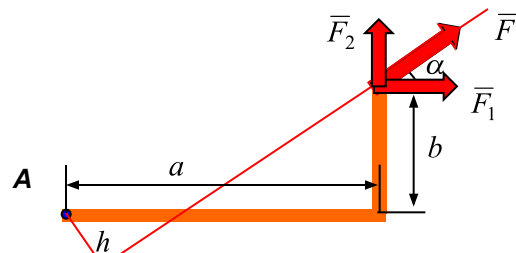
Поскольку сила R' , равна равнодействующей R и направлена по линии ее действия в противоположную сторону, то $M_A(R') = -M_A(R)$. Подстановка этого равенства в уравнение равновесия дает:

$$\sum M_{iA} - M_A(R) = 0$$

$$M_A(R) = \sum M_{iA}$$

Примеры использования теоремы о моменте равнодействующей:

1. Определение момента силы относительно точки, когда сложно вычислять плечо силы. Например:



Силу F разложим на составляющие F_1 и F_2 . Тогда момент силы F относительно точки A можно вычислить как сумму моментов каждой из сил относительно этой точки:

$$M_A(F) = -F_1 b + F_2 a = -(F \cos \alpha) b + (F \sin \alpha) a$$

2. Доказательство необходимости ограничений для II и III форм уравнений равновесия:

Если $\sum M_{iA} = 0$ система приводится к равнодействующей, при этом она проходит через

точку A , т.к. ее момент относительно этой точки должен быть равен нулю (теорема Вариньона).

Если при этом $\sum M_{iB} = 0$ равнодействующая должна также проходить через точку B .

Тогда проекция равнодействующей на ось, перпендикулярную AB , и момент равнодействующей относительно точки, лежащей на AB , будут тождественно равны нулю при любом значении равнодействующей.

