Доклад на районном МО математиков (март,2010г.). /Слепокурова Л.Г. МОУСОШ№74/.

Числовые неравенства и их свойства

- При сравнении двух действительных чисел X и Y возможны три случая:
- X = Y (x равно y); x>y (x больше y); x < y (x меньше y).
- Выражение, в котором два числа или две функции соединены знаком
- > или < называются неравенствами. Неравенства, содержащие только числа, называются числовыми неравенствами. Если неравенство представляет собой истинное высказывание, то оно называется верным. Знаки >, < называются знаками строгих неравенств. Также используются знаки нестрогих неравенств: ≥, ≤. Неравенства x > y, u > v называются неравенствами одного знака или неравенствами одинакового смысла; неравенства x>y, u<v называются нераваенствами противоположных знаков или неравенствами противоположного смысла.

- **СВОЙСТВА НЕРАВЕНСТВ:**
- **если $a > b$, то $b < a$;**
- **если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$ (свойство транзитивности);**
- **если $a > b$, то $a + c > b + c$;**
- **если $a > b$ и $c > 0$, то $ac > bc$ или $a/c > b/c$;**
- **если $a > b$ и $c < 0$, то $ac < bc$ или $a/c < b/c$;**
- **если $a > b > 0$, то $1/a < 1/b$;**
- **если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$;**
- **если $a > b > 0$ и $c > d > 0$, то $ac > bd$;**
- **если $a > b$ и $c < d$, то $a – c > b – d$;**
- **если $a > b > 0$ и $n \in N$, то $an > bn$.**

- **Пример: (ГИА,2009). О числах a и b известно, что $a < b$. Какое из следующих неравенств верно при всех значениях переменных a и b?**
- **$5 – a < 5 – b$;**
- **$a + 3 > b + 3$;**
- **$5a > 5b$;**
- **$(-1/3)a > (-1/3)b$. ***
- **Верным является неравенство 4), которое приводится к неравенству, заданному в условии. Все остальные неравенства приводятся к виду $a > b$, что противоречит условию.**

Пример: (ГИА,2009). Какие из неравенств:

1) $x + y < 25$,

2) $x + y < 30$,

3) $x + y < 40$

верны при любых значениях x и y, удовлетворяющих условию $x < 10$, $y < 20$?

1 и 2,

1 и 3,

2 и 3, *

1, 2, 3.

Пример: (ГИА,2009). О числах известно, что $x < y < z$. Какое из чисел положительно?

$y – z$,

$x – z$,

$x – y$,

$z – x$. *

- Пример: (ГИА,2009). Какое из следующих неравенств не следует из неравенства а – в > с?
- а > в + с,
- в < а – с,
- а – в – с > 0. *
- Пример: (ГИА,2009). Сравнить а2 и а3, если известно, что 0 < а < 1.
- 1) а2 < а3,
- 2) а2 > а3, *
- 3) а2 = а3,
- 4) для сравнения не хватает данных.

- Пример: (ГИА,2009). На координатной прямой отмечены числа х и у. Сравните числа -х и -у.
- 1) -х < -у,
- 2) -х > -у, *
- 3) -х = -у,
- 4) сравнить невозможно.

- Пример: (ГИА,2009). Какое из неравкнств:
- 1) ху > 200,
- 2) ху > 100,
- 3) ху > 400
- верно при любых значениях х и у , удовлетворяющих условию х > 10, у > 20?
- 1 и 2, *
- 1 и 3,
- 2 и 3,
- 1, 2, 3.

Два неравенства называются равносильными, если множества их решений совпадают.

Используя свойства неравенств, можно преобразовать данное неравенство в равносильное, более простое.

Линейным неравенством с одним неизвестным называется неравенство вида

$ax + b > 0$ или $ax + b < 0$, где a и b – действительные числа и $a \neq 0$.

- Линейные неравенства с одной переменной.

- *Если неравенство содержит буквенные выражения, то оно является верным лишь при определённых значениях входящих в него переменных. Например, неравенство x > 0 верно только при положительных значениях x, а неравенство $x2 \geq -1$ не будет верным ни при одном значении x.*

- *Решить неравенство – значит указать все значения неизвестных величин, при которых неравенство становится верным, или показать, что таких значений не существует.*

Пример №1. Решить неравенство: $16 – 3x > 0$. Ответ: $(- \infty; 5\frac{1}{3}]$.
Неравенство, левая и правая части которого есть многочлены первой степени относительно х, путём равносильных преобразований можно привести к линейному неравенству.

Пример №2. Решить неравенство: $2(x – 3) + 5(1 – x) \geq 3(2x – 5)$.
Выполнив равносильные преобразования, получаем $9x \leq 14$.
Ответ: $x \in (- \infty; 14/9]$.

Пример №3. Решить неравенство: $9x – 5 > 9x – 6$.
Выполнив равносильные преобразования, получим $0x > -1$.
Это неравенство справедливо при всех значениях х.
Ответ: $(-\infty: +\infty)$.

Пример №4. Решить неравенство: $x – (x + 1) /2 > (x – 3) /4 – (x – 2) /3$.
Умножив обе части неравенства на наименьшее общее кратное всех знаменателей, т.е. на 12, будет $12x – 6x – 6 > 3x – 9 – 4x + 8$ и после приведения подобных членов, получим $7x > 5$.
Ответ: $x \in (5/7; +\infty)$.

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.

Если требуется найти все значения переменной х, каждое из которых есть решение одновременно нескольких линейных неравенств, то говорят, что надо решить систему линейных неравенств с одним неизвестным х. Для того, чтобы решить систему линейных неравенств, надо решить каждое неравенство этой системы, а затем найти общую часть

(пересечение) полученных множеств решений – она и будет множеством всех решений данной системы. Обычно неравенства, входящие в систему, объединяют фигурной скобкой, хотя допустима запись и в виде двойного неравенства.

Решение системы линейных неравенств сводится к осуществлению последовательности равносильных преобразований с последующей геометрической иллюстрацией на числовой оси. Две системы неравенств называются равносильными, если они имеют одно и то же множество решений.

- *Решение системы двух линейных неравенств с одной переменной может привести к одному из четырёх возможных случаев:*
- *1)$x > a$,*
- *$x > b$. __________ $(b; +\infty)$*

- *2)$x > a$,*
- *$x < b$; __________ $(a; b)$*

- *3)$x < a$,*
- *$x < b$; __________ $(-\infty; a)$.*

- *4)$x < a$,*
- *$x > b$; ____ решений нет.*

✔ *Аналогично можно решать системы, содержащие и большее число неравенств.*

- Пример №5. Решить систему неравенств: {$2x + 3 > 0$,
- {$-4x + 5 < 0$;
- Выполнив равносильные преобразования, получаем систему: {$x > -3/2$;
- $x > 5/4$;
- Отметим на координатных осях интервалы, полученные для каждого неравенства отдельно:
- В качестве решения возьмём общую часть этих интервалов: $(5/4; +\infty)$.
- Геометрическую интерпретацию решения системы неравенств можно осуществлять и на одной числовой оси.

Пример №6. Решить систему неравенств:

$3x - 6 > 0,$

$15 - 5x \leq 0,$

$1{,}7x - 5{,}8 < 1.$

Используя числовую ось, получаем решение системы: $[3;4)$.

Систему неравенств иногда можно записать в виде двойного неравенства и в этом случае удаётся применить другой способ решения.

Пример №7. Решить систему неравенств:

$2x - 5 > 0,$

$2x - 5 < 7.$

Запишем систему неравенств в виде двойного неравенства:

$0 < 2x - 5 < 7,$

$5 < 2x < 12,$

$5/2 < x < 6.$

Следовательно, решением системы является интервал: $(5/2; 6)$.

Пример (ГИА,2009).Решить систему неравенств

$x + 5 \leq 3x + 7$

$(2x - 1)/3 \leq (x + 1)/2.$

Ответ: $[-1; 5]$.

КВАДРАТНЫЕ НЕРАВЕНСТВА С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.

Неравенство вида $ax^2 + bx + c > 0$ (или $ax^2 + bx + c < 0$),

где a,b,c – действительные числа, причём $a \neq 0$, называют неравенством второй степени с одним неизвестным x.

Решением квадратного неравенства называют такое число x0, при подстановке которого вместо x получается верное числовое неравенство.

Решить неравенство – это значит найти все его решения или доказать, что их нет.

- *Решение неравенства $ax^2 + bx + c > 0$ или $ax^2 + bx + c < 0$ можно рассматривать как нахождение промежутков, в которых функция*

Итак, для решения неравенств вида $ax^2 + bx + c > 0$ и $ax^2 + bx + c < 0$ поступают следующим образом: находят дискриминант квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ и выясняют имеет ли трёхчлен корни; если трёхчлен имеет корни, то отмечают их на оси Х и через отмеченные точки проводят схематически параболу, ветви которой направлены вверх при $a > 0$ или вниз при $a < 0$; если трёхчлен не имеет корней, то схематически изображают параболу, расположенную в верхней полуплоскости при $a > 0$ или в нижней при $a < 0$; находят на оси Х промежутки, для которых точки параболы расположены выше оси Х (если решают неравенство $ax^2 + bx + c > 0$) или ниже осиХ (если решают неравенство $ax^2 + bx + c < 0$).

- Пример: (ГИА,2009). Для каждого неравенстваукажите множество его решений:

а) $x^2 – 4 < 0$, 1) (-∞; - 2) U (2; + ∞)

б) $x^2 + 4 < 0$, 2) (-2; 2)

в) $x^2 – 4 > 0$. 3) нет решений.

- Пример: (ГИА,2009).Найти все значения параметра а, при каждом из которых неравенство
- $x^2 – 2ax + 5a + 6 \le 0$ не имеет решения.
- Решение. Квадратичная функция $y = x^2 – 2ax + 5a + 6$ определена при всех значениях переменной. Поэтому если неравенство $x^2 - 2ax + 5a + 6 \le 0$ не имеет решения, то это означает, что функция принимает положительные значения при всех значениях переменной.
- А это возможно, только если дискриминант квадратного трёхчлена , стоящего в левой части неравенства, будет отрицательным.
- Вычислим дискриминант, используя чётность второго коэффициента, получим: $D1 = a^2 – 5a – 6$.
- Для нахождения искомых значений параметра осталось решить неравенство $D1 < 0$.
- Имеем: $a^2 – 5a – 6 < 0$; $(a + 1)(a – 6) < 0$; $-1 < a < 6$.
- Ответ: (-1; 6).

Р Е Ш Е Н И Е Н Е Р А В Е Н С Т В МЕТОДОМ И Н Т Е Р В А Л О В.

При решении неравенств методом интервалов рассуждают следующим образом:

если многочлен, стоящий в левой части неравенства P(x) < 0, разложен на линейные множители, т.е. представлен в виде

$$P(x) = (x - x_1)^k (x - x_2)^i \ldots (x - x_n)^l$$

а оси ОХ отметить все его корни xn (n = 1,2,…). Над промежутком, расположенном правее наибольшего корня, поставить знак «+». Затем, двигаясь справа налево, при переходе через очередной корень менять знак, если соответствующий этому корню линейный множитель возводится в нечётную степень, и сохранять знак, если он возводится в чётную степень. Наконец, выбрать промежутки, над которыми стоят требуемые знаки. Граничные точки включать в ответ, если знак неравенства нестрогий и не включать в противном случае.

Задачи раздела НЕРАВЕНСТВА направлены на проверку умений:

а) решать линейные неравенства с одной переменной, требующие для приведения их к простейшему виду алгебраических преобразований; системы неравенств; выбирать решения, удовлетворяющие дополнительным условиям;

б) решать квадратные неравенства и системы, включающие квадратные неравенства;

в) применять аппарат неравенств для решения других задач.

Примеры:

1. Сравнить числа: а) $\sqrt{6}+\sqrt{10}$ и $3+\sqrt{7}$; б) $3+\sqrt{5}$ и $\sqrt{8}+\sqrt{6}$.

При решении необходимо найти квадраты данных чисел. Это: $16+\sqrt{240}$ и $16+\sqrt{252}$.

Т.к. $\sqrt{252}>\sqrt{240}$, то $(3+\sqrt{7})^2>(6+\sqrt{10})^2$, учитывая, что $\sqrt{6}+\sqrt{10}$ и $3+\sqrt{7}$ положительные числа, получаем, что $3+\sqrt{7}>\sqrt{6}+\sqrt{10}$.

Пример 2. Решить неравенство: а) $\frac{3x-1}{5}-\frac{2x-4}{2}\le 2-\frac{4-3x}{10}$;

б) $\frac{8-5x}{12}+\frac{2x-5}{3}\ge\frac{3x-2}{4}-2$.

Учащиеся должны знать, что при решении неравенств такого вида нужно прежде всего избавиться от дробей, умножив обе части неравенства на наименьший общий знаменатель дробей.

Пример 3. Решить систему неравенств: а) $\begin{cases} 3x \le x - 5, \\ 4x + 6 < 0, \\ x + 1 \ge 3x + 5. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x \ge 3x + 1, \\ 6x + 1 \ge 4x - 2, \\ 5x + 5 \ge 0. \end{cases}$

Для нахождения пересечения трёх лучей, необходимо использовать рисунок.

а)Ответ: **б)Ответ:**

Запись ответа при решении неравенств и систем может быть различной – с использованием теоретико-множественной символики и без неё. Это зависит от «структуры» полученного множества решений. В сложных случаях, например с «выколотыми» или изолированными точками, теоретико-множественный язык предпочтительнее.

Пример 4. Решить неравенство: $4 - x^2 \le 0$.

Ответ: $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

Пример 5. Найти область определения выражения:

а) $\dfrac{\sqrt{-4 + 8x - 3x^2}}{x^2 - 1}$ б) $\dfrac{\sqrt{7 + 4x - 3x^2}}{x^2 - 4}$.

Здесь происходит усложнение за счёт необходимости учёта дополнительных требований: из найденного множества решений квадратного неравенства надо исключить числа, обращающие в ноль знаменатель дроби.

Пример 5. Найти целые решения системы неравенств:

а) $4x^2 + 9x - 9 \leq 0,$

$\frac{x}{2} + 1 < 0;$

б) $6x^2 + 7x - 24 \leq 0,$

$1 - \frac{x}{2} > 0$

А в этих заданиях приходится решать систему неравенств, в которой одно из неравенств квадратное: и кроме трудностей, связанных с нахождением пересечения множеств решений двух неравенств, есть ещё одна – понять, какие числа входят в искомое множество.

В группах упражнений высокого уровня, как и в других темах, присутствуют задания с буквенными коэффициентами.

Пример 6. а) Найти все значения n, при которых неравенство $x^2 - 2nx - (2 - n) \leq 0$ не имеет решений.

б) Найти все значения m, при которых решением неравенства $x^2 - mx + (3 - m) > 0$ является любое число.

Такие задания целесообразно выполнять с опорой на графические представления. Например, при решении задания а) можно рассуждать следующим образом: неравенство не имеет решений, если парабола, являющаяся графиком квадратного трёхчлена, стоящего в левой части неравенства, расположена выше оси ОХ.

Отсюда следует, что данный квадратный трёхчлен не должен иметь корней, и задача сводится к решению неравенства $D < 0$.

Пример 7. Найти все значения p, при которых система неравенств имеет единственное решение: а) $x^2 - 7x - 18 \le 0$,

$x - 3p \ge 0$;

б) $x^2 - 2x - 24 \le 0$,

$x - 2p \ge 0$.

В этом задании решение состоит в изображении соответствующего рисунка:
На координатной прямой изображается отрезок – множество решений квадратного неравенства, а затем «пристраивается» луч так, чтобы их пересечением служила единственная точка.

а) Решение неравенства имеет вид: $-2 \le x \le 9$,

$x \ge 3p$.

Отрезок $[-2; 9]$ и луч $[3p; +\infty)$ имеют только одну общую точку при $3p = 9$, т.е. при $p = 3$.

Ответ: при $p = 3$.

б) Решение неравенства имеет вид: $-4 \le x \le 6$,

$x \le 2$.

Отрезок $[-4; 6]$ и луч $(-\infty; 2p]$ имеют только одну общую точку при $2p = -4$, т.е. при $p = -2$.

Ответ: при $p = -2$.

Пример (ГИА,2009). При каких значениях m неравенство $x^2 - mx - m + 3 \le 0$ имеет хотя бы одно решение?
Решение: парабола $y = x^2 - mx - m + 3$ не должна быть расположена целиком выше

Пример №8. Решить неравенство: $3x^2 - 2x - 5 \le 0$.

$$X = \frac{1 + 4}{3}$$

Многочлен P(x) = (x+ 1)(x – 5/3) содержит все скобки в первой (нечётной) степени, значит при переходе через каждый корень знак будет меняться.

Нас интересуют промежутки с отрицательными знаками, следовательно,

x є [-1;5/3].

Пример №9. Решить неравенство: $-4x^2 + 4x - 1 < 0$.

Так как дискриминант квадратного трёхчлена равен нулю, то корень один

x = ½, следовательно, имеем (x -½)2 > 0. Линейный множитель возводится

в чётную степень, значит , знак менять не будем.

Получаем: xє (-∞;½) U (½;+∞).

Пример №10. Решить неравенство: $3x^2 - 2x + 1 > 0$.

Дискриминант квадратного трёхчлена отрицателен, значит корней нет,

и квадратный трёхчлен положителен всюду. Получаем x є R.

Пример. Решить неравенство: $2a(a-2)x > a-2$.

Решение: Контрольными будут те значения параметра, при которых коэффициент при x обращается в ноль. Эти точки разбивают множество действительных чисел на промежутки, в которых нужно определять знак неравенства. Поэтому рассмотрим заданное неравенство в следующих пяти случаях:

$\boxed{1)\ a<0;\quad 2)\ a=0;\quad 3)\ 0<a<2;\quad 4)\ a=2;\quad 5)\ a>2.}$

1) Если $a<0$, то $2a(a-2)>0$, и заданное неравенство преобразуется к виду:

$$X > \frac{a-2}{2a(a-2)},\ \text{т.е.}\ x > \frac{1}{2a}.$$

2) Если $a=0$, то заданное неравенство принимает вид: $0x > -2$, что верно при любых значениях x.

3) Если $0<a<2$, то $2a(a-2)<0$ и заданное неравенство преобразуется к виду:

$$X < \frac{a-2}{2a(a-2)}\qquad \text{т.е.}\quad x < 1/2a$$

4) Если $a=2$, то заданное неравенство принимает вид $0x>0$, что не выполняется ни при каких значениях x.

4) Если $a>2$, то $2a(a-2)>0$, и, как в первом случае, получим $x > 1/2a$.

Пример.Решить неравенство: $(a-1)x^2 + 2(2a+1)x + (4a+3) \le 0$.

Решение: Здесь два контрольных значения параметра: 1 и -4/5.

Заданное неравенство будем рассматривать по отдельности в каждом из следующих пяти случаев: 1) $a < -4/5$; 2) $a = -4/5$; 3) $-4/5 < a < 1$; 4) $a = 1$; 5) $a > 1$.

1) $a < -4/5$. В этом случае $D < 0$, и старший коэффициент $(a-1)$ отрицателен.

Известно, что квадратный трёхчлен $ax^2 + вx + c$ с отрицательным дискриминантом имеет знак старшего коэффициента при всех значениях x. Значит, трёхчлен, содержащийся в левой части данного неравенства, отрицателен при всех x, т.е. все значения x удовлетворяют заданному неравенству.

2) Если $a = -4/5$, то данное неравенство принимает вид:

$$(-9/5)x^2 - (6/5)x - (1/5) \le 0;$$

т.е. $9x^2 + 6x + 1 \ge 0$, $(3x+1)^2 \ge 0$.

Это верно при всех x.

Пример: Решить неравенство: $(a - 1)x^2 + 2(2a + 1)x + (4a + 3) \le 0$.

Решение: Здесь два контрольных значения параметра: 1 и -4/5.

Заданное неравенство будем рассматривать по отдельности в каждом из следующих пяти случаев: 1) $a < -4/5$; 2) $a = -4/5$; 3) $-4/5 < a < 1$; 4) $a = 1$; 5) $a > 1$.

1) $a < -4/5$. В этом случае $D < 0$, и старший коэффициент $(a - 1)$ отрицателен.

Известно, что квадратный трёхчлен $ax^2 + вx + c$ с отрицательным дискриминантом имеет знак старшего коэффициента при всех значениях x. Значит, трёхчлен, содержащийся в левой части данного неравенства, отрицателен при всех x, т.е. все значения x удовлетворяют заданному неравенству.

2) Если $a = -4/5$, то данное неравенство принимает вид:

$$(-9/5)x^2 - (6/5)x - (1/5) \le 0;$$

т.е. $$9x^2 + 6x + 1 \ge 0, \quad (3x + 1)^2 \ge 0.$$

Это верно при всех x.

3) $-4/5 < a < 1$. В этом случае $D > 0$, трёхчлен имеет два корня:

$$x_1 = \frac{-(2a + 1) + \sqrt{5a + 4}}{(a - 1)} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{-(2a + 1) - \sqrt{5a + 4}}{(a - 1)},$$

Значит, данное неравенство можно преобразовать к виду $(a - 1)(x - x_1)(x - x_2) \le 0$ и далее к виду $(x - x_1)(x - x_2) \ge 0$, мы учли, что в рассматриваемом случае $(a - 1) < 0$.

Презентация подготовлена: учителем МОУСОШ №74

Слепокуровой

Лилией Григорьевной