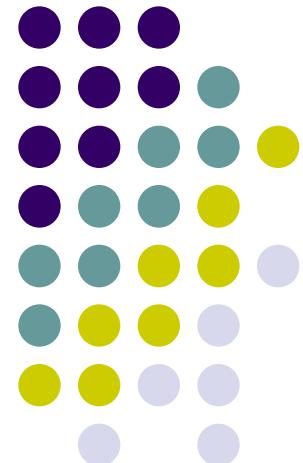


Применение формул сокращённого умножения





Примеры основных формул сокращённого умножения:

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
- $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
- $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
- $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

А также:

$$a^n - b^n = (a - b) \left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + a^{n-k}b^{k-1} + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1} \right)$$

$$a^{2m+1} + b^{2m+1} = (a + b) \left(a^{2m} - a^{2m-1}b + \dots + (-1)^k a^{2m-k}b^k + \dots - ab^{2m-1} + b^{2m} \right)$$



Исторические сведения

Формулы сокращённого умножения были известны еще 4000 лет назад. Ученые Древней Греции представляли величины не числами или буквами, а отрезками прямых. Вместо «произведение a и b » говорилось «прямоугольник, содержащийся между a и b », вместо a^2 - «квадрат на отрезке a ».



Евклид «Начала»

II



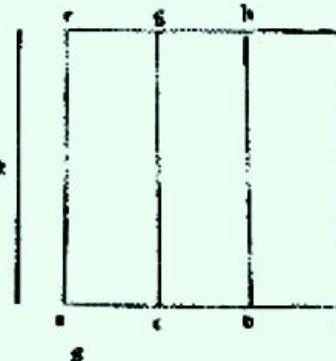
Пропозиція - 2.

Sicut linea i pteo dñmila illud qd ex ductu totq linee in leipli sit: equi erit dis q ex ductu eiusdē i oēs sua ptes. C. Si linea a.b. dividit s.a.c.e.t.k.d.b. dico q illud qd sit ex dñctu totius a.b. In se qd sit: a.c.e.t.k. quādē est bis que sunt ex ipso te- ra in variisq dictiorum partium qd ydiam patet. Ductus r.g.e.d.b. equidistans. a.c.e.t.b.f. C. Alter linea a.k. eodis a.b. citoq p pte. Nam qd sit ex dñctu totius a.b. quādē est qd sit ex ductu k. qd omnes ptes. a.b. t pte. k. i. a.b. qd si quādē ex a.b. in se. et ex k. In omni pte. a.b. quādē ex a.b. In omni pte. eiusdē. ppter id qd. k. a.b. sit equidistans ex ipso ppropositum.



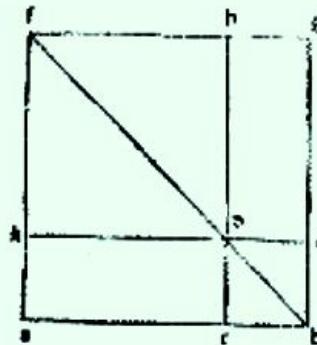
Пропозиція - 3.

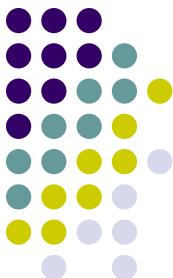
Sicut linea in dñmio ptes dñmila illud qd sit ex ductu totius in alteriorē partē equi erit bis q ex ductu eiusdē par- tis in secundam i alteriorē alteram.



Пропозиція - 4.

Sicut linea in duas ptes dñmisa illud qd ex ductu toti⁹ i leipli sit: equis ē dñc q ex ductu variisq ptes i leipli: et alte- ri⁹ i alteris bis. Ex hoc manifestū ē qd i oī qdrato due sup- fices quas diameter fecerat pmediu⁹ sunt ambe quadrata. C. Si linea a.b. dividit s.a.c.e.t.b.f. dico q quadrorum totius a.b. quādē est duobus quadratis duorum lineament. a.c.e.t.b.f. duplo linea qd sit ex ductu variisq ptes i alteram: desinbam quadratum alterius partium. Itaq c.d.b.e. quadrati linea c.d. cui adiungant gnomonē scindit unius bisectus linea alterius fct. a.c. qd faciat hoc mō. In quadrato tunc pro protrebat: diametru⁹ b.d. et puncto a. educam pte ad diagonalem sup. lineam a.b. que sit. a.k. quād. a.k. et diametru⁹ b.d. producam vñq quo contrariat puncto. f. et a puncto. f. producam f.b. opiditancē line. a.b. quād. f.b. et b.c. producam vñq quo contrariat puncto g. et producam c.d. vñq ad b.c. c.d. vñq ad k. Et qd ea duobus. a.c.e.t.c. b. etiam gale. d.c.b. lins equinoctiū pte. s. pnti duo anguli. c.d.b. t.c.b.d. equaliter qd angulus. c.d. t.c.b.d. erit medians secundū. quare p secundā pte. 29.p. nō erit vñqquādē quādū: angulorū qui sunt. b.f.d.t.c.b.d.f.k.t.d.f. nō dicteret recti. ergo p. 6. pnti. f.g. t.g.b. lins equalis. similiter queqz. f.a.e.a.b. pnti tbc. f.b.c.t.c.b.d. itaq. f.k.t.d. quare vñqz boarii suplisterū. a.b.g.f.c.k. d.b.f. est quadrato et qd totale quadratum. a.b.f.g. qd est quadrati linea. a.b. con- stat ex eodis quadratis que cōsistunt circa viamēt pte que sunt quadrata obatimi lins. a.c.t.c.b.z ex eodis suplisteris queqz vñqquādē pnticē ex. a. c. in b.c. pater ppropositum nostrū. C. Alter sit linea a.b. ut pnti dñmisa in a.c.t.c.b.



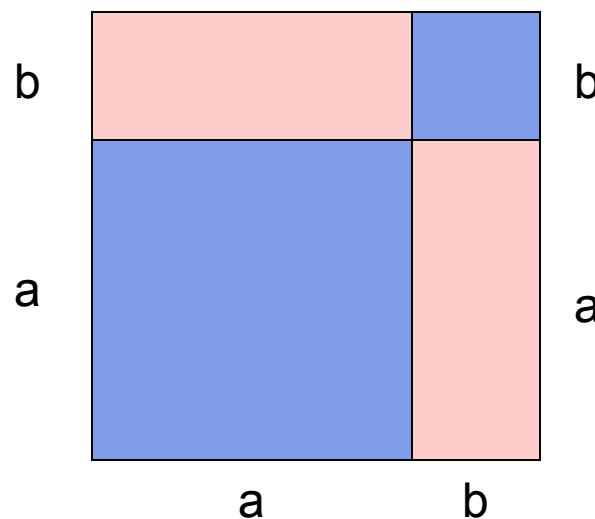


Евклид «Начала»

«Если отрезок как-либо разбит на два отрезка, то площадь квадрата, построенного на всем отрезке, равна сумме площадей квадратов, построенных на каждом из двух отрезков, и удвоенный площади прямоугольника, сторонами которого служат эти два отрезка».

Суть этой фразы в формуле:

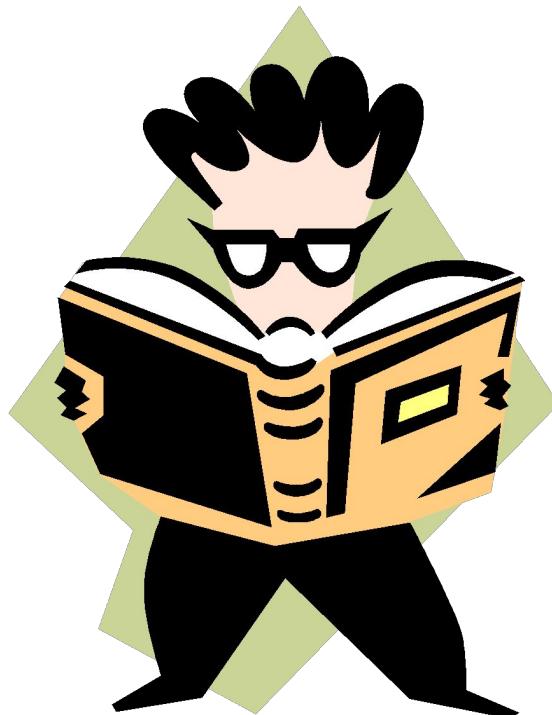
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$



Применение формул сокращённого умножения:



- в алгебре
- в геометрии





Разложение многочленов на множители

- $(a^2 + 1)^2 - 4a^2 = ((a^2 + 1) - 2a)((a^2 + 1) + 2a) = (a^2 + 1 - 2a)(a^2 + 1 + 2a) = (a^2 - 2a + 1)(a^2 + 2a + 1) = (a - 1)^2(a + 1)^2$
- $a^2 - b^2 - a - b = (a - b)(a + b) - (a + b) = (a + b)(a - b - 1)$

В разложении данных многочленов использовались формулы:

- 1) разность квадратов
- 2) квадрат разности
- 3) квадрат суммы



Представление выражения в виде многочлена

Представить в виде многочлена $(x^2 - \sqrt{5})^2$.

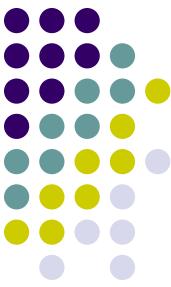
$$(x^2 - \sqrt{5})^2 = (x^2)^2 - 2 \cdot x^2 \cdot \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 = x^4 - 2\sqrt{5}x^2 + 5$$

Ответ: $x^4 - 2\sqrt{5}x^2 + 5$

Представить в виде многочлена $-(\sqrt{3} - x) \cdot (x^2 - 3) \cdot (x + \sqrt{3})$.

$$-(\sqrt{3} - x) \cdot (x^2 - 3) \cdot (x + \sqrt{3}) = (x - \sqrt{3}) \cdot (x + \sqrt{3}) \cdot (x^2 - 3) = (x^2 - 3) \cdot (x^2 - 3) = (x^2 - 3)^2 = x^4 - 6x^2 + 9$$

Ответ: $x^4 - 6x^2 + 9$



Решение уравнения

1 способ

$$(x - 2)^3 + (x + 2)^3 = 2(x - 3)(x^2 + 3x + 9)$$

$$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 + x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = 2(x^3 - 27)$$

$$2x^3 + 24x = 2x^3 - 54$$

$$24x = -54$$

$$\underline{x = -2,25}$$

В решении данного уравнения первым способом использовались формулы:

- 1) куб разности
- 2) куб суммы



Решение уравнения

2 способ

$$(x - 2)^3 + (x + 2)^3 = 2(x - 3)(x^2 + 3x + 9)$$

$$(x-2+x+2)((x-2)^2 - (x-2)(x+2) + (x+2)^2 = 2(x^3-27)$$

$$2x(x^2 - 4x + 4 - x^2 + 4 + x^2 + 4x + 4) = 2x^3 - 54$$

$$2x(x^2 + 12) = 2x^3 - 54$$

$$2x^3 + 24x - 2x^3 = - 54$$

$$24x = - 54$$

$$\underline{x = - 2,25}$$

В решении данного уравнения вторым способом использовались формулы:

- 1) сумма кубов; 2) квадрат разности; 3) квадрат суммы;
- 4) разность квадратов.



Доказательство неравенства

Доказать неравенство:

$$\sqrt{(a+b)(c+d)} \geq \sqrt{ac} + \sqrt{bd}, \text{ если } a, b, c, d > 0$$

$$ac + ad + bc + bd \geq ac + bd + 2\sqrt{abcd}$$

$$ad + bc - 2\sqrt{abcd} \geq 0$$

$$(\sqrt{ad})^2 - 2\sqrt{ad} \cdot \sqrt{bc} + (\sqrt{bc})^2 \geq 0$$

$$(\sqrt{ad} - \sqrt{bc})^2 \geq 0, \text{ что верно.}$$



Делимость

Докажем, что число $n^3 - n$, где n – натуральное число, делится на 6:

$$n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n - 1)(n + 1)$$

Заданное число есть произведение трёх последовательных чисел, из которых одно обязательно делится на 3 и хотя бы одно делится на 2. Если произведение делится и на 3, и на 2, то оно делится и на 6.



Тождественные преобразования

Докажем тождество: $\left(\frac{x}{x-3} + \frac{x^2+1}{x^3+1} \cdot \frac{x^2-x+1}{x-3} \right) \div \frac{2x^2+x+1}{x+1} = \frac{1}{x-3}$.

$$\frac{x^2+1}{x^3+1} \cdot \frac{x^2-x+1}{x-3} = \frac{x^2+1}{(x+1)(x^2-x+1)} \cdot \frac{x^2-x+1}{x-3} = \frac{x^2+1}{(x+1)(x-3)},$$

$$\frac{x}{x-3} + \frac{x^2+1}{x^3+1} \cdot \frac{x^2-x+1}{x-3} = \frac{x}{x-3} + \frac{x^2+1}{(x+1)(x-3)} = \frac{x(x+1)+x^2+1}{(x+1)(x-3)} = \frac{2x^2+x+1}{(x+1)(x-3)},$$

$$\left(\frac{x}{x-3} + \frac{x^2+1}{x^3+1} \cdot \frac{x^2-x+1}{x-3} \right) \div \frac{2x^2+x+1}{x+1} = \frac{2x^2+x+1}{(x+1)(x-3)} \div \frac{2x^2+x+1}{x+1} =$$

$$= \frac{(2x^2+x+1)(x+1)}{(x+1)(x-3)(2x^2+x+1)} = \frac{1}{x-3}.$$

Итак, с помощью тождественных преобразований с применением формул сокращённого умножения мы левую часть равенства привели к виду правой его части. Тождество доказано.



Задача Пифагора

«Всякое нечётное число, кроме единицы, есть разность двух квадратов».

Решение:

n – натуральное число

$$(n + 1)^2 - n^2 = (n + 1 - n)(n + 1 + n) = 2n + 1$$

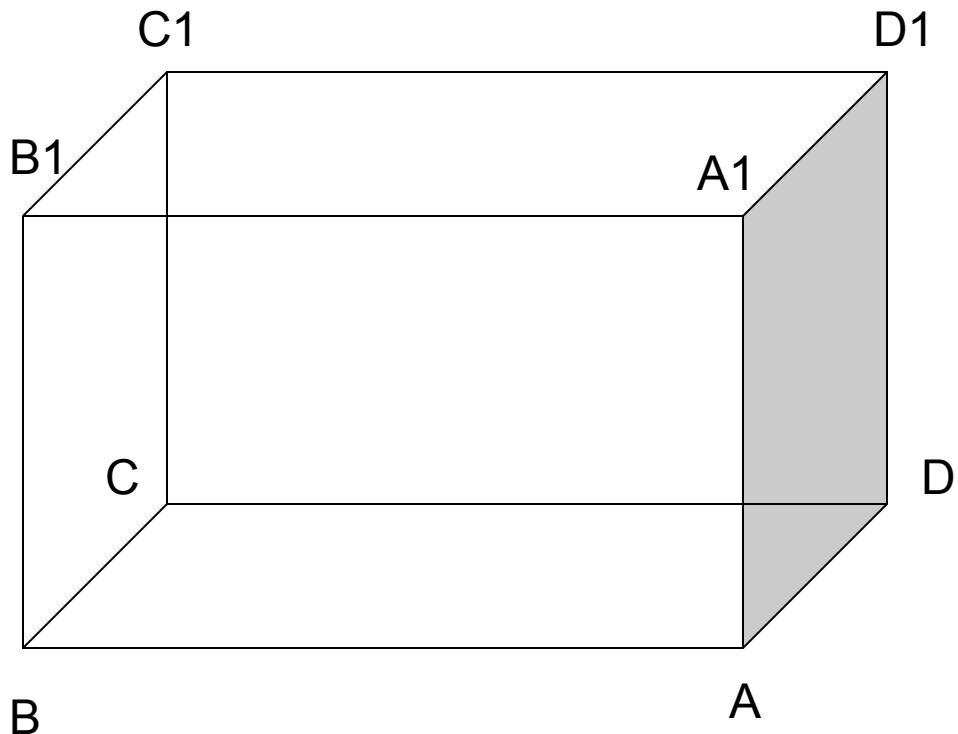
$2n + 1$ – нечётное число





Геометрическая задача

В прямоугольном параллелепипеде длина на 5 см больше ширины и на 5 см меньше высоты. Площадь поверхности равна 244 см^2 . Найдите измерения параллелепипеда (длину, ширину, высоту).





Геометрическая задача

Пусть x см – AB (длина), тогда $(x+5)$ см – AA_1 (высота), $(x-5)$ см – AD (ширина).

$$S = 2S_{ABCD} + 2S_{AA_1D_1D} + 2S_{AA_1B_1B}, \text{ а по условию } - 244 \text{ см}^2$$

$$S_{ABCD} = x(x-5); S_{AA_1D_1D} = (x-5)(x+5);$$

$$S_{AA_1B_1B} = x(x+5)$$

Составим и решим уравнение:

$$2x(x-5) + 2(x-5)(x+5) + 2x(x+5) = 244$$

$$x(x-5) + (x-5)(x+5) + x(x+5) = 122$$

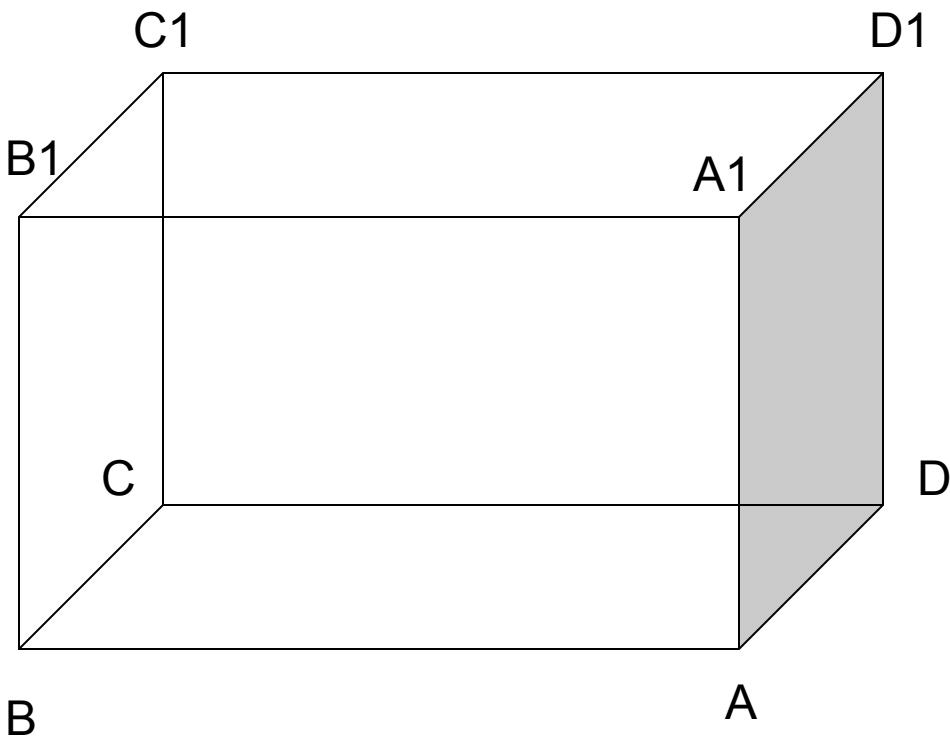
$$x^2 - 5x + x^2 - 5^2 + x^2 + 5x = 122$$

$$3x^2 = 122 + 25$$

$$3x^2 = 147$$

$$x^2 = 49, x > 0 \text{ (по смыслу задачи)}$$

$$\underline{x = 7}$$



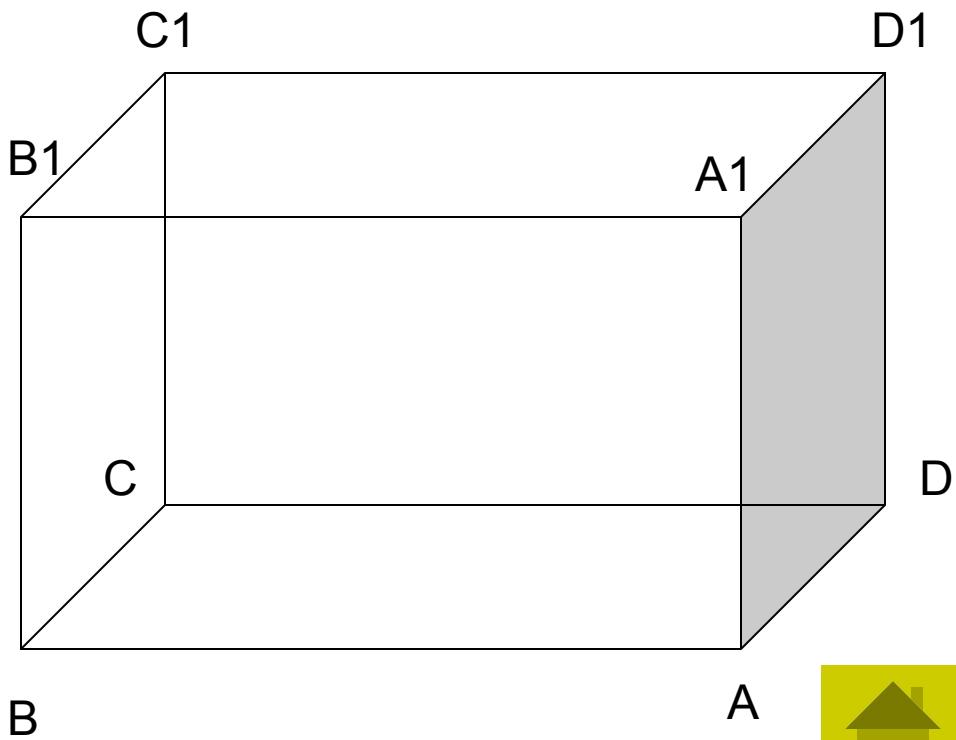


Геометрическая задача

$AB = 7 \text{ см}$ – длина

$AA_1 = 7 \text{ см} + 5 \text{ см} = 12 \text{ см}$ –
высота

$AD = 7 \text{ см} - 5 \text{ см} = 2 \text{ см}$ –
ширина



Ответ: 7 см; 12 см; 2 см.

В

А





Спасибо за внимание.

Презентацию подготовили:
Плеханова Полина, Уткина
Екатерина

8 «А» класс, ГОУ гимназия
№144

