

Методы неявного перебора

Постановка задачи

Рассмотрим общую постановку задачи *дискретной* оптимизации

$$\min_{x \in D} f(x),$$

где n -мерный вектор $x \in$ *конечному* мн. доп. решений D .

\Rightarrow можно перебрать все решения и выбрать opt...

В методах *неявного* перебора доп. мн. решений разбивается на не \emptyset подмн. $<$ мощности. Затем анализируется возможность исключения этих подмн., а также улучшения найденного доп. решения (рекорда).

В результате возможно сокращение перебора доп. решений.

- Метод ветвей и границ
- Аддитивный алгоритм Балаша.

Метод ветвей и границ (МВГ)

Ветвлением мн. $d \subseteq D$ наз.

функцию
 $\nu: d \rightarrow \{d_1, \dots, d_N\}, d_k \subset d, d_k \neq \emptyset, \bigcap_{k=1}^N d_k = d, k = 1, \dots, N,$

разбивающую мн. d на *несобственные* подмн.

Числовая функция H наз. **нижней границей** функционала f на мн. d , если:

- 1) $H(d) \leq \min_{x \in d} f(x);$
- 2) $H(\{x\}) = f(x), \{x\}$ – одноэлементное мн.

Наз. **рекордом**, и обозн. его x^0 , наилучшее из найденных доп. решение. Величина $f(x^0)$ является верхней границей (ВГ) функционала задачи. Сначала рекорд x^0 либо произвольное доп. решение, либо не известен.

Правила отсечения

МВГ последовательно выполняет итерации (шаги).

На очер. итер. выбирается и проверяется нек. не отсеченное мн.

В результате оно либо отбрасывается (отсекается), либо разбивается на непустые подмн. $<$ мощности (ветвится).

Пусть t_1, \dots, t_L мн. не отсеченных подмн. решений.

(первоначально $L = 1, t_1 = D$.)

Мн. $t_i, 1 \leq i \leq L$ отсекается в одном из 2-х, последовательно проверяемых, случаев:

а) если $H(t_i) \geq f(x^0)$;

б) если $H(\{t_i\}) = f(t_i) < f(x^0)$. Т.е. 1-элем. мн. отсекается всегда.

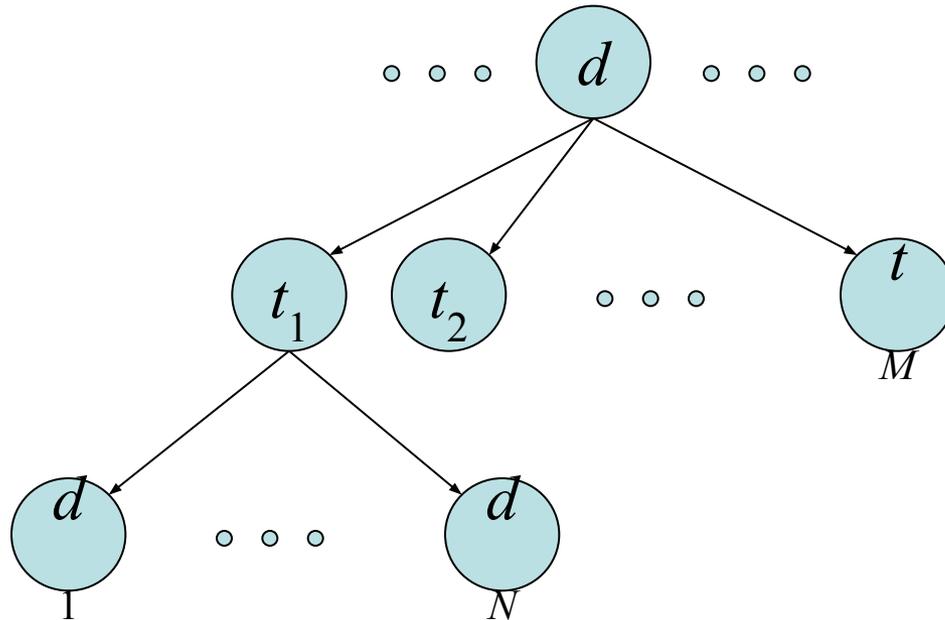
Последнее неравенство имеет место, т.к. 1-элем. мн. не было удалено по критерию а). Значит, в случае б) происходит смена рекорда $x^0 = t_i$ и ВГ $f(x^0)$.

Ветвление

Если t_1, \dots, t_M , $M \leq L$ – не проверенные подмн., то:

- если $M = 0$, то x^0 – опт. реш. задачи, и алг. останавливается;
- если $M > 0$, то среди мн. t_1, \dots, t_M выбираем *перспективное* подмн., пусть это t_1 , и осуществляем его ветвление. Получим подмн. $d_1, \dots, d_N, t_2, \dots, t_M$, $L = N + M - 1$.

Перенумеруем эти подмн. числами $1, \dots, L$ и повторим шаг алг.



Корректность алгоритма

Теорема. *Приведенный алгоритм МВГ находит решение задачи за конечное число шагов.*

Доказательство. *Конечность алг. \Rightarrow из след. 4 свойств:*

- 1) На каж. шаге выбранное подмн. либо удаляется, либо разбивается на непустые подмн. $<$ мощности.
- 2) 1-элемент. мн. исключаются всегда.
- 3) Подмн. не проверяются > 1 раза.
- 4) Исходное мн. доп. решений D конечно.

Докажем опт найденного решения. Предположим противное: после остановки алгоритма, рекорд x^0 не является опт решением задачи. Значит,

$$f(x^0) > \min_{x \in D} f(x) = f(x^*) \quad (*)$$

\Rightarrow на каком-то шаге опт решение x^* было удалено вместе с нек. мн. t на основании правила а), т.е. $H(t) \geq f(x^0)$. Значит, $f(x^*) \geq H(t) \geq f(x^0)$, что противоречит предположению (*).

Реализация МВГ

Если получение ВГ сопряжено с трудностями, тогда для быстрого нахождения рекорда следует применять *схему одностороннего ветвления*, когда разбивается мн. \min мощности.

⇒ 1-элемент мн. и доп. решение (1 рекорд) будут найдены быстро.

Мн., имеющее \min НГ, может с большой вероятностью содержать решение, близкое (по функционалу) к опт, что приведет к получению хорошего рекорда (и ВГ). Выбор такого мн. для дальнейшего разбиения определяет *схему всестороннего ветвления*.

Если при реализации алг. критической является память, тогда схема одностороннего ветвления предпочтительнее.

Реализация МВГ

Для решения МВГ конкретной задачи следует определить:

- способ представления подмн. решений;
- схему и способ ветвления;
- алг. вычисления НГ;
- метод нахождения рекорда.

Время работы алг. зависит от многих факторов. Теоретически не исключен полный перебор решений. Практически же следует найти компромисс между точностью и сложностью вычисления НГ, что позволит найти решение, близкое к opt , за приемлемое время. Более точное вычисление НГ может позволить отсечь больше решений, но потребует и больше времени, что может привести к длительному выполнению 1 итерации.

МВГ для задачи КМ

Задан *полный* граф $G = (V, E)$, $V = \{1, \dots, n\}$.

\forall дуге $(i, j) \in E$ приписана длина $c_{ij} \geq 0$.

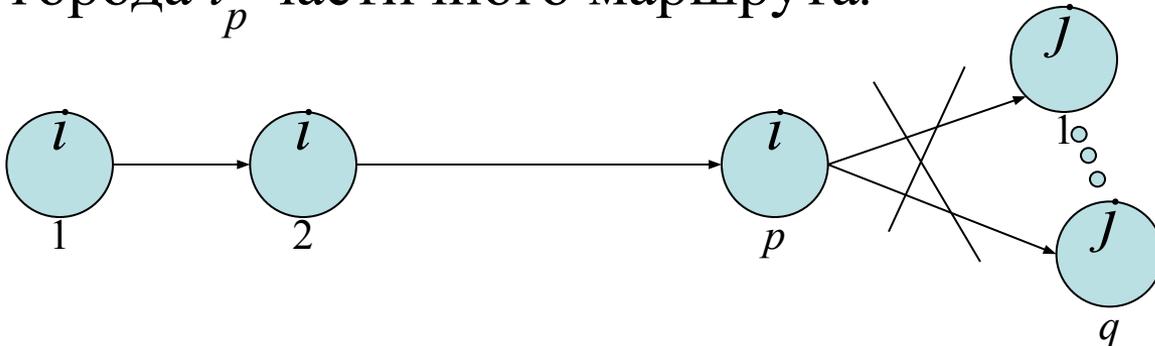
Требуется найти гамильтонов контур \min длины.

Положим:

$\{i_1, \dots, i_p\}$ – простой путь из вершины i_1 в вершину i_p ;
 $f(i_1, \dots, i_n)$ – длина гамильтонова контура $\{i_1, \dots, i_n, i_1\}$;
 $i_1 = 1$.

Подмн. решений представим 2 мн.:

- частичным маршрутом $I = \{i_1, \dots, i_p\}$,
- списком $J = \{j_1, \dots, j_q\} \subset V \setminus \{i_1, \dots, i_p\}$ запрещенных переходов из последнего города i_p частичного маршрута.



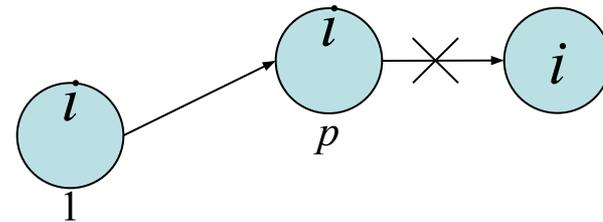
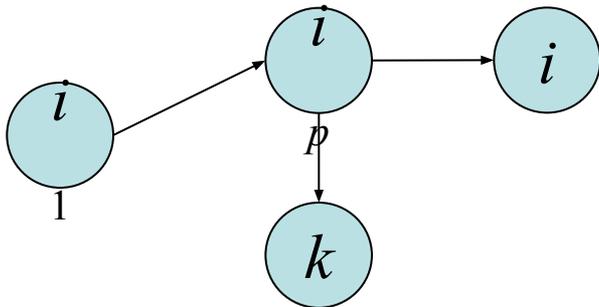
Ветвление

- Если $p < n - 1$, то $0 \leq q \leq n - p - 2$.
- Если же $p = n - 1$, то $q = 0$, т.е. мн. (I, J) определяют ед. решение.

Функция ветвления b делит мн. гам. контуров (I, J) , на 2 подмн. Для этого выбирается некоторая вершина $i \in V' = V \setminus (I \cup J)$.

Если кроме i в множестве V' $\exists!$ вершина k , то:

$I = \{i_1, \dots, i_p, i\}, J = \emptyset$, а другое мн. $I = \{i_1, \dots, i_p, k\}, J = \emptyset$.



Если в $V' > 2$ эл., то 1 мн. $I = \{i_1, \dots, i_p, i\}, J = \emptyset$,
а 2 мн. $I = \{i_1, \dots, i_p\}, J = \{j_1, \dots, j_q, i\}$.

Вычисление НГ

Введем матрицу $\|c'_{ij}\|$, $i, j = 1, \dots, n$, где $c'_{ij} = c_{ij}$ для незапрещенных дуг, и $c'_{ij} = +\infty$ для запрещенных. Вычислим

$$\alpha_i = \min_{j=1, p+1, \dots, n} c'_{ij}, \quad i = p, \dots, n;$$

$$\beta_j = \min_{i=p, \dots, n} \{c'_{ij} - \alpha_i\}, \quad j = 1, p+1, \dots, n;$$

$$H(I, J) = \sum_{i=1}^{p-1} c_{i, i+1} + \sum_{i=p}^n \alpha_i + \sum_{j=p+1}^n \beta_j + \beta_1$$

Лемма. Если $\{i_p, \dots, i_n, i_p\}$ – гам. контур мн. (I, J) , то $f(i_p, \dots, i_n) \geq H(I, J)$.

Доказательство. Из определения α_i и β_j имеем:

$$\begin{aligned} \sum_{l=p}^n c_{i_l, i_{l+1}} &= \sum_{l=p}^n c'_{i_l, i_{l+1}} = \sum_{l=p}^n \underbrace{(c'_{i_l, i_{l+1}} - \alpha_{i_l} - \beta_{i_{l+1}})}_{\geq 0} + \sum_{l=p}^n \alpha_{i_l} + \sum_{l=p}^n \beta_{i_{l+1}} \geq \\ & \sum_{i=p}^n \alpha_i + \sum_{j=p+1}^n \beta_j + \beta_1 \end{aligned}$$

Вычисление НГ

Функция $H(I, J) = \sum_{i=1}^{p-1} c_{i,i+1} + \sum_{i=p}^n \alpha_i + \sum_{j=p+1}^n \beta_j + \beta_1$ удовлетворяет

и 2-му свойству НГ. $H(\{x\}) = f(x)$, т.к. в случае $p=n-1$, имеем $\alpha_{n-1} = c_{n-1,n}$, $\alpha_n = c_{n1}$, $\beta_1 = 0$, $\beta_n = 0$.

Выбор вершины i для ветвления мн. $(I, J) \dots$

Для *произвольного* мн. (I, J) можно найти доп. решение, например, используя жадный алгоритм: **“иди в ближайшую вершину, где еще не был”**, начиная с вершины p и учитывая запреты $J \dots$

Пример

	1	2	3	4	5
1	–	48	27	31	43
2	33	–	28	44	43
3	41	28	–	40	36
4	37	35	29	–	46
5	48	48	25	29	–

	1	2	3	4	5	α
1	–	48	27	31	43	27
2	33	–	28	44	43	28
3	41	28	–	40	36	28
4	37	35	29	–	46	29
5	48	48	25	29	–	25
β	5	0	0	4	8	

$$H=154$$

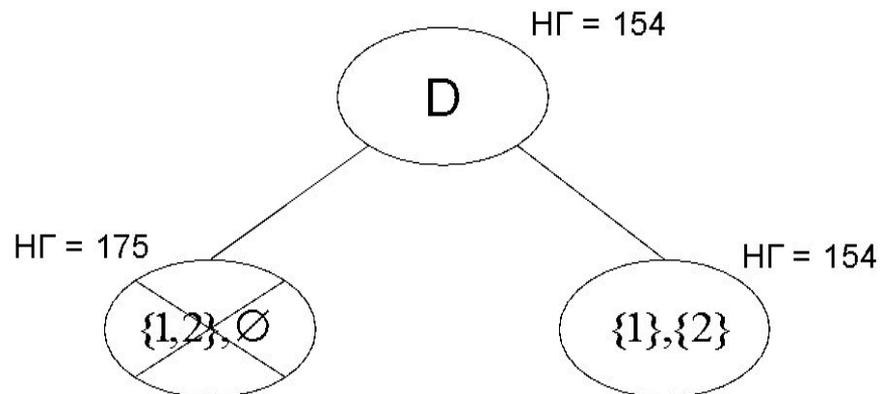
$$f(1,3,2,5,4,1) = 164$$

Пример

	1	2	3	4	5	α
1	—	48	27	31	43	—
2	33	—	28	44	43	28
3	41	28	—	40	36	36
4	37	35	29	—	46	29
5	48	48	25	29	—	25
β	5	—	0	4	0	

H=175

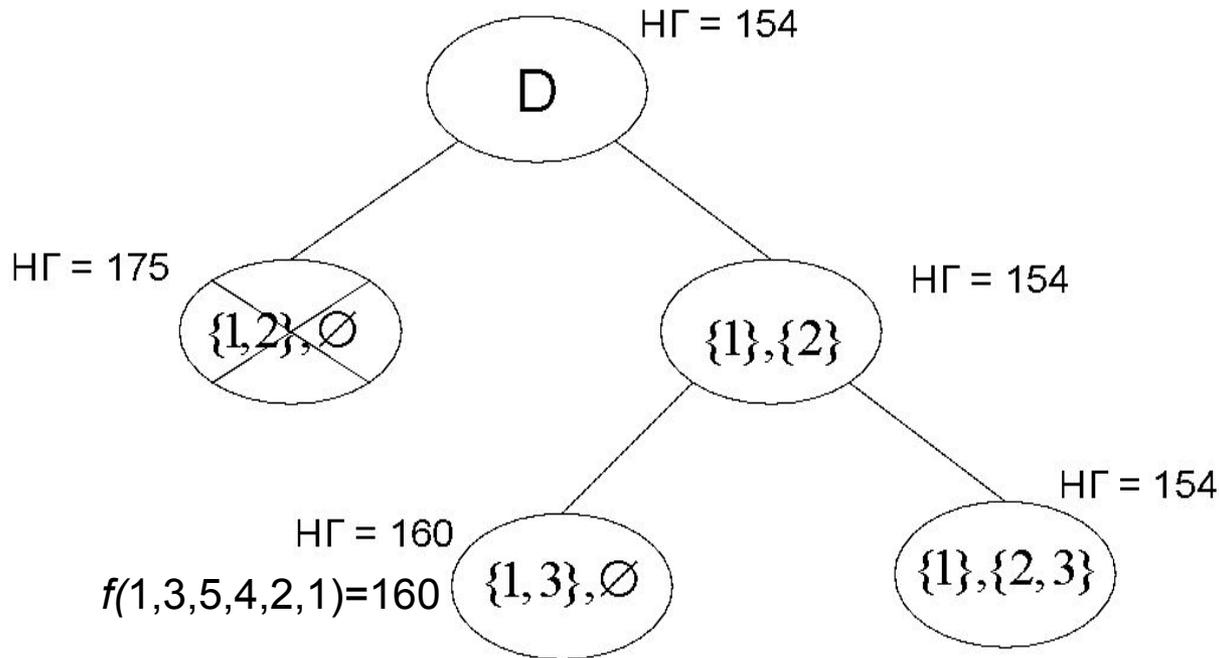
$f(1,3,2,5,4,1) = 164$



	1	2	3	4	5	
1	—	48	27	31	43	
2	33	—	28	44	43	28
3	41	28	—	40	36	28
4	37	35	29	—	46	29
5	48	48	25	29	—	25
β	5	0	0	4	8	

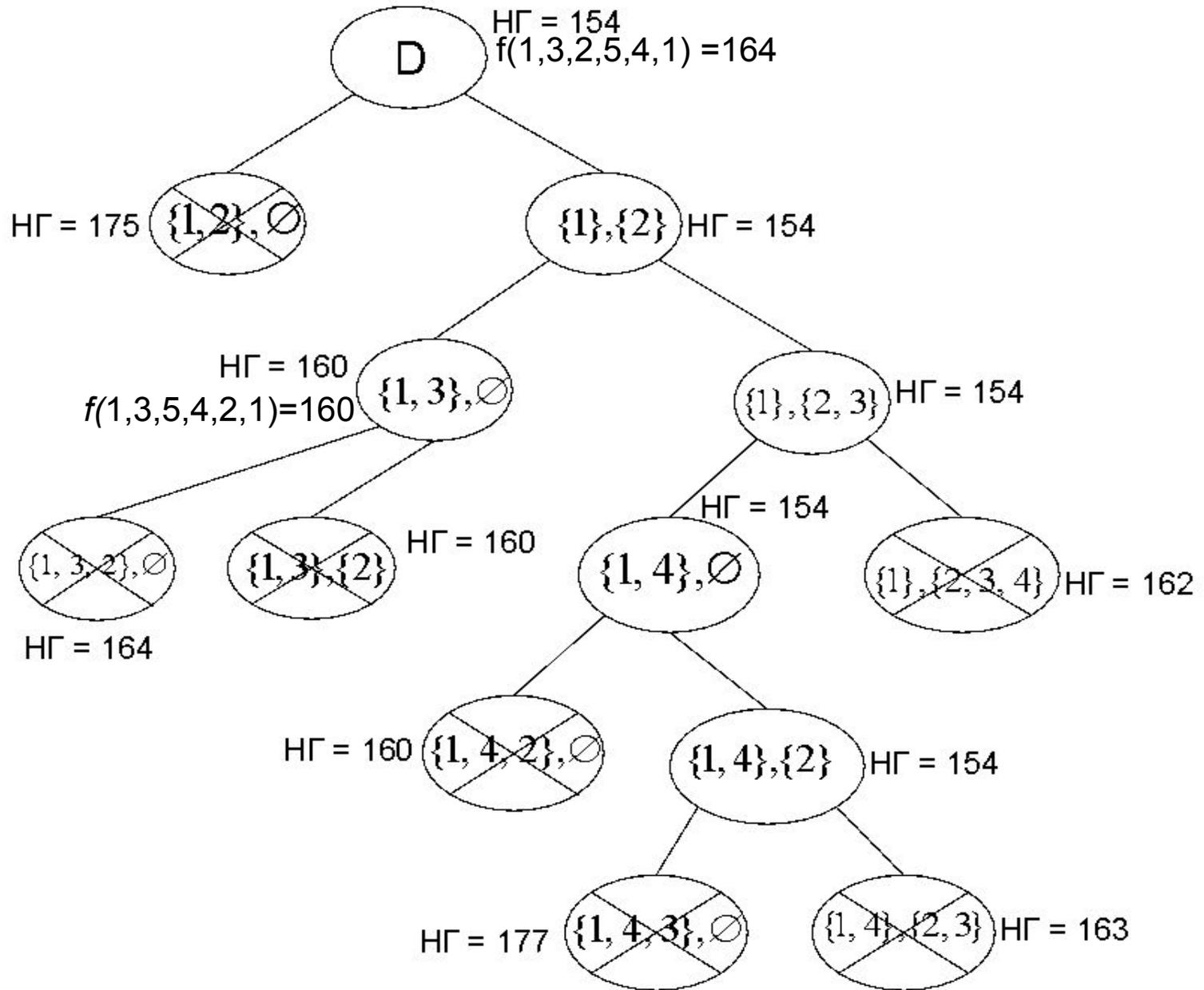
H=154

Пример



	1	2	3	4	5	α
1	—	48	27	31	43	—
2	33	—	28	44	43	33
3	41	28	—	40	36	28
4	37	35	29	—	46	35
5	48	48	25	29	—	29
β	0	0	—	0	8	

Пример



2-й способ построения НГ для задачи КМ

Задача о назначениях. Имеется n работ и n исполнителей, $c_{ij} \geq 0$ – затраты, связанные с назначением i -го исп. на j -ю работу. Каждая работа должна быть выполнена 1 исполнителем, и каждый исполнитель должен выполнить 1 работу.

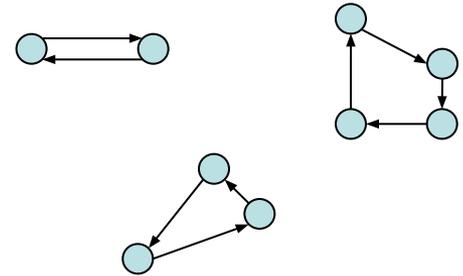
Требуется назначить исп. на работы : общие затраты \min .

$x_{ij} = 1$, если исполнитель i назначен на работу j ;

$x_{ij} = 0$ в противном случае.

$$\begin{cases} Z = \min_{x_{ij} \in \{0,1\}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{j=1}^n x_{ji} = 1, \quad i = 1, \dots, n \end{cases}$$

$$T = O(n^3).$$



Предположим, что c_{ij} = длине перехода $i \rightarrow j$ и положим $c_{ii} = +\infty, i = 1, \dots, n. \Rightarrow Z$ является НГ для ц.ф. задачи КМ

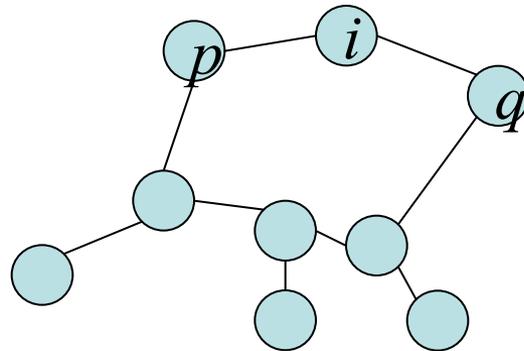
3-й способ построения НГ для задачи КМ

Пусть $c_{ij}=c_{ji}$, $i, j=1, \dots, n$.

Рассмотрим произвольную в. i . На мн. $V \setminus \{i\}$ построим остовный граф T_i min веса $W(T_i)$. Пусть ребра (i, p) и (i, q) имеют min длину среди всех ребер, инцидентных i .

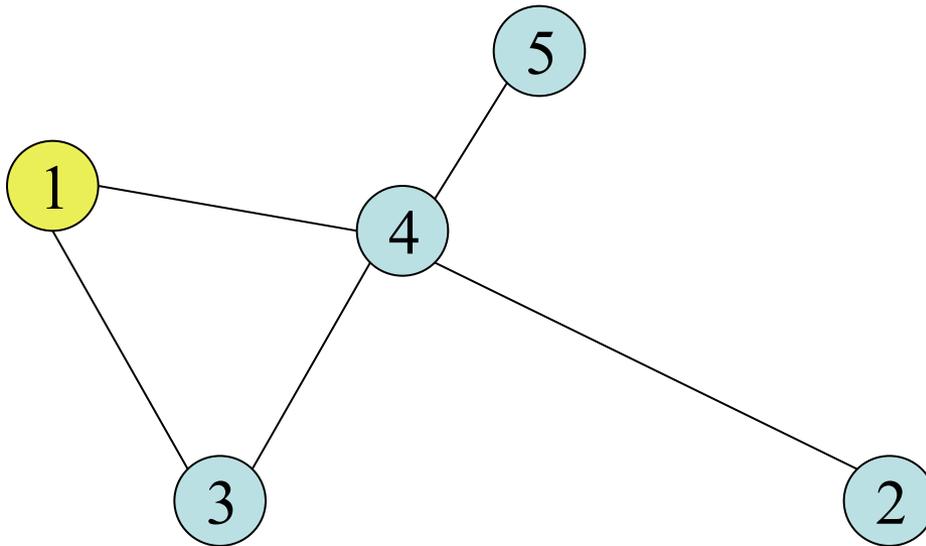
Граф $Q_i = T_i \cup \{(i, p)\} \cup \{(i, q)\}$ наз. 1-деревом для вершины i . Вес этого 1-дерева Q_i , равный $W(Q_i) = W(T_i) + c_{ip} + c_{iq}$, является НГ длины min гам. цикла.

Если выбрать вершину k : $W_1 = W(Q_k) \geq W(Q_i)$, $i \in V$, то W_1 является лучшей (наибольшей) НГ, получаемой с помощью 1-деревьев. $T = O(n^3)$



Пример построения 1-дерева

	1	2	3	4	5
1	—	10	4	3	4
2		—	7	6	6
3			—	4	8
4				—	2
5					—



НГ = 17

Аддитивный алгоритм Балаша

$$Z(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min_{x \in B^n}; \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i = 1, \dots, m. \quad (2)$$

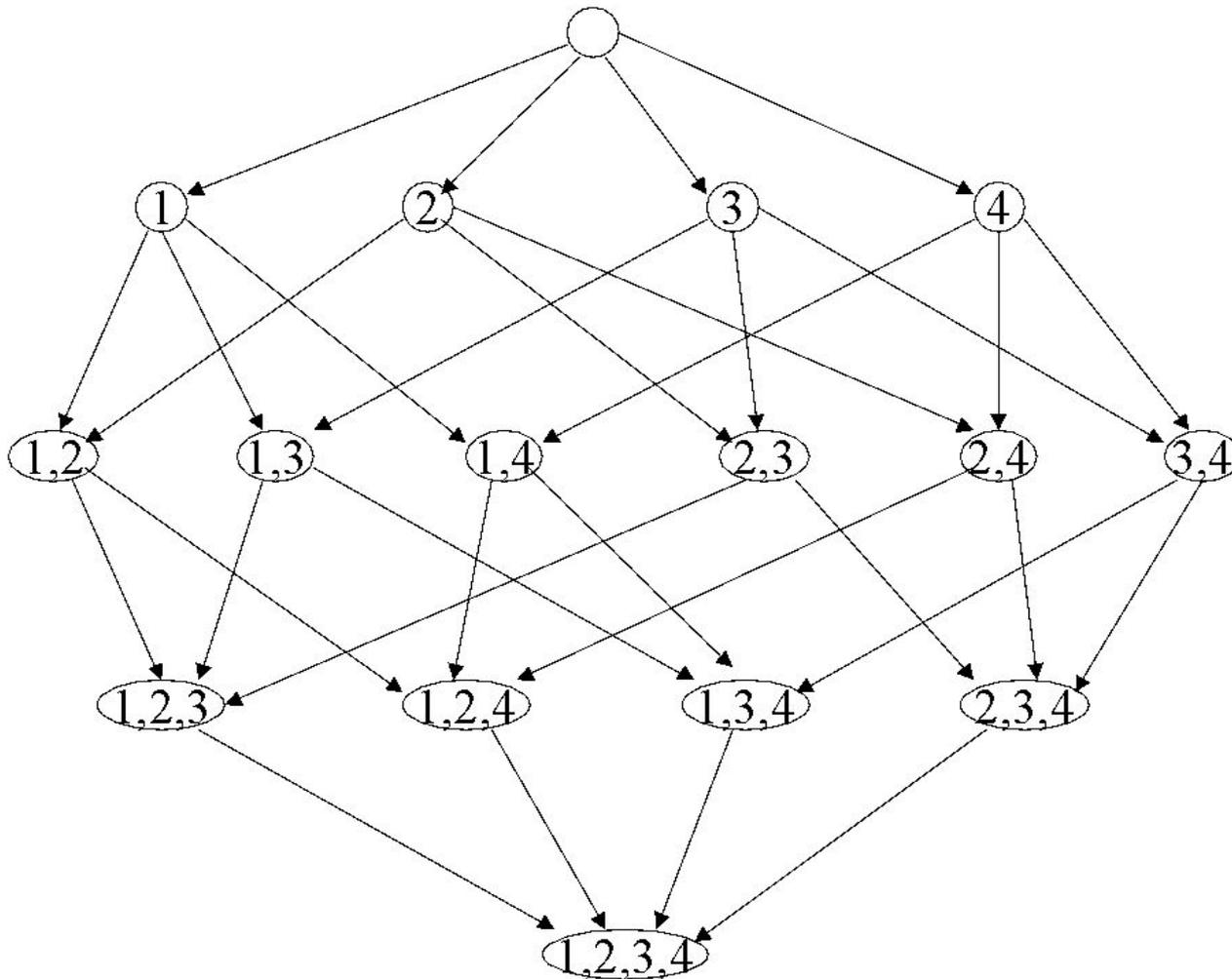
Наз. *решением* мн. $\{x_j : x_j=1, j \in N_1; x_j=0, j \in N \setminus N_1, N = \{1, \dots, n\}\}$.
Решение является **допустимым**, if выполняются неравенства (2).
Пусть $0 \leq c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_n$. (if $\exists j : c_j < 0$, то $\rightarrow y_j = 1 - x_j$)

Доп. решение x **доминирует** доп. решение y , если $Z(x) < Z(y)$.
Если решения доминируются лучшим найденным допустимым решением (рекордом), то их можно отбросить.

Диаграмма

2^n решений разобьем на $n+1$ подмн. с номерами $k=0,1,\dots,n$:

k -е подмножество содержит все решения с k переменными = 1 и $n - k$ переменными = 0.



Упорядоченность решений

- при $k=0$, подмн. решений состоит из 1 решения $x = 0$;
- при $k=1$, подмн. решений включает n решений, в которых $x_i=1$; $x_j=0$, $j \neq i$; $i=1, \dots, n$;
- k -е подмножество состоит из C_n^k решений.

На диаграмме каж. вершина, содержащая список N_1 , представляет решение, в котором переменные с индексами из N_1 равны 1, а остальные – 0. Так вершина (1,3) соответствует решению $x_1=x_3=1$; $x_2=x_4=0$.

Если в диаграмме \exists путь из u в v , то в. u наз. *предшествующей* для в. v , а v - *следующей* за u .

\Rightarrow решения частично упорядочены.

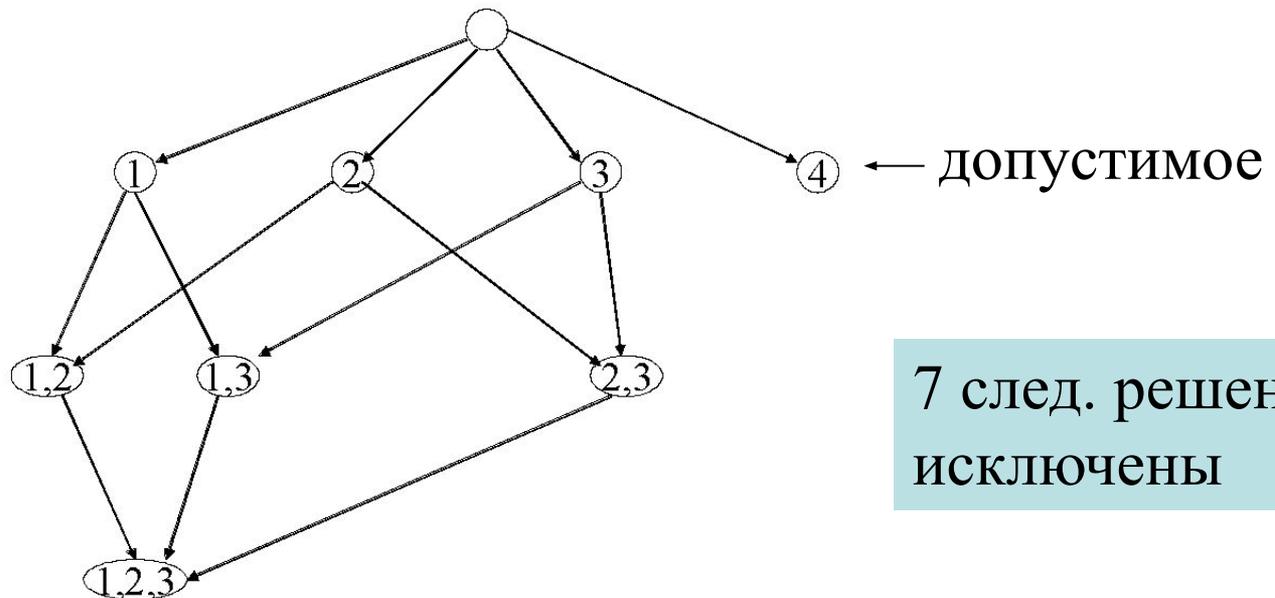
Алгоритм

Алгоритм начинает работу с вершины $x = 0$.

Затем просматривает след. за ней вершины.

Перебор может быть сокращен на основе различных правил:

Правило 1. Т.к. $0 \leq c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_n$, то зн. ц.ф. при переходе к след. решению может только возрасти. \Rightarrow если нек. вер. соответствует доп. решению, то след. за ней вершины исключаются.



Правила отсечения

Правило 2. Пусть

- Z^* – рекордное) зн. ц.ф. на найденных доп. реш.,
- Z_Q – зн. ц.ф. в вершине V_Q , где $x_j=1, j \in Q; x_j=0, j \in M \setminus Q$.

Если для некоторого r имеет место неравенство $Z_Q + c_r > Z^*$, то достаточно проверять только те следующие вершины, в кот.

$x_r = x_{r+1} = \dots = x_n = 0$ (в силу неравенств $0 \leq c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_n$).

Правило 3. Пусть вер. V_Q задает реш. $x_j=1, j \in Q; x_j=0, j \in M \setminus Q$.

\Rightarrow все след. в. должны иметь $x_j=1, j \in Q$. Такие пер. наз.

фиксированными для след. в. Остальные – *свободными*.

Вершина V_Q может оказаться недоп. из-за нек. неравенств (2).

Пример. $Q = \{1, 2\}$ и $-x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \geq 1$.

Даже, если у след. вершин переменные $x_3 = x_4 = 1$, то данное неравенство не может быть выполнено.

\Rightarrow все след. за V_Q вершины могут быть исключены.

Правила отсечения

Правило 4. Для произвольной вер. V_Q могут \exists ограничения, кот. «заставят» фиксировать значения нек. свободных переменных.

Пример. $3x_1 - x_2 - 2x_3 = 0$, и вершина V_Q определена переменными $x_1 = 1; x_j = 0, j = 2, \dots, n$.

\Rightarrow все след. вершины должны иметь фиксированные переменные $x_2 = x_3 = 1$.