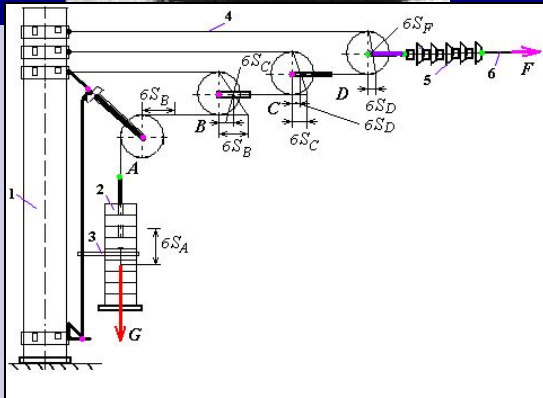
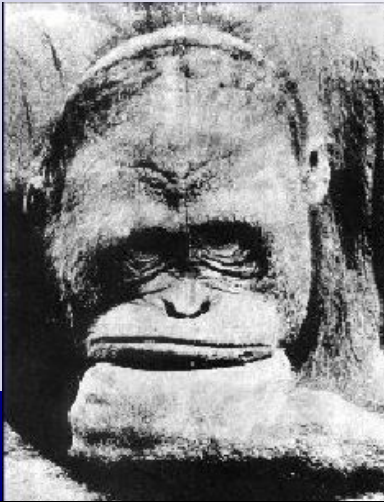


Бондаренко А.Н.



Курс лекций по теоретической механике

Динамика (II часть)

Электронный учебный курс написан на основе лекций, читавшихся автором для студентов, обучавшихся по специальностям СЖД, ПГС и СДМ в НИИЖТе и МИИТе (1974-2006 гг.). Учебный материал соответствует календарным планам в объеме трех семестров.

Для полной реализации анимационных эффектов при презентации необходимо использовать средство просмотра Power Point не ниже, чем встроенный в Microsoft Office операционной системы Windows-XP Professional.

Запуск презентации – F5, навигация – Enter, навигационные клавиши, щелчок мыши, кнопки.

Завершение – Esc.

Замечания и предложения можно послать по e-mail: bond@miit.ru.

Москва - 2007

■ Лекция 13.

Аналитическая механика.

Обобщенные координаты.

Уравнения связей.

Возможные перемещения.

Идеальные связи.

Принцип возможных перемещений.

Примеры использования принципа
возможных перемещений при
определении реакций связей.

Лекция 13

- **Аналитическая механика** – устанавливает общие, единые методы изучения движения и равновесия любых самых сложных материальных систем средствами математического анализа. Для этого вводятся новые понятия и обобщаются старые.
- **Связи** – рассматриваются теперь как некоторые условия, налагаемые на систему, которые должны удовлетворяться в процессе движения системы. Они содержат соотношения (уравнения или неравенства) между координатами, компонентами скоростей и ускорений и, возможно, времени.

Классификация связей: По интегрируемости:

Голономные (геометрические) – выражаются конечными уравнениями относительно координат или интегрируемыми дифференциальными уравнениями относительно координат:

$$\varphi(x_k, y_k, z_k, t) = 0$$

Неголономные (кинематические) - выражаются неинтегрируемыми дифференциальными уравнениями относительно координат, т.е. уравнениями, содержащими не только координаты точек системы, но и их производные по времени:

$$\varphi(x_k, y_k, z_k, \dot{x}_k, \dot{y}_k, \dot{z}_k, t) = 0$$

Неинтегрируемость состоит в том, что их нельзя привести к виду уравнений голономной связи.

По зависимости от времени:

Склерономные (стационарные) – не зависящие от времени:

$$\varphi(x_k, y_k, z_k) = 0$$

Например, уравнение траектории, полученное для некоторой точки рассматривается как уравнение склерономной голономной связи:

Если на систему N точек в пространстве наложено m голономных связей, то декартовы координаты всегда могут быть выражены конечными соотношениями:

$$x_1 = x_1(q_1, q_2, \dots, q_n, t);$$

$$x_2 = x_2(q_1, q_2, \dots, q_n, t);$$

$$\dots;$$

$$x_{3N} = x_{3N}(q_1, q_2, \dots, q_n, t).$$

Число обобщенных координат равно $n = 3N - m$.

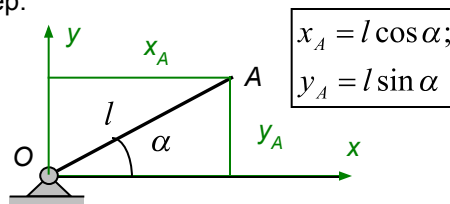
Реономные (нестационарные) – зависящие от времени. Например:

По освобождаемости:

Неосвобождающие (удерживающие или двухсторонние) – описывают или поверхности, описываемой уравнением. Этому соответствует,

Освобождающие (неудерживающие или односторонние) – выражают, например, гибкая нить или гладкая поверхность.

- **Обобщенные координаты** – независимые параметры, однозначно определяющие положение механической системы при ее движении. Обобщенность состоит в том, что они могут иметь различную природу (линейные или угловые перемещения относительно некоторого начального положения или какие-либо другие величины). Общее обозначение – q_i ($i = 1, \dots, n$).
- **Число степеней свободы** – число независимых обобщенных координат, через которые можно выразить декартовы координаты всех точек системы. Например:



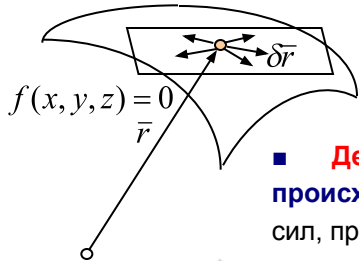
Здесь положение любой точки стержня (например, A) однозначно определяется значением всего *одной* величины – угла α , который является *обобщенной* координатой ($q = \alpha$). Число степеней свободы равно $n = 1$.

Уравнение связи для рассматриваемой точки A :

$$x^2 + y^2 = l^2$$

Лекция 13 (продолжение – 13.2)

- Возможные перемещения** – бесконечно малые перемещения, допускаемые наложенными на систему связями.



С точностью до бесконечно малых **приращения радиуса-вектора** лежат в касательной плоскости к поверхности связи и представляют собой **возможные перемещения**. В случае нестационарной голономной связи $f(x, y, z, t) = 0$ возможные перемещения рассматриваются для положения и формы поверхности связи, соответствующих данному моменту времени. **Возможные перемещения не зависят от приложенных к системе сил.**

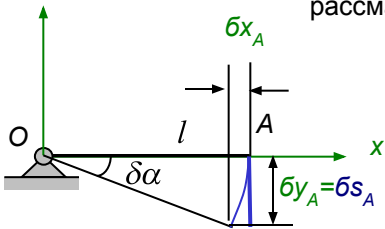
- Действительные перемещения** – бесконечно малые (элементарные) перемещения, действительно (фактически) происходящие за время dt , допускаемые наложенными на систему связями. Действительные перемещения зависят от сил, приложенных к системе, от вида связей (стационарных, нестационарных, голономных, неголономных) и начальных условий. Таким образом, возможные перемещения являются более общим понятием, чем действительные перемещения.

Поскольку вектор положения точки системы можно выразить через обобщенные координаты $\vec{r}_k = \vec{r}_k(q_1, q_2, \dots, q_n)$ то возможные перемещения выражаются через приращения обобщенных координат как полный дифференциал:

$$\delta \vec{r}_k = \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_n} \delta q_n \quad \text{или} \quad \delta \vec{r}_k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i.$$

- Вычисление возможных перемещений:**

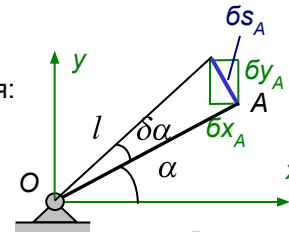
Геометрический способ - в силу малости возможных перемещений при повороте твердого тела любая его точка может рассматриваться движущейся не по дуге, а по перпендикуляру к радиусу вращения в сторону угла поворота:



$$\delta x_A = l - l \cos \delta \alpha; \quad \text{Для малых углов } \cos \alpha \approx 1, \sin \alpha \approx \alpha, \text{ тогда:}$$

$$\delta y_A = l \sin \delta \alpha.$$

Например, для наклонного стержня:



$$\delta x_A \approx 0;$$

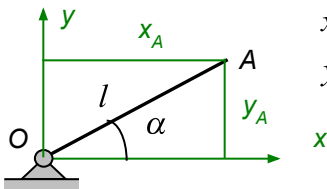
$$\delta y_A \approx \delta s_A = l \delta \alpha.$$

$$\delta s_A = l \delta \alpha.$$

$$\delta x_A = \delta s_A \sin \alpha = l \sin \alpha \delta \alpha;$$

$$\delta y_A \approx \delta s_A \cos \alpha = l \cos \alpha \delta \alpha.$$

Аналитический способ – вычисляется вариация от координат:



$$x_A = l \cos \alpha;$$

$$y_A = l \sin \alpha$$

$$\Rightarrow \delta x_A = \frac{\partial}{\partial \alpha} (l \cos \alpha) \delta \alpha = -l \sin \alpha \delta \alpha;$$

$$\delta y_A = \frac{\partial}{\partial \alpha} (l \sin \alpha) \delta \alpha = l \cos \alpha \delta \alpha.$$

В отличие от геометрического способа знаки возможного приращения координат получаются автоматически. При использовании геометрического способа в дальнейших вычислениях, например, работы, необходимо учитывать направление полученного приращения (перемещения).

- Возможная работа силы** – элементарная работа силы на том или ином возможном перемещении:

$$\delta A = \vec{F} \delta \vec{r}.$$

В координатном виде: $\delta A = X \delta x + Y \delta y + Z \delta z.$

В естественном виде: $\delta A = F \delta s \cos(\vec{F}, \delta \vec{r}).$

Лекция 13 (продолжение – 13.3)

- Идеальные связи** – связи, при которых сумма элементарных работ сил реакций связи на любом возможном перемещении равна нулю:

$$\delta A^R = \sum_{k=1}^n \bar{R}_k \delta \bar{r}_k = 0.$$

Примеры идеальных связей: абсолютно гладкая поверхность (при скольжении), абсолютно твердая поверхность (при качении без скольжения). Любую неидеальную связь можно рассматривать как идеальную, если соответствующие реакции связи (совершающие работу на возможных перемещения) причислить к задаваемым (активным) силам.

- Принцип возможных перемещений** – Для равновесия материальной системы, подчиненной голономным, стационарным, двухсторонним и идеальным связям, необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех активных сил на любом возможном перемещении из предполагаемого положения равновесия равнялась нулю:

Доказательство необходимости: Система находится в равновесии и для каждой точки удовлетворяется уравнение равновесия:

$$\bar{F}_k + \bar{R}_k = 0.$$

Умножим скалярно на вектор возможного перемещения точки и сложим:

$$\sum \bar{F}_k \delta \bar{r}_k + \sum \bar{R}_k \delta \bar{r}_k = 0. \quad \Rightarrow \quad \delta A^F = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k \delta \bar{r}_k = 0.$$

Доказательство достаточности: Дано: $\sum_{k=1}^n \bar{F}_k \delta \bar{r}_k = 0$. Предположим, что равновесия нет.

Тогда каждая из точек под действием активных сил придет в движение, переместится за

Получили противоречие с исходным равенством. Значит предположение об отсутствии равновесия неверно.

Заметим, что

- для нахождения опорного момента M_A из уравнений статики потребовалось бы решить как минимум три уравнения равновесия;
- эпюра возможных перемещений пропорциональна линии влияния усилия;
- если задать возможное перемещение для искомой реакции равным 1, например, $b\alpha = 1$, то эпюра перемещений будет полностью тождественна линии влияния поскольку

$$\delta A = M_A \cdot 1 + 1 \cdot \delta s_F(z) = 0; \quad M_A = -\delta s_F(z).$$

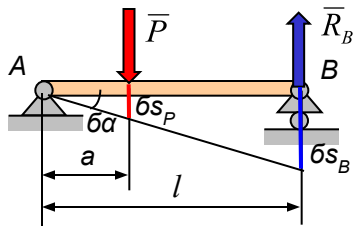
$$\delta A^F = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k \delta \bar{r}_k = 0.$$

рассматривая эти перемещения,

$$\sum \bar{F}_k \delta \bar{r}_k + \sum \bar{R}_k \delta \bar{r}_k > 0. \quad = 0$$

- Примеры использования принципа возможных перемещений**

Пример 1. Определить реакцию балки в правой опоре:



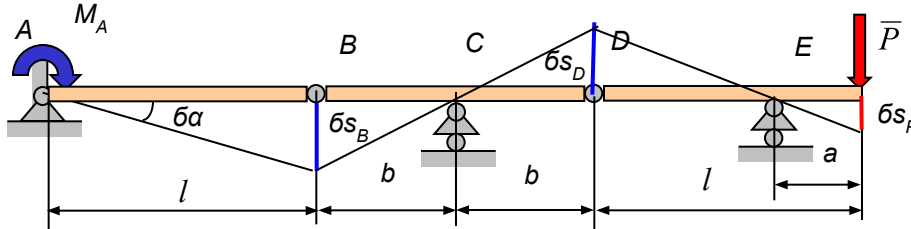
Балка неподвижна и не имеет перемещений, в которой отыскивается, и за без правой опоры балка могла бы двигаться под действием сил. Зададим малое возмущение α . Вычислим возможные перемещения. Запишем сумму работ:

бросим связь, реакция R_B причисляем к активным

$$R_B = \frac{Pa\delta\alpha}{l\delta\alpha} = \frac{Pa}{l}.$$

Пример 2. Определить опорный момент многопролетной балки:

Отбросим в жесткой заделке связь, препятствующую повороту балки, и заменим ее парой сил M_A :



Вычислим возможные перемещения:

$$\begin{aligned} \delta s_B &= l\delta\alpha; \\ \delta s_D &= \delta s_B = l\delta\alpha; \\ \delta s_F &= \frac{a}{l-a} \delta s_D = \frac{a}{l-a} l\delta\alpha. \end{aligned}$$

Запишем сумму работ:

$$\delta A = M_A \delta\alpha + F \delta s_F = 0.$$

$$M_A \delta\alpha + F \frac{a}{l-a} l\delta\alpha = 0.$$

$$M_A = -F \frac{a}{l-a} l.$$