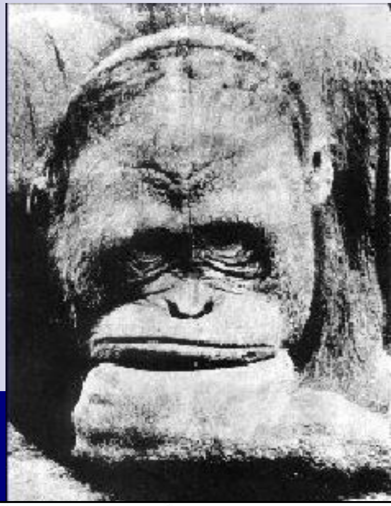
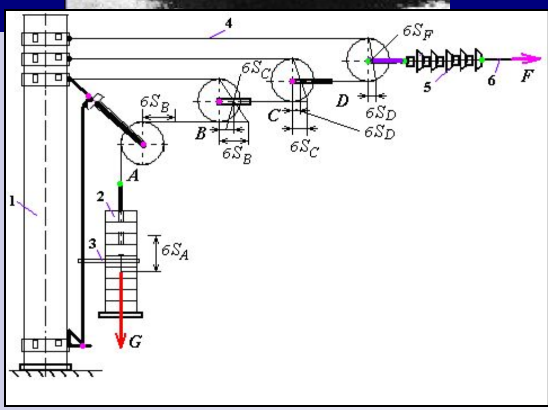
Московский государственный университет путей сообщения (МИИТ)
Кафедра теоретической механики
Научно-технический центр транспортных технологий

Бондаренко А.Н.



Курс лекций по теоретической механике



Динамика (II часть)

Электронный учебный курс написан на основе лекций, читавшихся автором для студентов, обучавшихся по специальностям СЖД, ПГС и СДМ в НИИЖТе и МИИТе (1974-2006 гг.). Учебный материал соответствует календарным планам в объеме трех семестров.

Для полной реализации анимационных эффектов при презентации необходимо использовать средство просмотра Power Point не ниже, чем встроенный в Microsoft Office операционной системы Windows-XP Professional.
Запуск презентации – F5, навигация – Enter, навигационные клавиши, щелчок мыши, кнопки.
Завершение – Esc.
Замечания и предложения можно послать по e-mail: bond@miit.ru .

Москва - 2007

- **Лекция 13**.

Аналитическая механика.
Обобщенные координаты.
Уравнения связей.
Возможные перемещения.
Идеальные связи.
Принцип возможных перемещений.
Примеры использования принципа возможных перемещений при определении реакций связей.

Лекция 13

- **Аналитическая механика –** устанавливает общие, единые методы изучения движения и равновесия любых самых сложных материальных систем средствами математического анализа. Для этого вводятся новые понятия и обобщаются старые.
- **Связи –** рассматриваются теперь как некоторые условия, налагаемые на систему, которые должны удовлетворяться в процессе движения системы. Они содержат соотношения (уравнения или неравенства) между координатами, компонентами скоростей и ускорений и, возможно, времени.

Классификация связей: *По интегрируемости:*

Голономные (геометрические) – выражаются конечными уравнениями относительно координат или интегрируемыми дифференциальными уравнениями относительно координат: $\varphi(x_k, y_k, z_k, t) = 0$

Неголономные (кинематические) - выражаются неинтегрируемыми дифференциальными уравнениями относительно координат, т.е. уравнениями, содержащими не только координаты точек системы, но и их производные по времени: $\varphi(x_k, y_k, z_k, \dot{x}_k, \dot{y}_k, \dot{z}_k, t) = 0$
Неинтегрируемость состоит в том, что их нельзя привести к виду уравнений голономной связи.

По зависимости от времени:

Склерономные (стационарные) – не зависящие от времени: $\varphi(x_k, y_k, z_k) = 0$
Например, уравнение траектории, полученное для некоторой точки
рассматривается как уравнение склерономной голономной связи:

Реономные (нестационарные) – зависящие от времени. Например

По освобождаемости:

Неосвобождающие (удерживающие или двухсторонние) – описы
или поверхности, описываемой уравнением. Этому соответствует,

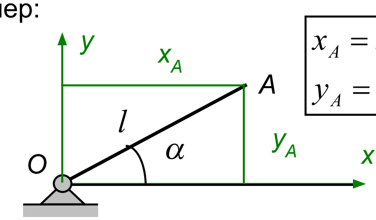
Освобождающие (неудерживающие или односторонние) – выраж
например, гибкая нить или гладкая поверхность.

Если на систему *N* точек в пространстве наложено *m* голономных связей, то декартовые координаты всегда могут быть выражены конечными соотношениями:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(q_1, q_2, ..., q_n, t); \\ x_2 &= x_2(q_1, q_2, ..., q_n, t); \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots; \\ x_{3N} &= x_1(q_1, q_2, ..., q_n, t). \end{aligned}$$

Число обобщенных координат равно *n* = 3*N* – *m*.

- **Обобщенные координаты –** независимые параметры, однозначно определяющее положение механической системы при ее движении. Обобщенность состоит в том, что они могут иметь различную природу (линейные или угловые перемещения относительно некоторого начального положения или какие-либо другие величины). Общее обозначение – q_i (i = 1,…,n).
- **Число степеней свободы** – число независимых обобщенных координат, через которые можно выразить декартовые координаты всех точек системы. Например:

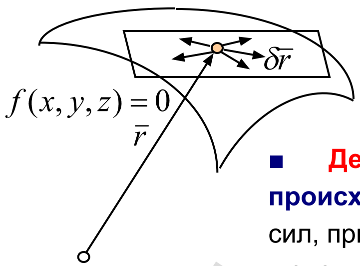


$$x_A = l\cos\alpha; \quad y_A = l\sin\alpha$$

Здесь положение любой точки стержня (например, *A*) однозначно определяется значением всего *одной* величины – угла α, который является *обобщенной* координатой (q = α). Число степеней свободы равно n = 1.
Уравнение связи для рассматриваемой точки *A*: $x^2 + y^2 = l^2$

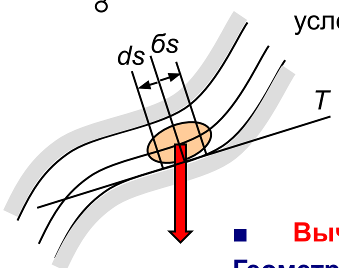
Лекция 13 (продолжение – 13.2)

- **Возможные перемещения – бесконечно малые перемещения, допускаемые наложенными на систему связями.**



С точностью до бесконечно малых **приращения радиуса-вектора** лежат в касательной плоскости к поверхности связи и представляют собой **возможные перемещения**. В случае нестационарной голономной связи $f(x,y,z,t) = 0$ возможные перемещения рассматриваются для положения и формы поверхности связи, соответствующих данному моменту времени. **Возможные перемещения не зависят от приложенных к системе сил.**

- **Действительные перемещения – бесконечно малые (элементарные) перемещения, действительно (фактически) происходящие за время *dt*, допускаемые наложенными на систему связями**. Действительные перемещения зависят от сил, приложенных к системе, от вида связей (стационарных, нестационарных, голономных, неголономных) и начальных условий. Таким образом, возможные перемещения являются более общим понятием, чем действительные перемещения.

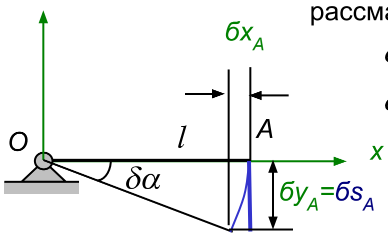


Поскольку вектор положения точки системы можно выразить через обобщенные координаты $\bar{r}_k = \bar{r}_k(q_1, q_2, ..., q_n)$ то возможные перемещения выражаются через приращения обобщенных координат как полный дифференциал:

$$\delta\bar{r}_k = \frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_2}\delta q_2 + ... + \frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_n}\delta q_n \quad \text{или} \quad \boxed{\delta\bar{r}_k = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_i}\delta q_i.}$$

- **Вычисление возможных перемещений:**

Геометрический способ - в силу малости возможных перемещений при повороте твердого тела любая его точка может рассматриваться движущейся не по дуге, а по перпендикуляру к радиусу вращения в сторону угла поворота:

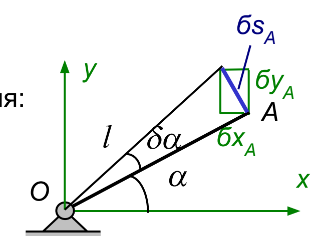


$$\delta x_A = l - l\cos\delta\alpha; \qquad \delta y_A = l\sin\delta\alpha.$$

Для малых углов cosα ≈ 1, sinα ≈ α, тогда:

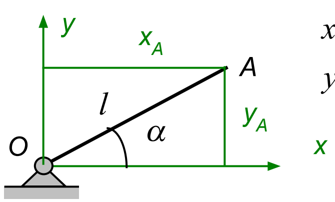
$$\boxed{\delta x_A \approx 0; \quad \delta y_A \approx \delta s_A = l\delta\alpha.}$$

Например, для наклонного стержня:



$$\boxed{\delta s_A = l\delta\alpha.} \qquad \boxed{\delta x_A = \delta s_A\sin\alpha = l\sin\alpha\delta\alpha; \quad \delta y_A \approx \delta s_A\cos\alpha = l\cos\alpha\delta\alpha.}$$

Аналитический способ – вычисляется вариация от координат:



$$x_A = l\cos\alpha; \qquad y_A = l\sin\alpha$$

$$\delta x_A = \frac{\partial}{\partial\alpha}(l\cos\alpha)\delta\alpha = -l\sin\alpha\delta\alpha;$$

$$\delta y_A = \frac{\partial}{\partial\alpha}(l\sin\alpha)\delta\alpha = l\cos\alpha\delta\alpha.$$

В отличие от геометрического способа знаки возможного приращения координат получаются автоматически. При использовании геометрического способа в дальнейших вычислениях, например, работы, необходимо учитывать направление полученного приращения (перемещения).

- **Возможная работа силы – элементарная работа силы на том или ином возможном перемещении:** $\boxed{\delta A = \bar{F}\delta\bar{r}.}$

В координатном виде: $\boxed{\delta A = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z.}$ В естественном виде: $\boxed{\delta A = F\delta s\cos(\bar{F}, \delta\bar{r}).}$

Лекция 13 (продолжение – 13.3)

- **Идеальные связи – связи, при которых сумма элементарных работ сил реакций связи на любом возможном перемещении равна нулю:**

$$\delta A^R = \sum_{k=1}^{n} \overline{R}_k \delta\overline{r}_k = 0.$$

Примеры идеальных связей: абсолютно гладкая поверхность (при скольжении), абсолютно твердая поверхность (при качении без скольжения). **Любую неидеальную связь можно рассматривать как идеальную, если соответствующие реакции связи (совершающие работу на возможных перемещениях) причислить к задаваемым (активным) силам.**

- **Принцип возможных перемещений – Для равновесия материальной системы, подчиненной голономным, стационарным, двухсторонним и идеальным связям, необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех активных сил на любом возможном перемещении из предполагаемого положения равновесия равнялось нулю:**

$$\delta A^F = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k \delta\overline{r}_k = 0.$$

Доказательство необходимости: Система находится в равновесии и для каждой точки удовлетворяется уравнение равновесия: $\overline{F}_k + \overline{R}_k = 0.$

Умножим скалярно на вектор возможного перемещения точки и сложим:

$$\sum \overline{F}_k \delta\overline{r}_k + \boxed{\sum \overline{R}_k \delta\overline{r}_k} = 0. \quad \Rightarrow \quad \delta A^F = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k \delta\overline{r}_k = 0.$$

= 0

Доказательство достаточности: Дано: $\sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k \delta\overline{r}_k = 0.$

Предположим, что равновесия нет.

Тогда каждая из точек под действием активных сил придет в движение, переместится за ... сматривая эти перемещения, ...

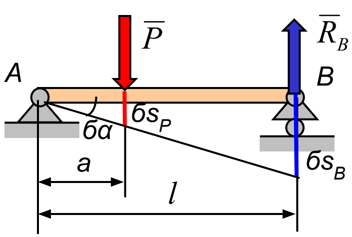
$$\sum \overline{F}_k \delta\overline{r}_k + \boxed{\sum \overline{R}_k \delta\overline{r}_k} > 0.$$

= 0

Получили противоречие с исходным равенством. Значит предположение об отсутствии равновесия неверно.

- **Примеры использования принципа возможных п...**

Пример 1. Определить реакцию балки в правой опоре:



Балка неподвижна и не им... бросим связь, реакция которой отыскивается, и за...

Без правой опоры балка м... цию $\boldsymbol{R}_B$ причисляем к активным силам. Зададим малое воз...

Вычислим возможные пер...

Запишем сумму работ: ... 0.

$$R_B = \frac{Pa\delta\alpha}{l\delta\alpha} = \frac{Pa}{l}.$$

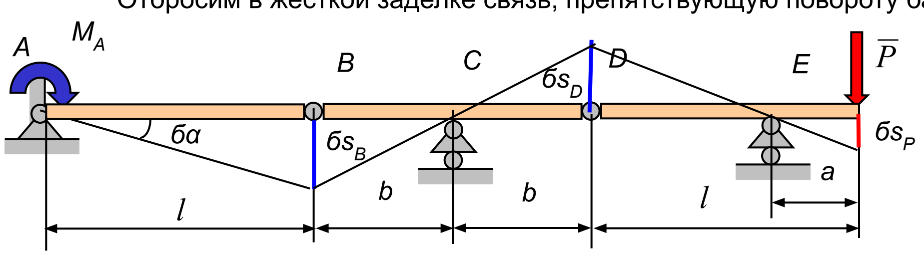
Заметим, что

1. для нахождения опорного момента M_A из уравнений статики потребовалось бы решить как минимум три уравнения равновесия;
2. эпюра возможных перемещений пропорциональна линии влияния усилия;
3. если задать возможное перемещение для искомой реакции равным 1, например, $\delta\alpha$ =1, то эпюра перемещений будет полностью тождественна линии влияния поскольку

$$\delta A = M_A \cdot 1 + 1 \cdot \delta s_F(z) = 0; \quad M_A = -\delta s_F(z).$$

Пример 2. Определить опорный момент многопролетной ...

Отбросим в жесткой заделке связь, препятствующую повороту балки, и заменим ее парой сил M_A:



Вычислим возможные перемещения:

$$\delta s_B = l\delta\alpha;$$

$$\delta s_D = \delta s_B = l\delta\alpha;$$

$$\delta s_F = \frac{a}{l-a}\delta s_D = \frac{a}{l-a} l\delta\alpha.$$

Запишем сумму работ:

$$\delta A = M_A \delta\alpha + F\delta s_F = 0.$$

$$M_A \delta\alpha + F\frac{a}{l-a} l\delta\alpha = 0.$$

$$M_A = -F\frac{a}{l-a} l.$$