Методы неявного перебора

Постановка задачи

Рассмотрим общую постановку задачи *дискретной* оптимизации

$$\min_{x \in D} f(x),$$

где n-мерный вектор $x \in$ ***конечному*** мн. доп. решений D.

$\Rightarrow$ можно перебрать все решения и выбрать opt…

В методах ***неявного*** перебора доп. мн. решений разбивается на не $\varnothing$ подмн. < мощности. Затем анализируется возможность исключения этих подмн., а также улучшения найденного доп. решения (рекорда).
В результате возможно сокращение перебора доп. решений.

- Метод ветвей и границ
- Аддитивный алгоритм Балаша.

Метод ветвей и границ (МВГ)

Ветвлением мн. $d \subseteq D$ наз. функцию $b : d \to \{d_1, \ldots, d_N\}, d_k \subset d, d_k \neq \varnothing, \bigcup_{k=1}^{N} d_k = d, \ k = 1, \ldots, N,$ разбивающую мн. d на *несобственные* подмн.

Числовая функция H наз. ***нижней границей*** функционала f на мн. d, если:

1) $H(d) \leq \min_{x \in d} f(x);$

2) $H(\{x\}) = f(x), \ \{x\}$ – одноэлементное мн.

Наз. ***рекордом***, и обозн. его x^0, наилучшее из найденных доп. решение. Величина $f(x^0)$ является верхней границей (ВГ) функционала задачи. Сначала рекорд x^0 либо произвольное доп. решение, либо не известен.

Правила отсечения

МВГ последовательно выполняет итерации (шаги).
На очер. итер. выбирается и проверяется нек. не отсеченное мн.
В результате оно либо отбрасывается (отсекается), либо разбивается на непустые подмн. < мощности (ветвится).

Пусть t_1, ..., t_L мн. не отсеченных подмн. решений.
(первоначально $L = 1$, $t_1 = D$.)

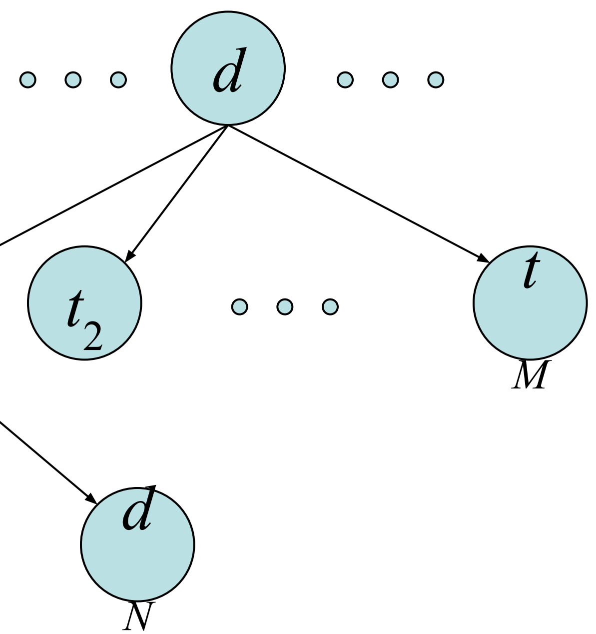
Мн. t_i, $1 \le i \le L$ *отсекается* в одном из 2-х, *последовательно проверяемых*, случаев:
a) если $H(t_i) \geq f(x^0)$;
b) если $H(\{t_i\}) = f(t_i) < f(x^0)$. Т.е. 1-элем. мн. отсекается всегда.
Последнее неравенство имеет место, т.к. 1-элем. мн. не было удалено по критерию a). Значит, в случае b) происходит смена рекорда $x^0 = t_i$ и ВГ $f(x^0)$.

Ветвление

Если $t_1,\ldots,t_M$, $M \le L$ − не проверенные подмн., то:

- если $M = 0$, то x^0 − opt реш. задачи, и алг. останавливается;
- если $M > 0$, то среди мн. $t_1,\ldots,t_M$ выбираем *перспективное* подмн., пусть это t_1, и осуществляем его ветвление. Получим подмн. $d_1,\ldots,d_N$, $t_2,\ldots,t_M$, $L=N+M-1$.

Перенумеруем эти подмн. числами 1, …, L и повторим шаг алг.



Корректность алгоритма

Теорема. *Приведенный алгоритм МВГ находит решение задачи за конечное число шагов.*

Доказательство. *Конечность* алг. $\Rightarrow$ из след. 4 свойств:

1) На каж. шаге выбранное подмн. либо удаляется, либо разбивается на непустые подмн. < мощности.
2) 1-элем. мн. исключаются всегда.
3) Подмн. не проверяются > 1 раза.
4) Исходное мн. доп. решений D конечно.

Докажем opt найденного решения. Предположим противное: после остановки алгоритма, рекорд x^0 не является opt решением задачи. Значит,

$$f(x^0) > \min_{x \in D} f(x) = f(x^*) \qquad (*)$$

$\Rightarrow$ на каком-то шаге opt решение x^* было удалено вместе с нек. мн. t на основании правила а), т.е. $H(t) \geq f(x^0)$. Значит, $f(x^*) \geq H(t) \geq f(x^0)$, что противоречит предположению (*).

Реализация МВГ

Если получение ВГ сопряжено с трудностями, тогда для быстрого нахождения рекорда следует применять ***схему одностороннего ветвления***, когда разбивается мн. min мощности.
$\Rightarrow$ 1-элем. мн. и доп. решение (1 рекорд) будут найдены быстро.

Мн., имеющее min НГ, может с большой вероятностью содержать решение, близкое (по функционалу) к opt, что приведет к получению хорошего рекорда (и ВГ). Выбор такого мн. для дальнейшего разбиения определяет ***схему всестороннего ветвления***.

Если при реализации алг. критической является память, тогда схема одностороннего ветвления предпочтительнее.

Реализация МВГ

Для решения МВГ конкретной задачи следует определить:

- способ представления подмн. решений;
- схему и способ ветвления;
- алг. вычисления НГ;
- метод нахождения рекорда.

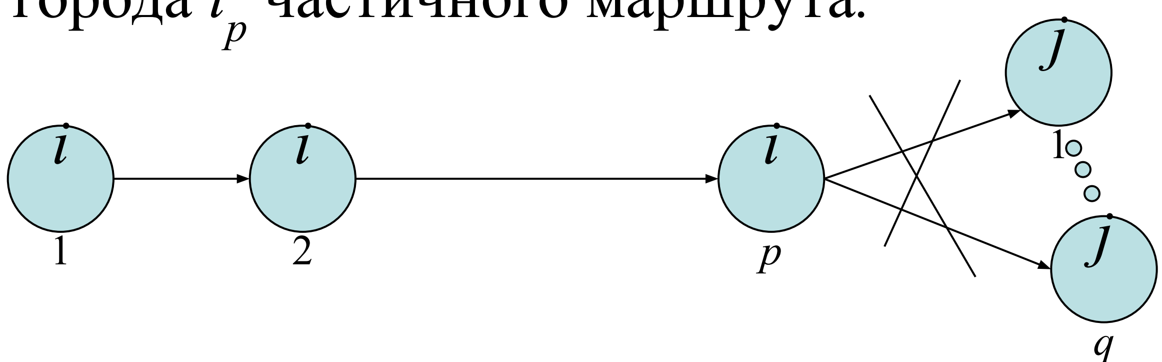
Время работы алг. зависит от многих факторов. Теоретически не исключен полный перебор решений. Практически же следует найти компромисс между точностью и сложностью вычисления НГ, что позволит найти решение, близкое к opt, за приемлемое время. Более точное вычисление НГ может позволить отсечь больше решений, но потребует и больше времени, что может привести к длительному выполнению 1 итерации.

МВГ для задачи КМ

Задан *полный* граф $G = (V, E)$, $V = \{1,\ldots,n\}$.
$\forall$ дуге $(i, j) \in E$ приписана длина $c_{ij} \geq 0$.
Требуется найти гамильтонов контур min длины.

Положим:
$\{i_1, \ldots, i_p\}$ – простой путь из вершины i_1 в вершину i_p;
$f(i_1, \ldots, i_n)$ – длина гамильтонова контура $\{i_1, \ldots, i_n, i_1\}$;
$i_1 = 1$.

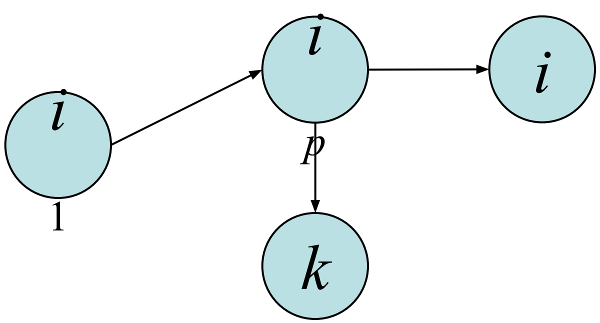
Подмн. решений представим 2 мн.:
- частичным маршрутом $I = \{i_1,\ldots,i_p\}$,
- списком $J = \{j_1,\ldots,j_q\} \subset V \setminus \{i_1,\ldots,i_p\}$ запрещенных переходов из последнего города i_p частичного маршрута.

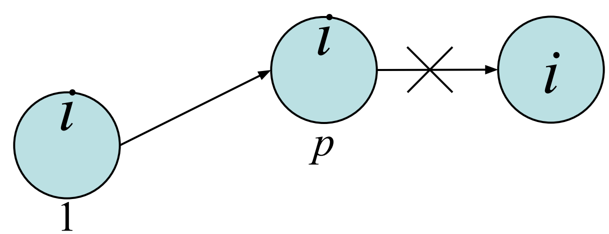


Ветвление

- Если $p < n - 1$, то $0 \le q \le n - p - 2$.
- Если же $p = n - 1$, то $q = 0$, т.е. мн. (I, J) определяют ед. решение.

Функция ветвления b делит мн. гам. контуров (I, J), на 2 подмн. Для этого выбирается некоторая вершина $i \in V' = V \setminus (I \cup J)$. Если кроме i в множестве V' $\exists!$ вершина k, то: $I = \{i_1, \ldots, i_p, i\}, J = \varnothing$, а другое мн. $I = \{i_1, \ldots, i_p, k\}, J = \varnothing$.





Если в $V' > 2$ эл., то 1 мн. $I = \{i_1, \ldots, i_p, i\}, J = \varnothing$, а 2 мн. $I = \{i_1, \ldots, i_p\}, J = \{j_1, \ldots, j_q, i\}$.

Вычисление НГ

Введем матрицу $\|c'_{ij}\|, \quad i, j = 1,\dots,n$, где $c'_{ij} = c_{ij}$ для незапрещенных дуг, и $c'_{ij} = +\infty$ для запрещенных. Вычислим

$$\alpha_i = \min_{j=1,p+1,\dots,n} c'_{ij}, \quad i = p,\dots,n;$$

$$\beta_j = \min_{i=p,\dots,n} \{c'_{ij} - \alpha_i\}, \quad j = 1, p+1,\dots,n;$$

$$H(I,J) = \sum_{i=1}^{p-1} c_{i,i+1} + \sum_{i=p}^{n} \alpha_i + \sum_{j=p+1}^{n} \beta_j + \beta_1$$

Лемма. *Если $\{i_1, \dots, i_n, i_1\}$ – гам. контур мн. (I, J), то $f(i_1, \dots, i_n) \geq H(I, J)$.*

Доказательство. Из определения α_i и β_j имеем:

$$\sum_{l=p}^{n} c_{i_l,i_{l+1}} = \sum_{l=p}^{n} c'_{i_l,i_{l+1}} = \sum_{l=p}^{n} \underbrace{\left(c'_{i_l,i_{l+1}} - \alpha_{i_l} - \beta_{i_{l+1}}\right)}_{\geq 0} + \sum_{l=p}^{n} \alpha_{i_l} + \sum_{l=p}^{n} \beta_{i_{l+1}} \geq \sum_{i=p}^{n} \alpha_i + \sum_{j=p+1}^{n} \beta_j + \beta_1$$

Вычисление НГ

Функция $H(I,J)=\sum_{i=1}^{p-1} c_{i,i+1}+\sum_{i=p}^{n}\alpha_i+\sum_{j=p+1}^{n}\beta_j+\beta_1$ удовлетворяет и 2-му свойству НГ. $H(\{x\}) = f(x)$, т.к. в случае $p=n-1$, имеем $\alpha_{n\text{-}1} = c_{n\text{-}1,n}$, $\alpha_n = c_{n1}$, $\beta_1 = 0$, $\beta_n = 0$.

Выбор вершины i для ветвления мн. (I, J) …

Для *произвольного* мн. (I, J) можно найти доп. решение, например, используя жадный алгоритм: **“иди в ближайшую вершину, где еще не был”**, начиная с вершины p и учитывая запреты J…

Пример

	1	2	3	4	5
1	–	48	27	31	43
2	33	–	28	44	43
3	41	28	–	40	36
4	37	35	29	–	46
5	48	48	25	29	–

	1	2	3	4	5	***α***
1	–	48	27	31	43	27
2	33	–	28	44	43	28
3	41	28	–	40	36	28
4	37	35	29	–	46	29
5	48	48	25	29	–	25
β	5	0	0	4	8	

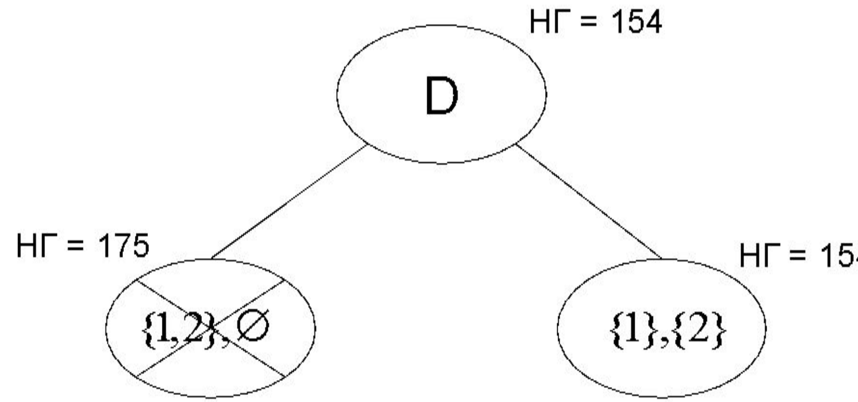
H=154
$f(1,3,2,5,4,1) = 164$

Пример

	1	2	3	4	5	*α*
1	–	48	27	31	43	—
2	33	–	28	44	43	28
3	41	28	–	40	36	36
4	37	35	29	–	46	29
5	48	48	25	29	–	25
β	5	—	0	4	0	

H=175

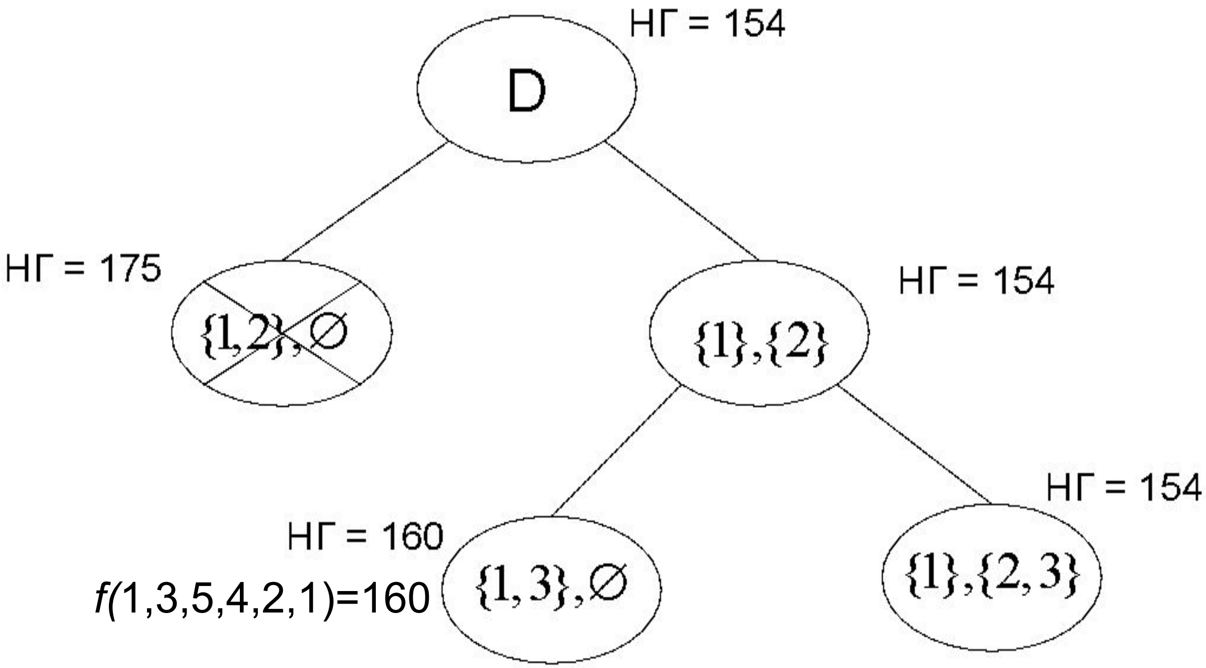
f(1,3,2,5,4,1) =164



	1	2	3	4	5	
1	–	48	27	31	43	
2	33	–	28	44	43	28
3	41	28	–	40	36	28
4	37	35	29	–	46	29
5	48	48	25	29	–	25
β	5	0	0	4	8	

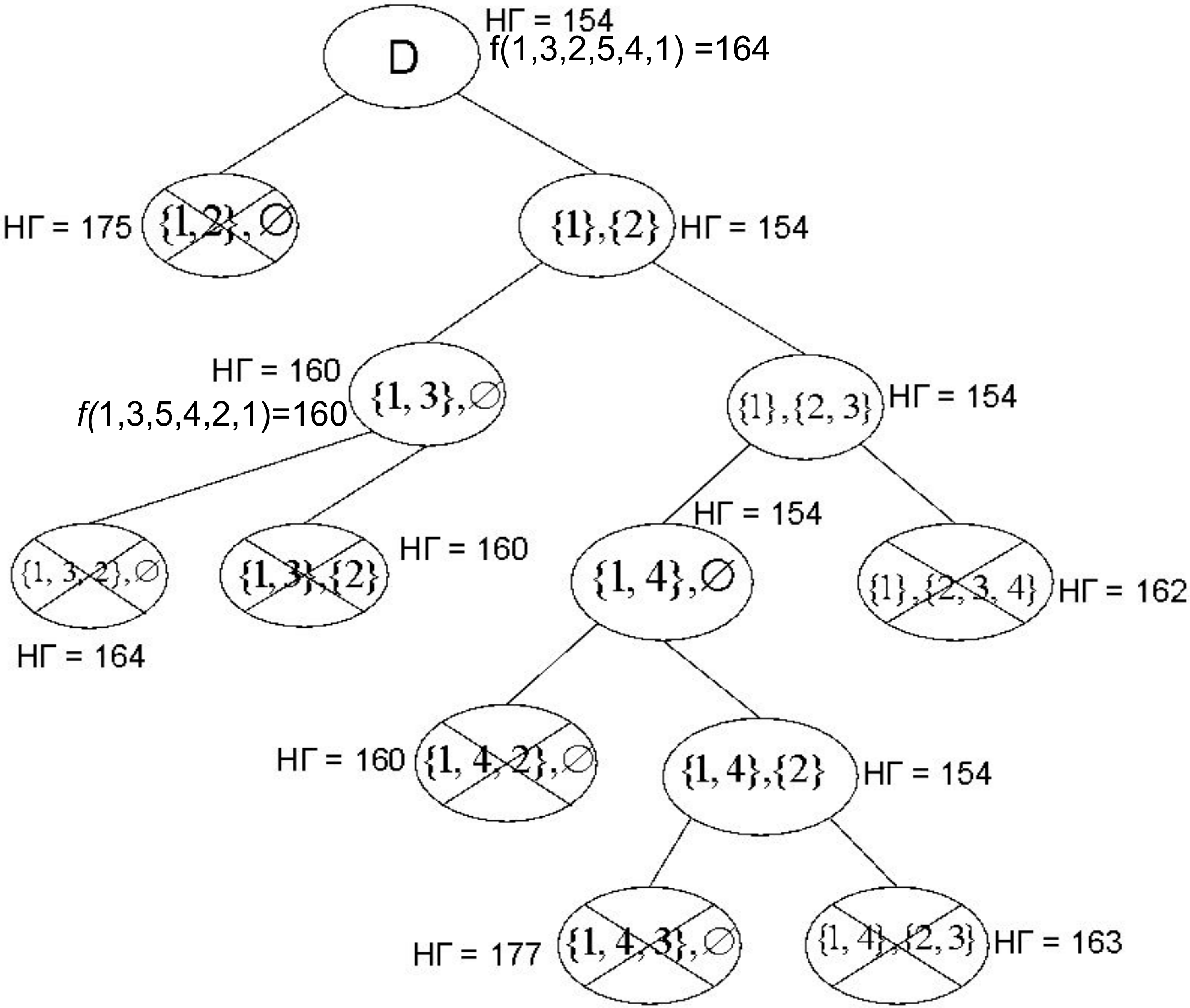
H=154

Пример



	1	2	3	4	5	***α***
1	–	48	27	31	43	—
2	33	–	28	44	43	33
3	41	28	–	40	36	28
4	37	35	29	–	46	35
5	48	48	25	29	–	29
β	0	0	—	0	8	

Пример

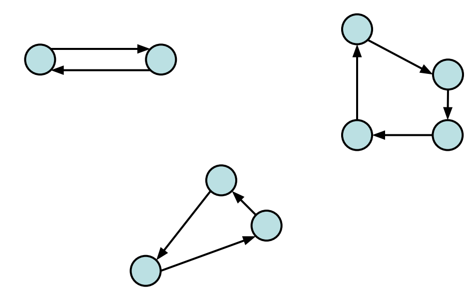

D
НГ = 154
f(1,3,2,5,4,1) =164
НГ = 175
{1,2}, ∅
{1},{2}
НГ = 154
НГ = 160
f(1,3,5,4,2,1)=160
{1, 3}, ∅
{1},{2, 3}
НГ = 154
НГ = 154
{1, 3, 2}, ∅
{1,3},{2}
НГ = 160
{1, 4}, ∅
{1},{2, 3, 4}
НГ = 162
НГ = 164
НГ = 160
{1, 4, 2}, ∅
{1, 4},{2}
НГ = 154
НГ = 177
{1, 4, 3}, ∅
{1, 4},{2, 3}
НГ = 163

2-й способ построения НГ для задачи КМ

Задача о назначениях. Имеется n работ и n исполнителей,
$c_{ij} \geq 0$ – затраты, связанные с назначением i-го исп. на j-ю работу.
Каждая работа должна быть выполнена 1 исполнителем, и каждый исполнитель должен выполнить 1 работу.
Требуется назначить исп. на работы : общие затраты min.
x_{ij}=1, если исполнитель i назначен на работу j;
x_{ij}=0 в противном случае.

$$
\begin{cases}
Z = \min\limits_{x_{ij} \in \{0,1\}} \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \\
\sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ji} = 1, \quad i = 1,\dots,n
\end{cases}
$$

$T=O(n^3)$.



Предположим, что c_{ij} = длине перехода $i \to j$ и положим
$c_{ii} = +\infty$, $i = 1, \dots, n$. $\Rightarrow$ Z является НГ для ц.ф. задачи КМ

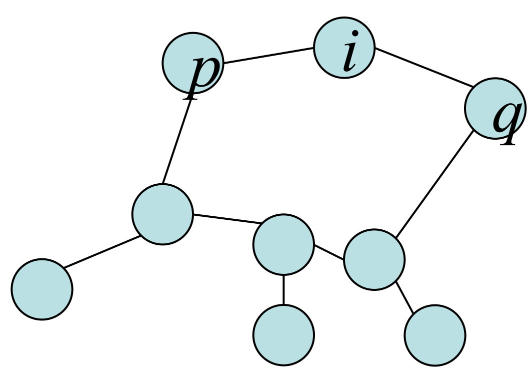
3-й способ построения НГ для задачи КМ

Пусть $c_{ij}=c_{ji}$, $i, j=1,\ldots,n$.

Рассмотрим произвольную в. i. На мн. $V\backslash\{i\}$ построим остовный граф T_i min веса $W(T_i)$. Пусть ребра (i, p) и (i, q) имеют min длину среди всех ребер, инцидентных i.

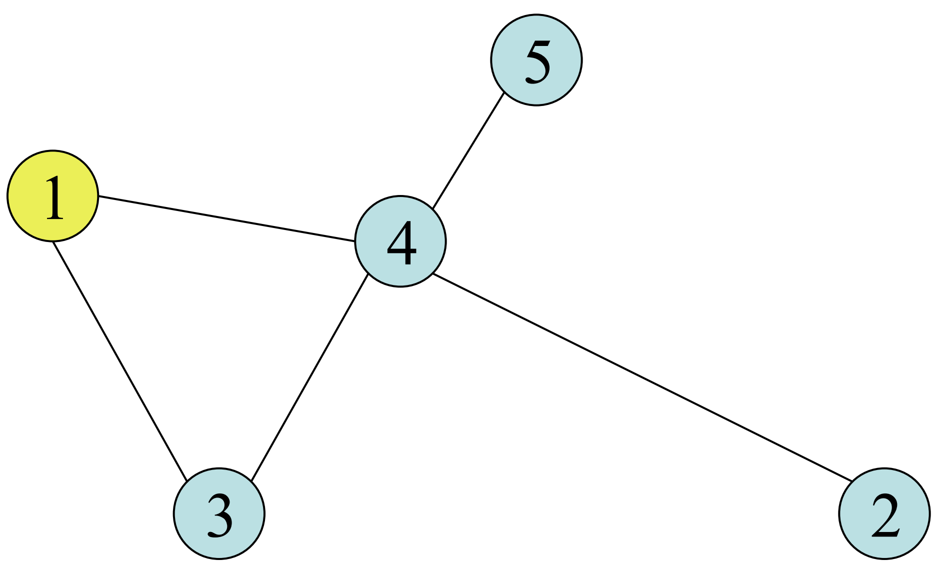
Граф $Q_i = T_i \cup \{(i, p)\} \cup \{(i, q)\}$ наз. 1-деревом для вершины i. Вес этого 1-дерева Q_i, равный $W(Q_i)=W(T_i)+c_{ip}+c_{iq}$, является НГ длины min гам. цикла.

Если выбрать вершину k: $W_1=W(Q_k) \geq W(Q_i)$, $i\in V$, то W_1 является лучшей (наибольшей) НГ, получаемой с помощью 1-деревьев. $\boldsymbol{T= O(n^3)}$



Пример построения 1-дерева

	1	2	3	4	5
1	–	10	4	3	4
2		–	7	6	6
3			–	4	8
4				–	2
5					–



НГ = 17

<u>Аддитивный алгоритм Балаша</u>

$$Z(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min_{x \in B^n}; \qquad (1)$$

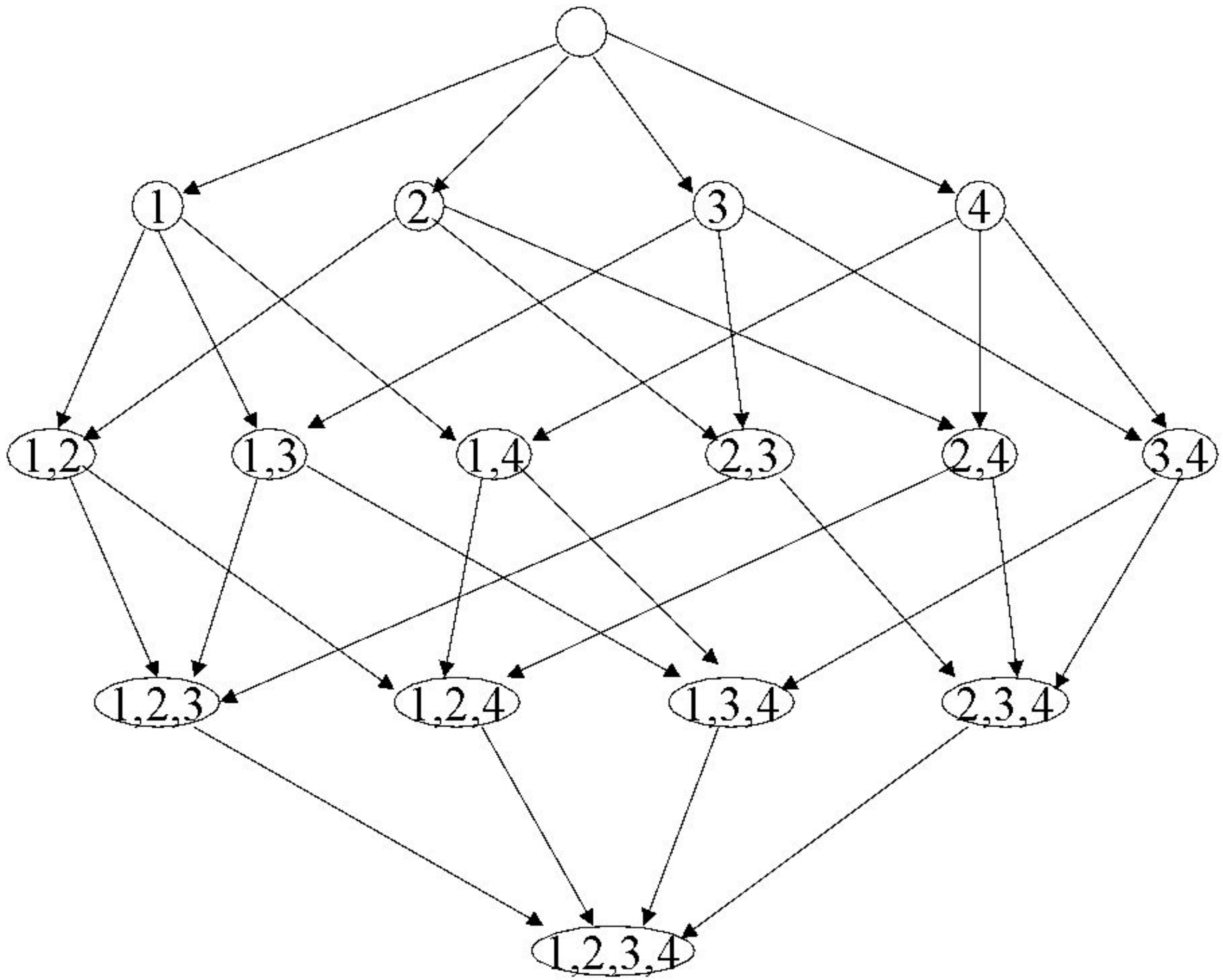
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i, \quad i = 1,\ldots,m. \qquad (2)$$

Наз. *решением* мн. $\{x_j : x_j=1, j\in N_1; x_j=0, j\in N\backslash N_1, N=\{1,\ldots,n\}\}$.
Решение является ***допустимым***, if выполняются неравенства (2).
Пусть $0\le c_1\le c_2\le\ldots\le c_n$. (if $\exists\ j : c_j<0$, то $\to y_j=1-x_j$)

Доп. решение x ***доминирует*** доп. решение y, если $Z(x) < Z(y)$.
Если решения доминируются лучшим найденным допустимым решением (рекордом), то их можно отбросить.

Диаграмма

2^n решений разобьем на $n+1$ подмн. с номерами k=0,1,…,n:
k-е подмножество содержит все решения с k переменными = 1 и $n-k$ переменными = 0.



<u>Упорядоченность решений</u>

- при k=0, подмн. решений состоит из 1 решения $x = 0$;
- при k=1, подмн. решений включает n решений, в которых x_i=1; x_j=0, $j \neq i$; i=1,…,n;
- k-е подмножество состоит из C_n^k решений.

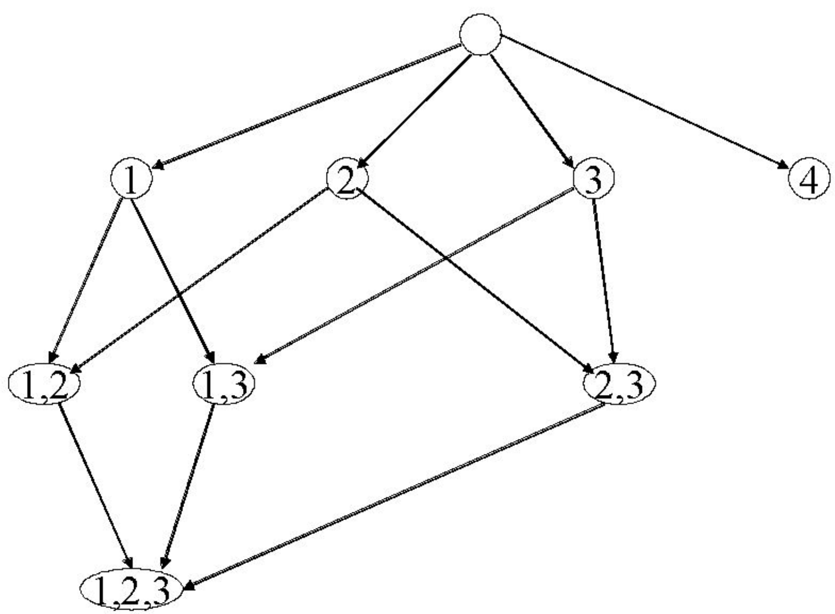
На диаграмме каж. вершина, содержащая список N_1, представляет решение, в котором переменные с индексами из N_1 равны 1, а остальные – 0. Так вершина (1,3) соответствует решению $x_1=x_3=1$; $x_2=x_4=0$.

Если в диаграмме $\exists$ путь из u в v, то в. u наз. *предшествующей* для в. v, а v - *следующей* за u.
$\Rightarrow$ решения частично упорядочены.

Алгоритм

Алгоритм начинает работу с вершины $x = 0$.
Затем просматривает след. за ней вершины.
Перебор может быть сокращен на основе различных правил:

Правило 1. Т.к. $0 \le c_1 \le c_2 \le \ldots \le c_n$, то зн. ц.ф. при переходе к след. решению может только возрасти. $\Rightarrow$ если нек. вер. соответствует доп. решению, то след. за ней вершины исключаются.



← допустимое

7 след. решений исключены

Правила отсечения

Правило 2. Пусть

- Z^* – min (рекордное) зн. ц.ф. на найденных доп. реш.,
- Z_Q – зн. ц.ф. в вершине V_Q , где x_j=1, $j \in Q$; x_j=0, $j \in N \backslash Q$.

Если для некоторого r имеет место неравенство $Z_Q + c_r > Z^*$, то достаточно проверять только те следующие вершины, в кот. $x_r = x_{r+1} = x_n = 0$ (в силу неравенств $0 \le c_1 \le c_2 \le \ldots \le c_n$).

Правило 3. Пусть вер. V_Q задает реш. x_j=1, $j \in Q$; x_j=0, $j \in N \backslash Q$.
$\Rightarrow$ все след. в. должны иметь x_j=1, $j \in Q$. Такие пер. наз. *фиксированными* для след. в. Остальные - *свободными*.
Вершина V_Q может оказаться недоп. из-за нек. неравенств (2).
Пример. Q={1,2} и $-x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \ge 1$.
Даже, если у след. вершин переменные $x_3 = x_4 = 1$, то данное неравенство не может быть выполнено.
$\Rightarrow$ все след. за V_Q вершины могут быть исключены.

Правила отсечения

Правило 4. Для произвольной вер. V_Q могут $\exists$ ограничения, кот. «заставят» фиксировать значения нек. свободных переменных.

Пример. $3x_1 – x_2 – 2x_3 = 0$, и вершина V_Q определена переменными $x_1 = 1$; $x_j = 0$, $j = 2, \ldots, n$.
$\Rightarrow$ все след. вершины должны иметь фиксированные переменные $x_2 = x_3 = 1$.