

# Тема 5. Линейная модель использования кормовых ресурсов

1. Цель моделирования и постановка задачи.
2. Математическое представление модели.
3. Разработка числовой модели.
4. Анализ оптимального плана.
5. Развитие методов моделирования использования кормовых ресурсов.

# 1. Цель моделирования

1. Заготовленные в хозяйстве корма могут быть использованы различными способами.
2. Ошибки в планировании использования кормов приводят:
  - к снижению продуктивности из-за нарушения рационов;
  - к нехватке кормов на стойловый период.

Отсюда цель: разработать план использования уже имеющихся в хозяйстве (заготовленных) кормов, обеспечивающий максимально эффективное их использование для производства продукции животноводства.

# 1. Постановка задачи

Определить план использования заготовленных кормов в течение заданного периода, учитывая:

- ◆ наличие кормов и их питательные свойства;
- ◆ количество кормо-дней животных различных видов и половозрастных групп в пределах планового периода;
- ◆ необходимость достижения максимальной эффективности животноводства.

Объект моделирования – технологический процесс кормления сельскохозяйственных животных.

Корма уже заготовлены: их следует использовать возможно полнее => **max** ВП животного-

## 2. Математическое представление модели (вариант с заданными рационами)

### ■ Переменные

- ◆ Количество корма каждого вида для каждой половозрастной группы скота,  $u$ :  
 $\mathbf{x}_1 = (x_{jk1})$ ,  $j \in J$ ,  $k \in K$ , где  
 $J$  – множество видов кормов;  
 $K$  – множество половозрастных групп животных и птицы.
- ◆ Число *дней* кормления животных каждой половозрастной группы по каждому рациону:  
 $\mathbf{x}_2 = (x_{kn2})$ ,  $k \in K$ ,  $n \in N_k$ , где  
 $N_k$  – множество апробированных рационов кормления животных (птицы) половозрастной группы  $k$ ;
- ◆ Приобретение кормов,  $u$ :  
 $\mathbf{x}_3 = (x_{j3})$ ,  $j \in J_1$ , где  
 $J_1$  – множество покупных кормов ( $J_1 \subset J$ ).

# 2. Математическое представление модели (вариант с заданными рационами) ♦

## ■ Ограничения

- ♦ По наличию кормов ( $u$ ):

$$\mathbf{i}\mathbf{x}_{j1} \leq b_{j1}, j \in J \setminus J_1; \mathbf{i}\mathbf{x}_{j1} \leq x_{j3}, j \in J_1, \text{ где}$$

$\mathbf{x}_{j1} = (x_{jk1})$  – вектор количества корма  $j$ , предназначенного каждой половозрастной группе  $k$ ;

$b_j$  – величина запаса корма вида  $j$ ;

- ♦ по балансу кормов для каждой половозрастной группы ( $u$ ):

$$x_{jk1} = \mathbf{a}_{jk1} \mathbf{x}_{k2}, j \in J, k \in K, \text{ где}$$

$\mathbf{x}_{k2} = (x_{kn2})$  – вектор числа кормо-дней потребления каждого рациона животными (птицей) половозрастной группы  $k$ ;

$\mathbf{a}_{jk1} = (a_{jkn1})$  – вектор потребности в корме  $j$  животных  $k$ , потребляющих рацион  $n$  ( $u$ /кормо-день);

- ♦ по доле рациона  $n$  в кормлении животных половозрастной группы  $k$ , кормо-дней рациона  $n$ :

$$x_{kn2} \leq b_{kn2} \mathbf{i}\mathbf{x}_{k2} \quad \exists k \in K, n \in N_k, \text{ где } b_{kn2} \text{ – макс. доля рациона } n \text{ в}$$

общем числе кормо-дней животных  $k$  ( $k$ -дней/ $k$ -день);

- ♦ по количеству кормо-дней животных  $k$ :

$$b_{k3} \leq \mathbf{i}\mathbf{x}_{k2} \leq b_{k4}, k \in K, \text{ где } b_{k3}, b_{k4} \text{ – число кормо-дней животных } k, \text{ обусловленное оборотом стада.}$$

По  
покупным  
кормам  
ограниче-  
ние  
обычно не  
задаётся

# Математическое представление модели (вариант с заданными рационами)

- Целевая функция: максимум продуктивности (*тыс. руб.*)

$\max \mathbf{c}\mathbf{x}_2 - \mathbf{d}\mathbf{x}_3$ , где

$\mathbf{c} = (c_{kn})$  – вектор валовой продукции (*тыс. руб./день*), получаемой от животных  $k$  при их кормлении по рациону  $n$ ;

$\mathbf{d} = (d_{jk})$  – вектор цен покупных кормов (*тыс.руб./ц*).

- ◆ Можно предусмотреть *продажу* избытка кормов (сена, силоса) хозяйствам населения (только при наличии гарантированного спроса).

## 2. Математическое представление модели (вариант с заданными рационами)

### Как упростить модель

- ◆ Ограничение по наличию кормов:

$$\mathbf{i}\mathbf{x}_{j1} \leq b_{j1}, j \in J.$$

- ◆ Ограничение по балансу кормов для каждой половозрастной группы:

$$x_{jk1} = \mathbf{a}_{jk1} \mathbf{x}_{k2}.$$

- Подставив вторые неравенства в первые (заменяв каждый  $x_{jk1}$  в  $\mathbf{x}_{j1}$  на  $\mathbf{a}_{jk1} \mathbf{x}_{k2}$ ), получим

$$\mathbf{a}_{jk1} \mathbf{x}_2 \leq b_{j1}, j \in J.$$

- В ЗЛП не осталось ограничений, содержащих переменные  $\mathbf{x}_1$ . Целевая функция от них тоже не зависит. Решив задачу *без этих переменных*, можно определить их значения *после решения* по формуле

$$x_{jk1} = \mathbf{a}_{jk1} \mathbf{x}_{k2}.$$

## 2. Математическое представление модели (вариант с оптимизацией рационов)

### ■ Переменные

- ◆ Количество корма каждого вида для каждой половозрастной группы скота,  $u$ :

$$\mathbf{x}_1 = (x_{jk1}), j \in J, k \in K, \text{ где}$$

$J$  – множество видов кормов;

$K$  – множество половозрастных групп животных и птицы.

- ◆ Число *дней* кормления животных каждой половозрастной группы:

$$\mathbf{x}_2 = (x_{k2}), k \in K.$$

Нет разделения по рационам (переменных стало меньше)



## 2. Математическое представление модели (вариант с оптимизацией рационов)

### ■ Ограничения

- ◆ По наличию кормов (без изменений);
- ◆ По балансу *питательных веществ* для каждой половозрастной группы:  
 $\mathbf{A}_1 \mathbf{x}_1 \geq \mathbf{A}_2 \mathbf{x}_2$ , где  
 $\mathbf{A}_1 = (a_{jk,l,1})$  – матрица содержания питательного вещества  $l$  ( $l \in L$  – множеству учитываемых моделью питательных веществ) в корме  $j$  с учётом степени его усвоения животными  $k$  (*единиц пит. вещества/ц*);  
 $\mathbf{A}_2 = (a_{k,l,2})$  – матрица потребности животных  $k$  в питательном веществе  $l$  (*единиц пит. вещества/кормо-день*);
- ◆ По массе суточных рационов,  $ц$ :  
 $\mathbf{i} \mathbf{x}_{k1} \leq b_{k1} x_{k2}$ ,  $k \in K$ , где  
 $\mathbf{x}_{k1} = (x_{jk1})$ ;  $b_{k1}$  – максимально допустимая масса суточного рациона для животных  $k$  ( $ц$ );
- ◆ По минимальному количеству *кормо-дней* животных  $k$ :  
 $x_{k2} \geq b_{k2}$ ,  $k \in K$ , где  $b_{k2}$  – минимально необходимое число *кормо-дней* животных  $k$ , обусловленное оборотом стада. (...)

## 2. Математическое представление модели (вариант с оптимизацией рационов)

- ◆ По допустимой доле кормов различных групп в общей питательности рациона животных каждого вида (*кг*, *МДж* или *к.ед.*):

$$\mathbf{a}_{lm3} \mathbf{x}_2 \leq \mathbf{a}_{lm1} \mathbf{x}_{m1} \leq \mathbf{a}_{lm4} \mathbf{x}_2, \quad m \in M, \quad l = l_0, \quad \text{где}$$

- ◆  $\mathbf{x}_{m1} = (x_{jk1})$ ,  $j \in J_m$  (корма группы  $m$ ),  $k \in K$  (виды животных).
- ◆  $l_0$  — вид питательного вещества, доля групп кормов в котором регламентируется. Может быть одним из следующих:
  - ◆ сухое вещество (*кг*);
  - ◆ обменная энергия (*МДж*);
  - ◆ питательность по ожидаемому жируотложению (*к.ед.*) и т.п.
- ◆  $M$  — множество групп кормов,
- ◆  $\mathbf{a}_{lm1} = (a_{jk,l,1})$ ,  $j \in J_m$  — вектор содержания питательного вещества  $l = l_0$  в кормах группы  $m$  (*кг/ц*, *МДж/ц* или *к.ед./ц*);
- ◆  $J_m$  — множество кормов, входящих в группу  $m$ ;
- ◆  $\mathbf{a}_{lm3} = (a_{klm3})$ ,  $\mathbf{a}_{lm4} = (a_{klm4})$  — векторы минимальной и максимальной потребности животных  $k$  в питательном веществе  $l = l_0$ , удовлетворяемой за счёт кормов группы  $m$ ;

## 2. Математическое представление модели (вариант с оптимизацией рационов)

- Целевая функция: максимум продуктивности (*тыс. руб.*)

max  $\mathbf{c}\mathbf{x}_2$ , где

$\mathbf{c} = (c_k)$  – вектор валовой продукции (*тыс.руб./день*),  
получаемой от животных  $k$ .

Допускается учёт затрат на покупку либо выручки от продажи кормов, как в первом варианте.

# 3. Разработка числовой модели

Множество видов кормов определяется:

- ◆ наличием запасов корма данного вида в хозяйстве на момент моделирования;
- ◆ возможностью приобретения корма в течение планового периода.

Множество половозрастных групп животных определяется планом оборота стада.

Множество рационов определяется:

- ◆ наличием кормов,
- ◆ требованием разнообразия их использования в разных рационах;
- ◆ требованием разнообразия интенсивности рационов.

# 3. Разработка числовой модели

(вариант с заданными рационами) ♦

- $b_{j1}$  — по данным аналитических счетов (остатки кормов на момент решения модели).
- $a_{j1}$  — из модели оптимального рациона, по результатам апробации рациона или из справочников («Нормы и рационы кормления сельскохозяйственных животных»).
- $b_{kn2}$  — по результатам моделирования организма животного, апробации рациона или из справочников.
- $b_{k3}$  — по данным плана оборота стада.
- **c** — для данного рациона:
  - ♦ плановые привесы, умноженные на ожидаемые цены реализации скота в живой массе;
  - ♦ плановые надои, умноженные на ожидаемые цены молока;
  - ♦ плановая яичная продуктивность, умноженная на ожидаемую цену реализации десятка яиц и т.п.
- **d** — по ожидаемым ценам на покупные корма.

Неопределённость **c** и **d**  
требует анализа  
устойчивости  
или применения метода  
Монте-Карло

# 4. Анализ оптимального плана

(вариант с заданными рационами)

## 1. Кормо-дни содержания животных

Виды животных	По плану оборота стада	Сверх плана	% сверх-плановых кормо-дней	Стоимость сверх-плановой продукции
Коровы				
Нетели		х	х	х
Молодняк				
Свиньи				

# 4. Анализ оптимального плана

## 2. Распределение кормов

Виды кормов	Всего в наличии, ц	В % к итогу:				
		коровам	нетелям	молодняку	свиньям	остаток
Зерно фуражное						
Комбикорм для коров						
Комбикорм для свиней						
Сено						
Силос						
...						

# 4. Анализ оптимального плана

## 3. Рационы кормления

Рационы	Кормо- дней	В % к итогу
Коровы:		
Интенсивный рацион		
Сенажный рацион		
Силосный рацион		
Нетели:		
Белковый рацион		
Сенажный рацион		
Силосный рацион		
Молодняк:		
Интенсивный рацион		
Белковый рацион		
Сенажный рацион		
Силосный рацион		



## 4. Анализ оптимального плана ♦

### 4. Структура потребления кормов по группам, % в общей питательности

Группы кормов	коровам	нетелям	молодняку	свиньям
Концентрированные				
в т.ч. комбикорм				
в т.ч. травяная мука				
Грубые		1		
в т.ч. солома		0		
Силос		0		
Сенаж		0		
Корнеклубнеплоды		0%		
Корма животного происхождения				

Примечание: без учёта молока на выпойку

## 4. Анализ оптимального плана

### 5. Объективно обусловленные оценки кормов, руб./кг

Вид корма	О.о.о.	Рыночная цена	Транзакц. издержки	Возможная прибыль
Зерно фуражное	0	1,95	0,20	$1,95 - 0,20 = 1,75$ (прод)
Комбикорм для коров	1,45	2,70	0,22	$2,70 - 1,45 - 0,22 = 1,03$ (прод)
Комбикорм для свиней	4,96	2,95	0,22	$4,96 - 2,95 - 0,22 = 1,79$ (куп)
Сено	0,47	0,45	0,09	—
Силос	0,35	0,35	0,08	—
...				

Примечание: для принятия решения о покупке/продаже нужно оценить объём сделки (анализ устойчивости) и учесть условно-постоянную часть транзакционных издержек.

# 4. Анализ оптимального плана $\emptyset$

(вариант с заданными рационами)

## 1. Кормо-дни содержания животных

Виды животных	По плану оборота стада	Сверх плана	% сверх-плановых кормо-дней	Стоимость сверх-плановой продукции
Коровы				
Нетели		х	х	х
Молодняк				
Свиньи				

# 4. Анализ оптимального плана $\emptyset$

## 2. Распределение кормов

Виды кормов	Всего в наличии, ц	В % к итогу:				
		коровам	нетелям	молодняку	свиньям	остаток
Зерно фуражное						
Комбикорм для коров						
Комбикорм для свиней						
Сено						
Силос						
...						

# 4. Анализ оптимального плана $\emptyset$

## 3. Рационы кормления

Рационы	Кормо- дней	В % к итогу
Коровы:		
Интенсивный рацион		
Сенажный рацион		
Силосный рацион		
Нетели:		
Белковый рацион		
Сенажный рацион		
Силосный рацион		
Молодняк:		
Интенсивный рацион		
Белковый рацион		
Сенажный рацион		
Силосный рацион		

# 4. Анализ оптимального плана ∅

4. Структура потребления кормов по группам, % в общей питательности

Группы кормов	коровам	нетелям	МОЛОД- НЯКУ	свиньям
Концентрированные				
в т.ч. комбикорм				
в т.ч. травяная мука				
Грубые				
в т.ч. солома				
Силос				
Сенаж				
Корнеклубнеплоды				
Корма животного происхождения				

Примечание: без учёта молока на выпойку

## 4. Анализ оптимального плана $\emptyset$

### 5. Объективно обусловленные оценки кормов, руб./кг

Вид корма	О.о.о.	Рыночная цена	Транзакц. издержки	Возможная прибыль
Зерно фуражное	0	1,95	0,20	$1,95 - 0,20 = 1,75$ (прод)
Комбикорм для коров	1,45	2,70	0,22	$2,70 - 1,45 - 0,22 = 1,03$ (прод)
Комбикорм для свиней	4,96	2,95	0,22	$4,96 - 2,95 - 0,22 = 1,79$ (куп)
Сено	0,47	0,45	0,09	—
Силос	0,35	0,35	0,08	—
...				

Примечание: для принятия решения о покупке/продаже нужно оценить объём сделки (анализ устойчивости) и учесть условно-постоянную часть транзакционных издержек.

# 4. Анализ оптимального плана:

двойственные оценки (вариант с заданными рационами)

- **Оценки по балансам кормов для каждой половозрастной группы (взяты по абсолютной величине):**
  - ◆ показывают эффект от скармливания данного корма данной половозрастной группе скота/птицы:
    - ◆ не может быть выше оценки корма;
    - ◆ если он ниже оценки корма, то оптимальный план не предусматривает скармливание этого корма данной группе животных.
- **Оценки по доле рациона в кормо-днях группы животных:**
  - ◆ показывают, насколько снизится ВП животноводства, если сократить использование лимитированного рациона на 1 кормо-день.
- **Оценки по минимальному количеству кормо-дней:**
  - ◆ показывают, в какую сумму обходится кормо-день содержания животного в данной группе.



# 5. Развитие моделей использования кормов

## ■ Недостатки модели:

- ◆ не учитываются дополнительные затраты, связанные с увеличением количества кормо-дней;
- ◆ вариант с оптимизацией рационов:
  - ◆ обладает недостатками модели рациона;
  - ◆ не отражает рост продуктивности при увеличении уровня кормления;
- ◆ коэффициенты целевой функции недостоверны.

## ■ Пути преодоления:

- ◆ дополнительные затраты в расчёте на 1 кормо-день можно вычесть из стоимости ВП при расчёте вектора  $c$  (трудоёмко);
- ◆ недостатки варианта с оптимизацией рациона устраняются:
  - ◆ переходом к варианту с заданными рационами;
  - ◆ включением переменных по росту продуктивности при интенсивном кормлении;
- ◆ недостоверность коэффициентов преодолевается анализом устойчивости или использованием метода Монте-Карло.

# Литература

## ■ Основная

- ◆ Математическое моделирование экономических процессов в сельском хозяйстве / *Гатаулин А.М., Гаврилов Г.В. и др.* М.: Агропромиздат, 1990. — глава 7.2.
- ◆ Презентация: <http://svetlov.timacad.ru/>Презентация:  
<http://svetlov.timacad.ru/umk1>Презентация:  
<http://svetlov.timacad.ru/umk1/lek5.ppt>

## ■ Дополнительная

- ◆ Нормы и рационы кормления сельскохозяйственных животных: Справ. пособие / *А.П. Калашиников, Н.И. Клейменов, В.В. Щеглов.* М.: Знание, 1995.