Применение формул сокращённого умножения

Примеры основных формул сокращённого умножения:

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
- $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
- $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
- $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

А также:

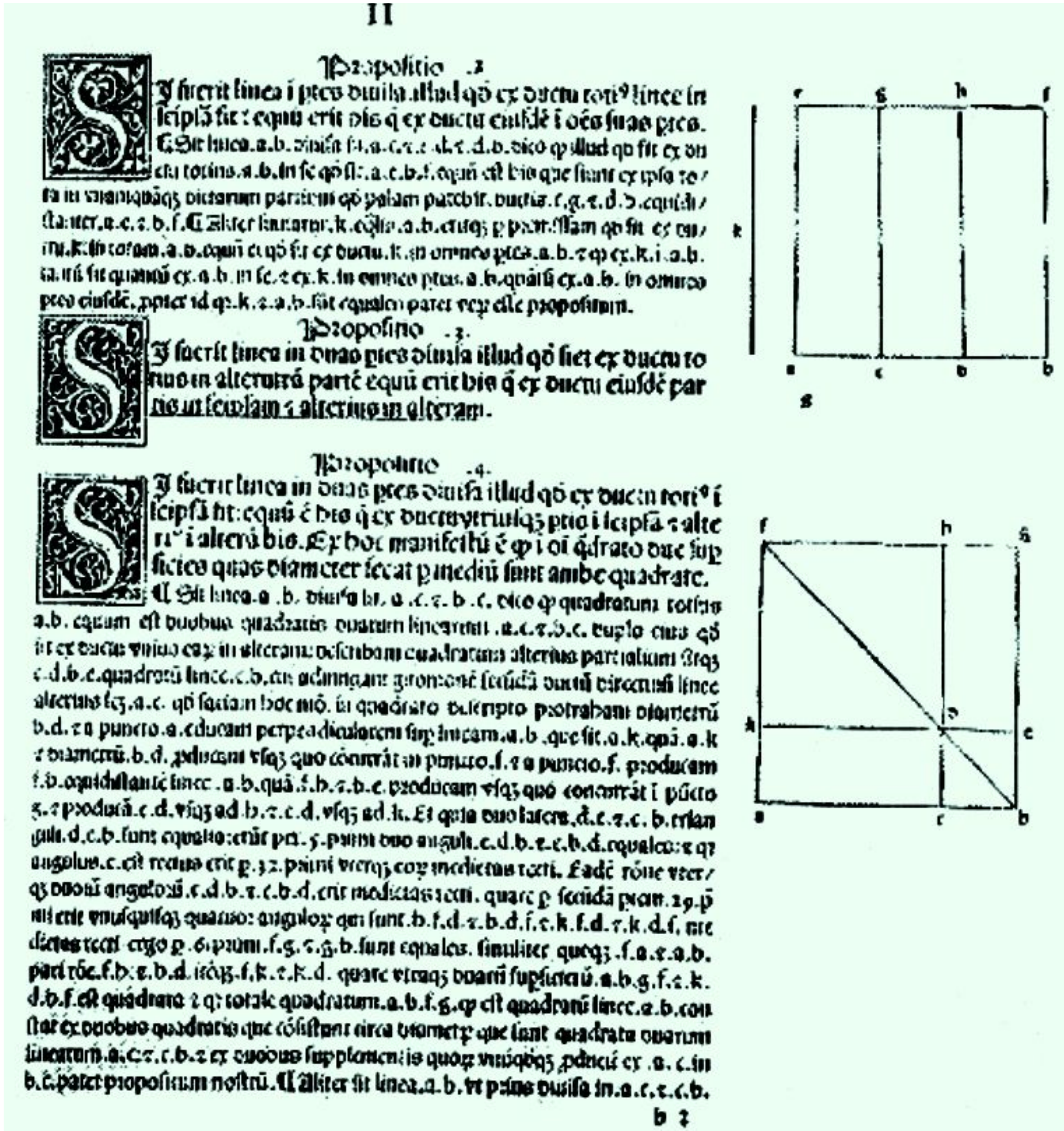
$$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + a^{n-k}b^{k-1} + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$$

$$a^{2m+1} + b^{2m+1} = (a+b)\left(a^{2m} - a^{2m-1}b + \ldots + (-1)^k a^{2m-k}b^k + \ldots - ab^{2m-1} + b^{2m}\right)$$

Исторические сведения

Формулы сокращённого умножения были известны еще 4000 лет назад. Ученые Древней Греции представляли величины не числами или буквами, а отрезками прямых. Вместо «произведение a и b» говорилось «прямоугольник, содержащийся между а и в», вместо a^2 - «квадрат на отрезке а».

Евклид «Начала»



II

Propositio .2.

Si fuerit linea i ptes diuisa. illud qd ex ductu toti⁹ linee in seipsā fit: equū erit his q ex ductu eiusdē i oēs suas ptes.

[illegible]

Propositio .3.

Si fuerit linea in duas ptes diuisa illud qd fiet ex ductu totius in alterutrā partē equū erit his q ex ductu eiusdē partis in seipsam & alterius in alteram.

Propositio .4.

Si fuerit linea in duas ptes diuisa illud qd ex ductu toti⁹ i seipsā fit: equū ē his q ex ductu vtriusq3 ptis i seipsā & alterius i alterā bis. Ex hoc manifestū ē q i oi q̄drato due supficies quas diameter secat p mediū sunt ambe quadrate.

[illegible]

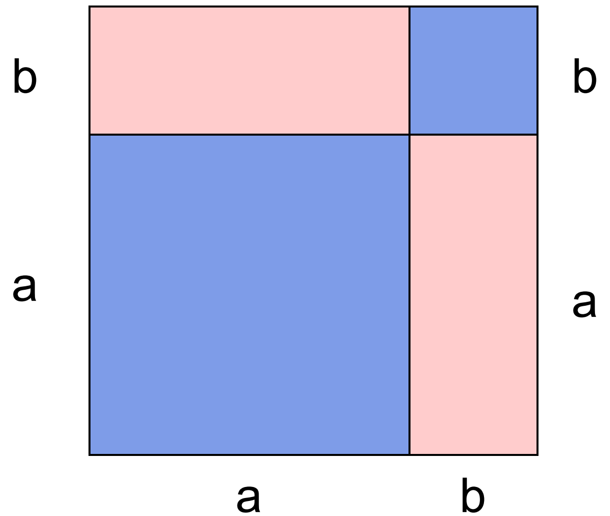
b 2

Евклид «Начала»

«Если отрезок как-либо разбит на два отрезка, то площадь квадрата, построенного на всем отрезке, равна сумме площадей квадратов, построенных на каждом из двух отрезков, и удвоенный площади прямоугольника, сторонами которого служат эти два отрезка».

Суть этой фразы в формуле:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$



Применение формул сокращённого умножения:

- в алгебре
- в геометрии

Разложение многочленов на множители

- $(a^2 + 1)^2 - 4a^2 = ((a^2 + 1) - 2a)((a^2 + 1) + +2a) = (a^2 + 1 - 2a)(a^2 + 1 + 2a) = (a^2 - 2a + +1)(a^2 + 2a + 1) = (a - 1)^2(a + 1)^2$
- $a^2 - b^2 - a - b = (a - b)(a + b) - (a + b) = (a + + b)(a - b - 1)$

В разложении данных многочленов использовались формулы:

1) разность квадратов
2) квадрат разности
3) квадрат суммы

Представление выражения в виде многочлена

Представить в виде многочлена $\left(x^2-\sqrt{5}\right)^2.$

$$\left(x^2-\sqrt{5}\right)^2=\left(x^2\right)^2-2\cdot x^2\cdot\sqrt{5}+\left(\sqrt{5}\right)^2=x^4-2\sqrt{5}x^2+5$$

Ответ: $x^4-2\sqrt{5}x^2+5$

Представить в виде многочлена $-\left(\sqrt{3}-x\right)\cdot\left(x^2-3\right)\cdot\left(x+\sqrt{3}\right).$

$$-\left(\sqrt{3}-x\right)\cdot\left(x^2-3\right)\cdot\left(x+\sqrt{3}\right)=\left(x-\sqrt{3}\right)\cdot\left(x+\sqrt{3}\right)\cdot\left(x^2-3\right)=\left(x^2-3\right)\cdot\left(x^2-3\right)=\left(x^2-3\right)^2=x^4-6x^2+9$$

Ответ: x^4-6x^2+9

Решение уравнения

1 способ

$(x - 2)^3 + (x + 2)^3 = 2(x - 3)(x^2 + 3x + 9)$

$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 + x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = 2(x^3 - 27)$

$2x^3 + 24x = 2x^3 - 54$

$24x = - 54$

<u>$x = - 2{,}25$</u>

В решении данного уравнения первым способом использовались формулы:

1) куб разности

2) куб суммы

Решение уравнения

2 способ

$(x – 2)^3 + (x + 2)^3 = 2(x – 3)(x^2 + 3x + 9)$

$(x-2+x+2)((x-2)^2 - (x-2)(x+2) + (x+2)^2 = 2(x^3-27)$

$2x(x^2 – 4x + 4 – x^2 + 4 + x^2 + 4x +4) = 2x^3 – 54$

$2x(x^2 + 12) = 2x^3 – 54$

$2x^3 + 24x – 2x^3 = - 54$

$24x = - 54$

<u>x = - 2,25</u>

В решении данного уравнения вторым способом использовались формулы:

1) сумма кубов; 2) квадрат разности; 3) квадрат суммы;

4) разность квадратов.

Доказательство неравенства

Доказать неравенство:

$$\sqrt{(a+b)(c+d)} \geq \sqrt{ac} + \sqrt{bd}, \text{если } \mathrm{a, b, c, d} > 0$$

$$ac + ad + bc + bd \geq ac + bd + 2\sqrt{abcd}$$

$$ad + bc - 2\sqrt{abcd} \geq 0$$

$$\left(\sqrt{ad}\right)^2 - 2\sqrt{ad} \cdot \sqrt{bc} + \left(\sqrt{bc}\right)^2 \geq 0$$

$$\left(\sqrt{ad} - \sqrt{bc}\right)^2 \geq 0$$, что верно.

Делимость

Докажем, что число $n^3 – n$, где n – натуральное число, делится на 6:

$$n^3 – n = n(n^2 – 1) = n(n – 1)(n + 1)$$

Заданное число есть произведение трёх последовательных чисел, из которых одно обязательно делится на 3 и хотя бы одно делится на 2. Если произведение делится и на 3, и на 2, то оно делится и на 6.

Тождественные преобразования

Докажем тождество: $\left(\frac{x}{x-3}+\frac{x^2+1}{x^3+1}\cdot\frac{x^2-x+1}{x-3}\right)\div\frac{2x^2+x+1}{x+1}=\frac{1}{x-3}$.

$$\frac{x^2+1}{x^3+1}\cdot\frac{x^2-x+1}{x-3}=\frac{x^2+1}{(x+1)(x^2-x+1)}\cdot\frac{x^2-x+1}{x-3}=\frac{x^2+1}{(x+1)(x-3)},$$

$$\frac{x}{x-3}+\frac{x^2+1}{x^3+1}\cdot\frac{x^2-x+1}{x-3}=\frac{x}{x-3}+\frac{x^2+1}{(x+1)(x-3)}=\frac{x(x+1)+x^2+1}{(x+1)(x-3)}=\frac{2x^2+x+1}{(x+1)(x-3)},$$

$$\left(\frac{x}{x-3}+\frac{x^2+1}{x^3+1}\cdot\frac{x^2-x+1}{x-3}\right)\div\frac{2x^2+x+1}{x+1}=\frac{2x^2+x+1}{(x+1)(x-3)}\div\frac{2x^2+x+1}{x+1}=$$

$$=\frac{(2x^2+x+1)(x+1)}{(x+1)(x-3)(2x^2+x+1)}=\frac{1}{x-3}.$$

Итак, с помощью тождественных преобразований с применением формул сокращённого умножения мы левую часть равенства привели к виду правой его части. Тождество доказано.

Задача Пифагора

«Всякое нечётное число, кроме единицы, есть разность двух квадратов».

Решение:

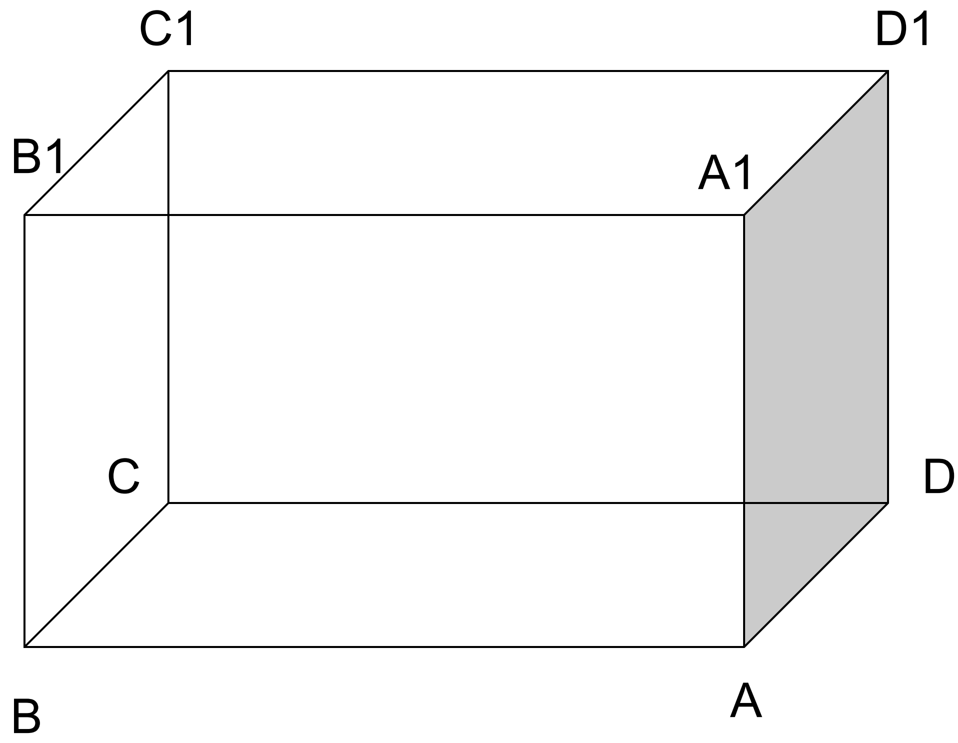
n – натуральное число

$(n + 1)^2 – n^2 = (n + 1 – n)(n + 1 + n) = 2n + 1$

$2n + 1$ – нечётное число

Геометрическая задача

В прямоугольном параллелепипеде длина на 5 см больше ширины и на 5 см меньше высоты. Площадь поверхности равна 244 см². Найдите измерения параллелепипеда (длину, ширину, высоту).



Геометрическая задача

Пусть x см – AB(длина), тогда (x+5) см – AA1(высота), (x-5) см – AD(ширина).

$S = 2S_{ABCD} + 2S_{AA1D1D} + 2S_{AA1B1B}$, а по условию – 244 см²

$S_{ABCD} = x(x-5)$; $S_{AA1D1D} = (x-5)(x+5)$;

$S_{AA1B1B} = x(x+5)$

<u>Составим и решим уравнение:</u>

$2x(x-5) + 2(x-5)(x+5) + 2x(x+5) = 244$

$x(x-5) + (x-5)(x+5) + x(x+5) = 122$

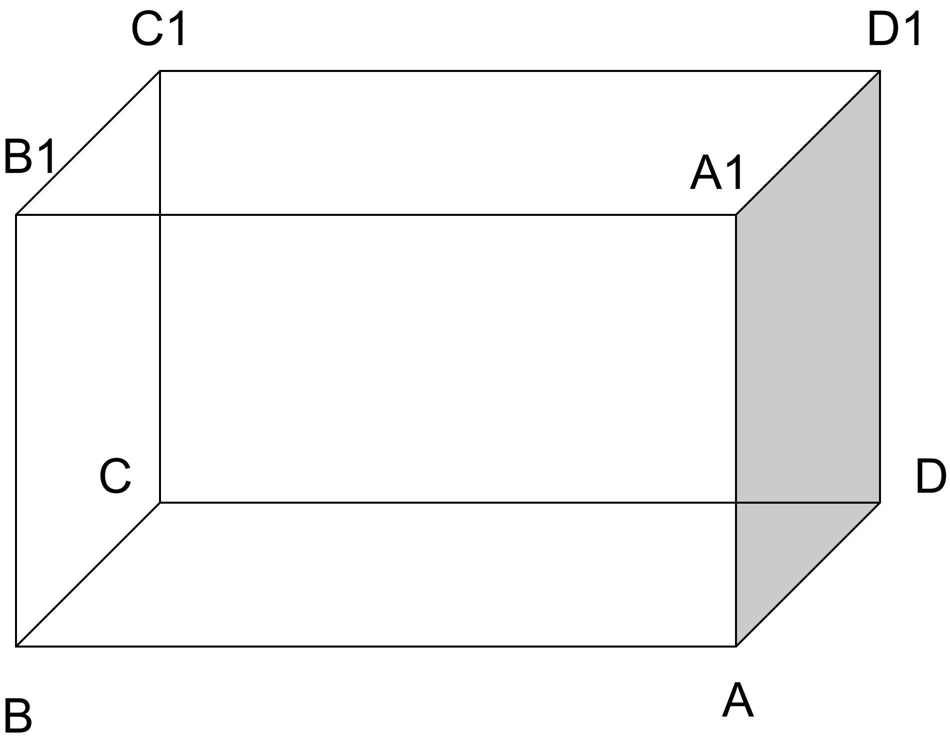
$x^2 – 5x + x^2 – 5^2 + x^2 + 5x = 122$

$3x^2 = 122+25$

$3x^2 = 147$

$x^2 = 49$, $x > 0$ (по смыслу задачи)

<u>**x = 7**</u>

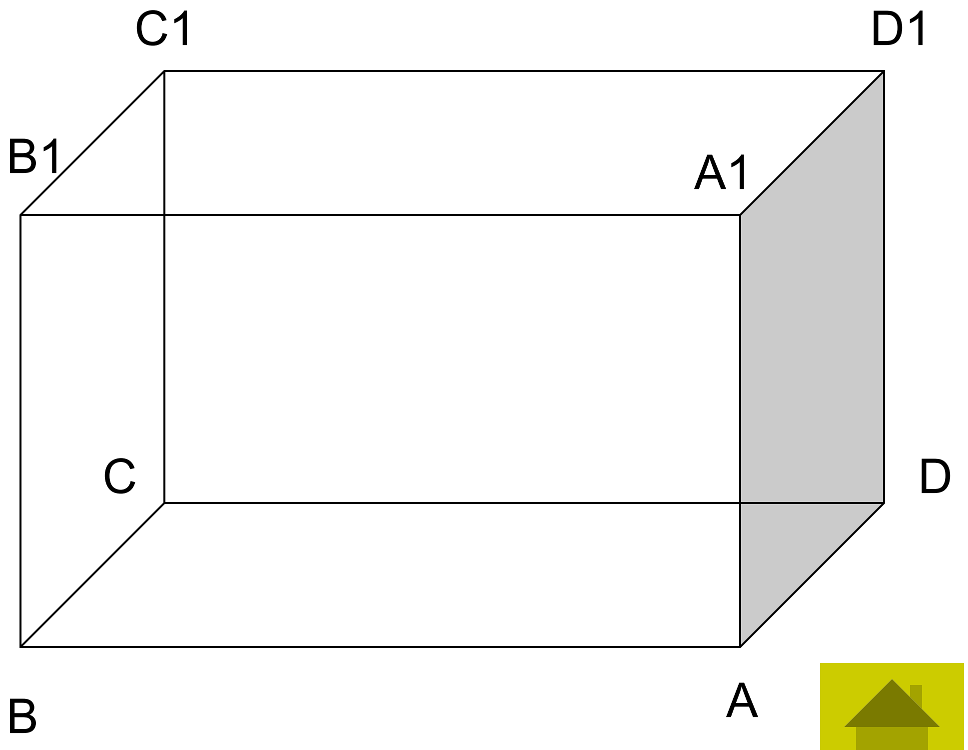


Геометрическая задача

AB = 7 см – длина

AA1 = 7 см + 5 см = 12 см – высота

AD = 7 см – 5 см = 2 см – ширина



<u>Ответ:</u> 7 см; 12 см; 2 см.

Спасибо за внимание.

Презентацию подготовили:

Плеханова Полина, Уткина Екатерина

8 «А» класс, ГОУ гимназия №144