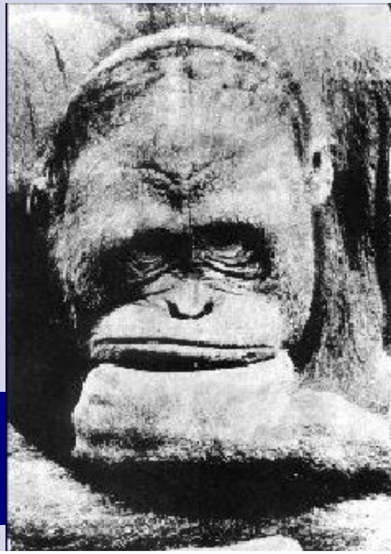
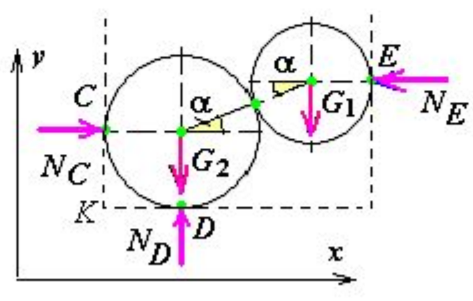
Московский государственный университет путей сообщения (МИИТ)
Кафедра теоретической механики
Научно-технический центр транспортных технологий



Бондаренко А.Н.

Курс лекций по теоретической механике



Статика

Электронный учебный курс написан на основе лекций, читавшихся автором для студентов, обучавшихся по специальностям СЖД, ПГС и СДМ в НИИЖТе и МИИТе (1974-2006 гг.). Учебный материал соответствует календарным планам в объеме трех семестров.

Для полной реализации анимационных эффектов при презентации необходимо использовать средство просмотра Power Point не ниже, чем встроенный в Microsoft Office операционной системы Windows-XP Professional. Запуск презентации – F5, навигация – Enter, навигационные клавиши, щелчок мыши, кнопки.
Завершение – Esc.
Замечания и предложения можно послать по e-mail: bond@miit.ru .

Москва - 2007

- **Лекция 3**.

Произвольная плоская система сил. Момент силы относительно точки.

Пара сил. Теоремы о парах.

Метод Пуансо.

Главный вектор и главный момент. Уравнения равновесия.

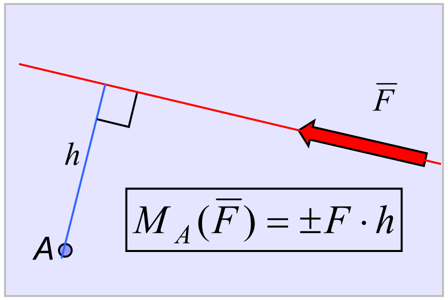
Три формы уравнений равновесия. Теорема Вариньона.

Лекция 3

- **Плоская произвольная система сил –** силы лежат в одной плоскости и их линии действия не пересекаются в одной точке**.**

Для рассмотрения такой системы сил необходимо ввести новые понятия:

1. Момент силы относительно точки на плоскости.
2. Пара сил. Момент пары сил.



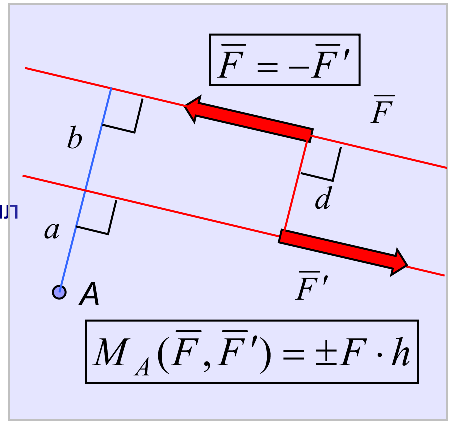
- **Момент силы относительно точки на плоскости –** алгебраическая величина, равная произведению модуля силы на плечо, взятая со знаком + (плюс), если вращение плоскости под действием силы происходит против часовой стрелки, и со знаком – (минус) в противном случае.

  Плечо силы – длина перпендикуляра, опущенного из точки на линию действия силы.

- **Пара сил –** совокупность двух параллельных друг другу сил, равных по величине и направленных в противоположные стороны. Пара сил более не может быть упрощена (не может быть заменена одной силой) и представляет собой новую силовую характеристику механического взаимодействия.

- **Момент пары сил на плоскости** (теорема о моменте пары сил) **–** не зависит от выбора центра приведения (полюса) и равен произведению модуля любой из сил пары на плечо пары, взятым со знаком + (плюс), если вращение плоскости под действием пары сил происходит против часовой стрелки, и со знаком – (минус) в противном случае.

  Плечо пары сил – длина перпендикуляра, опущенного из любой точки на линии действия одной из сил пары на линию действия другой силы этой пары.



В независимости момента пары от выбора полюса можно убедиться вычислением суммы моментов от каждой из сил относительно любого центра.

$$\boxed{M_A(\overline{F}, \overline{F}') = F \cdot (a+b) - F'a = Fb = Fd}$$

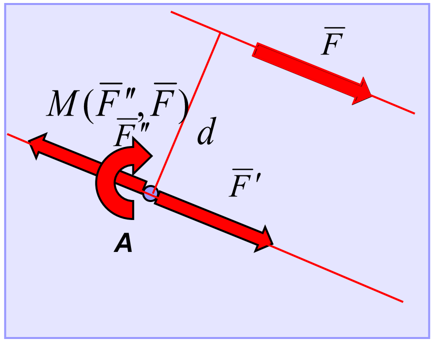
- **Теоремы о парах:** (Теоремы приводятся без доказательств. Подробные доказательства с графической анимацией см. демонстрационную программу автора по теории пар "Теория пар" на сайте МИИТа. Посмотреть…)
- **О переносе пары сил в плоскости ее действия** – Пару сил можно перенести в любое место в плоскости ее действия. Кинематическое состояние тела не изменится.
- **Об эквивалентности пар сил** – Пару сил можно заменить другой парой сил, если их моменты алгебраически равны. Кинематическое состояние тела не изменится.

$$\boxed{M(\overline{F}_1, \overline{F}_1') = F_1 d_1, \quad M(\overline{F}_2, \overline{F}_2') = F_2 d_2; \quad F_1 d_1 = F_2 d_2 \Rightarrow (\overline{F}_1, \overline{F}_1') \equiv (\overline{F}_2, \overline{F}_2')}$$

- **О сложении пар сил на плоскости** – Систему пар сил на плоскости можно заменить одной парой, момент которой равен алгебраической сумме моментов исходных пар. Кинематическое состояние тела не изменится.
- **Условие равновесия системы пар сил -**

$$\boxed{M = \sum M_i = 0}$$

- **Приведение силы к заданному центру (метод Пуансо)** – силу можно перенести параллельно самой себе в любую точку плоскости, если добавить соответствующую пару сил, момент которой равен моменту этой силы относительно рассматриваемой точки.



Добавим к системе в точке *A* две силы, равные по величине между собой и величине заданной силы, направленные по одной прямой в противоположные стороны и параллельные заданной силе:

$\boxed{\overline{F}'' = -\overline{F}' = -\overline{F}}$ Кинематическое состояние не изменилось (аксиома о присоединении).

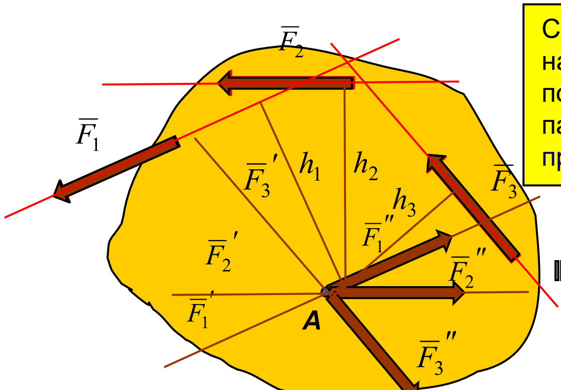
Исходная сила и одна из добавленных сил противоположно направленная образуют пару сил.

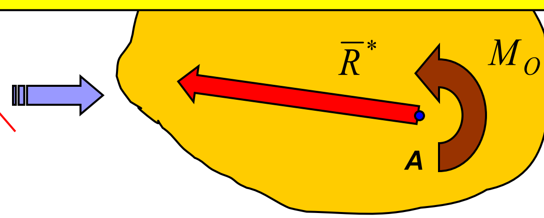
Момент этой пары численно равен моменту исходной силы относительно центра приведения.

$$\boxed{M(\overline{F}'',\overline{F}) - F \cdot d = -F \cdot h = M_A(\overline{F})}$$

Во многих случаях пару сил удобно изображать дуговой стрелкой.

- **Приведение плоской произвольной системы сил к заданному центру** – выбираем произвольную точку на плоскости и каждую из сил переносим по методу Пуансо в эту точку. Вместо исходной произвольной системы получим сходящуюся систему сил и систему пар.





Сходящаяся система сил приводится к одной … называлась равнодействующей, но теперь эта … после приведения возникла система пар. Сис… пар), момент которой равен алгебраической с… приведения.

В общем случае плоская произвольная система сил приводится к одной силе, называемой главным вектором и к паре с моментом, равным главному моменту всех сил системы относительно центра приведения:

$\boxed{\overline{R}^* = \sum \overline{F}_i}$ **- главный вектор,**

$\boxed{M = M_A = \sum M_{iA}}$ **- главный момент.**

- **Условием равновесия плоской произвольной системы сил** является одновременное обращение главного вектора и главного момента системы в ноль:

$$\boxed{\overline{R}^* = \sum \overline{F}_i = 0} \qquad \boxed{M = M_A = \sum M_{iA} = 0}$$

- **Уравнения равновесия (I форма)** получаются в виде системы трех уравнений из условий равновесия с использованием выражений для проекций главного вектора:

$$\boxed{\begin{array}{l} \sum X_i = 0; \\ \sum Y_i = 0; \\ \sum M_{iA} = 0 \end{array}}$$

Существуют еще две формы уравнений Равновесия (II и III формы):

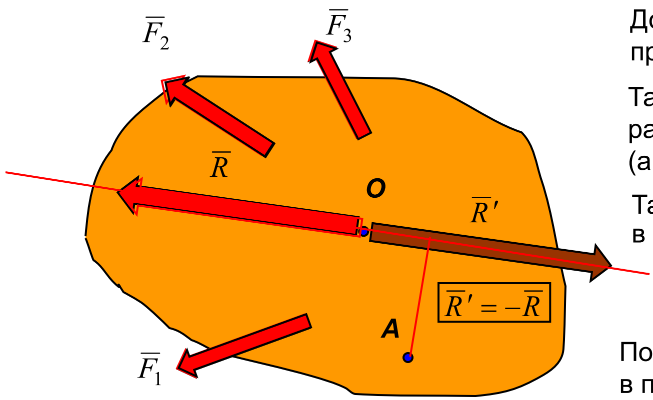
$$\boxed{\begin{array}{l} \sum X_i = 0; \\ \sum M_{iB} = 0; \\ \sum M_{iA} = 0 \end{array}} \boxed{\begin{array}{l} x \\ \perp \\ AB \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{l} \sum M_{iC} = 0; \\ \sum M_{iB} = 0; \\ \sum M_{iA} = 0 \end{array}} \boxed{\begin{array}{l} C \\ \notin \\ AB \end{array}}$$

Лекция 3 (продолжение – 3.3)

Следует обратить внимание на то, что II и III формы уравнений равновесия имеют **ограничения**, связанные с выбором одной из осей, например, *x*, и точки *C* относительно положения точек *A* и *B*. Ограничения, накладываемые на выбор оси *x* (**не перпендикулярно *AB***) и точки *C* (**не лежит на AB**), гарантируют, что ни одно из уравнений не обращается в тождество, при выполнении двух других уравнений.

$$\boxed{\begin{aligned}&\sum X_i = 0;\\ &\sum M_{iB} = 0;\\ &\sum M_{iA} = 0\end{aligned}} \boxed{\begin{aligned}&x\\ &\not\perp\\ &AB\end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned}&\sum M_{iC} = 0;\\ &\sum M_{iB} = 0;\\ &\sum M_{iA} = 0\end{aligned}} \boxed{\begin{aligned}&C\\ &\not\in\\ &AB\end{aligned}}$$

- **Теорема Вариньона о моменте равнодействующей –** Если система сил имеет равнодействующую, то момент этой равнодействующей относительно любого центра равен алгебраической сумме моментов сил системы относительно того же центра.



Доказательство: Пусть система сил $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, $\boldsymbol{F}_3$ … приводится к равнодействующей, приложенной в точке *O*.

Такая система не находится в равновесии ($\boldsymbol{R} \neq 0$). Уравновесим эту систему силой ***R'***, равной равнодействующей ***R***, направленной по линии ее действия в противоположную сторону (аксиома о двух силах).

Таким образом, система исходных сил $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, $\boldsymbol{F}_3$ … и уравновешивающей силы ***R'*** находится в равновесии и должна удовлетворять уравнениям равновесия, например:

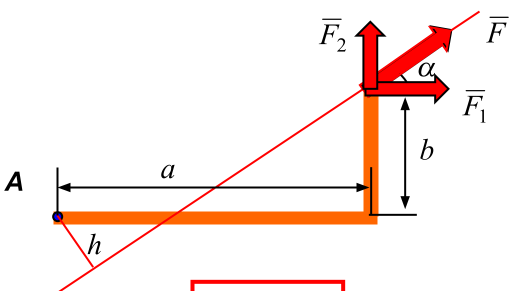
$$\boxed{\sum M_{iA} + M_A(R') = 0}$$

Поскольку сила ***R'***, равна равнодействующей ***R*** и направлена по линии ее действия в противоположную сторону, то $M_A(\boldsymbol{R}') = -M_A(\boldsymbol{R})$. Подстановка этого равенства в уравнение равновесия дает:

$$\boxed{\sum M_{iA} - M_A(R) = 0} \quad \text{или} \quad \boxed{M_A(R) = \sum M_{iA}}$$

Примеры использования теоремы о моменте равнодействующей:

1. Определение момента силы относительно точки, когда сложно вычислять плечо силы. Например:

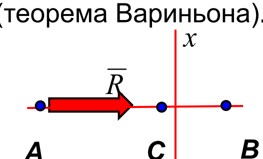


Силу ***F*** разложим на составляющие $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$. Тогда момент силы ***F*** относительно точки *A* можно вычислить как сумму моментов каждой из сил относительно этой точки:

$$M_A(F) = -F_1 b + F_2 a = -(F\cos\alpha)b + (F\sin\alpha)a$$

2. Доказательство необходимости ограничений для II и III форм уравнений равновесия:
Если $\boxed{\sum M_{iA} = 0}$, то система приводится к равнодействующей, при этом она проходит через точку *A*, т.к. ее момент относительное этой точки должен быть равен нулю (теорема Вариньона).

Если при этом $\boxed{\sum M_{iB} = 0}$, то равнодействующая должна также проходить через точку *B*.



Тогда проекция равнодействующей на ось, перпендикулярную *AB*, и момент равнодействующей относительно точки, лежащей на AB, будут тождественно равны нулю при любом значении равнодействующей.