Доклад на районном МО математиков (март,2010г.). /Слепокурова Л.Г. МОУСОШ№74/.

Числовые неравенства и их свойства

- При сравнении двух действительных чисел X и Y возможны три случая:
- X = Y (х равно у); $x>y$ (х больше у); $x < y$ (х меньше у).
- Выражение, в котором два числа или две функции соединены знаком
- $>$ или $<$ называются неравенствами. Неравенства, содержащие только числа, называются числовыми неравенствами. Если неравенство представляет собой истинное высказывание, то оно называется верным. Знаки $>$, $<$ называются знаками строгих неравенств. Также используются знаки нестрогих неравенств: ≥, ≤. Неравенства $x > y$, $u > v$ называются неравенствами одного знака или неравенствами одинакового смысла; неравенства $x>y$, $u<v$ называются нераваенствами противоположных знаков или неравенствами противоположного смысла.

- СВОЙСТВА НЕРАВЕНСТВ:
- если a > b, то b < a;
- если a > b и b > c, то a > c (свойство транзитивности);
- если a > b, то a + c > b + c;
- если a > b и c > 0, то ac > bc или a/c > b/c;
- если a > b и c < 0, то ac< bc или a/c < b/c;
- если a > b > 0, то 1/a < 1/b;
- если a> b и c > d , то a + c > b + d;
- если a > b > 0 и c >d >0, то ac > bd;
- если a > b и c < d, то a – c > b – d;
- если a > b >0 и nєN, то an > bn.

- Пример: (ГИА,2009). О числах a и b известно, что a < b. Какое из следующих неравенств верно при всех значениях переменных a и b?
- 5 – a < 5 – b;
- a + 3 > b + 3;
- 5a > 5b;
- (-1/3)a > (-1/3)b. *
- Верным является неравенство 4), которое приводится к неравенству, заданному в условии. Все остальные неравенства приводятся к виду a > b, что противоречит условию.

- Пример: (ГИА,2009). Какие из неравенств:
- 1) $x + y < 25$,
- 2) $x + y < 30$,
- 3) $x + y < 40$
- верны при любых значениях x и y, удовлетворяющих условию $x < 10$, $y < 20$?
- 1 и 2,
- 1 и 3,
- 2 и 3, *
- 1, 2, 3.
- Пример: (ГИА,2009). О числах известно, что $x < y < z$. Какое из чисел положительно?
- $y – z$,
- $x – z$,
- $x – y$,
- $z – x$. *

- Пример: (ГИА,2009). Какое из следующих неравенств не следует из неравенства а – в > с?
- а > в + с,
- в < а – с,
- а – в – с > 0. *
- Пример: (ГИА,2009). Сравнить а2 и а3, если известно, что 0 < а < 1.
- 1) а2 < а3,
- 2) а2 > а3, *
- 3) а2 = а3,
- 4) для сравнения не хватает данных.

- Пример: (ГИА,2009). На координатной прямой отмечены числа х и у. Сравните числа -х и -у.
- 1) -х < -у,
- 2) -х > -у, *
- 3) -х = -у,
- 4) сравнить невозможно.

- Пример: (ГИА,2009). Какое из неравкнств:
- 1) ху > 200,
- 2) ху > 100,
- 3) ху > 400
- верно при любых значениях х и у , удовлетворяющих условию х > 10, у > 20?
- 1 и 2, *
- 1 и 3,
- 2 и 3,
- 1, 2, 3.

Два неравенства называются равносильными, если множества их решений совпадают.

Используя свойства неравенств, можно преобразовать данное неравенство в равносильное, более простое.

Линейным неравенством с одним неизвестным называется неравенство вида

$ax + b > 0$ или $ax + b < 0$, где a и b – действительные числа и $a \neq 0$.

- Линейные неравенства с одной переменной.

- *Если неравенство содержит буквенные выражения, то оно является верным лишь при определённых значениях входящих в него переменных. Например, неравенство x > 0 верно только при положительных значениях x, а неравенство x2 ≥ -1 не будет верным ни при одном значении x.*

- *Решить неравенство – значит указать все значения неизвестных величин, при которых неравенство становится верным, или показать, что таких значений не существует.*

Пример №1. Решить неравенство: $16 - 3x > 0$. Ответ: $(-\infty; 5\frac{1}{3}]$.
Неравенство, левая и правая части которого есть многочлены первой степени относительно х, путём равносильных преобразований можно привести к линейному неравенству.

Пример №2. Решить неравенство: $2(x - 3) + 5(1 - x) \geq 3(2x - 5)$.
Выполнив равносильные преобразования, получаем $9x \leq 14$.
Ответ: $x \in (-\infty; 14/9]$.

Пример №3. Решить неравенство: $9x - 5 > 9x - 6$.
Выполнив равносильные преобразования, получим $0x > -1$.
Это неравенство справедливо при всех значениях х.
Ответ: $(-\infty: +\infty)$.

Пример №4. Решить неравенство: $x - (x + 1) /2 > (x - 3) /4 - (x - 2) /3$.
Умножив обе части неравенства на наименьшее общее кратное всех знаменателей, т.е. на 12, будет $12x - 6x - 6 > 3x - 9 - 4x + 8$ и после приведения подобных членов, получим $7x > 5$.
Ответ: $x \in (5/7; +\infty)$.

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.

Если требуется найти все значения переменной х, каждое из которых есть решение одновременно нескольких линейных неравенств, то говорят, что надо решить систему линейных неравенств с одним неизвестным х. Для того, чтобы решить систему линейных неравенств, надо решить каждое неравенство этой системы, а затем найти общую часть (пересечение) полученных множеств решений – она и будет множеством всех решений данной системы. Обычно неравенства, входящие в систему, объединяют фигурной скобкой, хотя допустима запись и в виде двойного неравенства. Решение системы линейных неравенств сводится к осуществлению последовательности равносильных преобразований с последующей геометрической иллюстрацией на числовой оси. Две системы неравенств называются равносильными, если они имеют одно и то же множество решений.

- **_Решение системы двух линейных неравенств с одной переменной может привести к одному из четырёх возможных случаев:_**
- 1)$x > a$,
-   $x > b$. __________ $(b; +\infty)$

- 2)$x > a$,
-   $x < b$; __________ $(a; b)$

- 3)$x < a$,
- $x < b$; __________ $(-\infty; a)$.

- 4)$x < a$,
- $x > b$; _____ решений нет.

✔ **_Аналогично можно решать системы, содержащие и большее число неравенств._**

- Пример №5. Решить систему неравенств: {2x + 3 > 0,
- {-4x + 5 < 0;
- Выполнив равносильные преобразования, получаем систему: {x > - 3/2;
- x > 5/4;
- Отметим на координатных осях интервалы, полученные для каждого неравенства отдельно:
- В качестве решения возьмём общую часть этих интервалов: (5/4; + ∞).
- Геометрическую интерпретацию решения системы неравенств можно осуществлять и на одной числовой оси.

Пример №6. Решить систему неравенств:

$$3x - 6 > 0,$$
$$15 - 5x \leq 0,$$
$$1{,}7x - 5{,}8 < 1.$$

Используя числовую ось, получаем решение системы: [3;4).

Систему неравенств иногда можно записать в виде двойного неравенства и в этом случае удаётся применить другой способ решения.

Пример №7. Решить систему неравенств:

$2x – 5 > 0,$

$2x – 5 < 7.$

Запишем систему неравенств в виде двойного неравенства:

$0 < 2x - 5 < 7,$

$5 < 2x < 12,$

$5/2 < x < 6.$

Следовательно, решением системы является интервал: (5/2; 6).

Пример (ГИА,2009).Решить систему неравенств

$x + 5 \leq 3x + 7$

$(2x – 1)/3 \leq (x + 1)/2.$

Ответ: [-1; 5].

КВАДРАТНЫЕ НЕРАВЕНСТВА С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.

Неравенство вида $ax^2 + bx + c > 0$ (или $ax^2 + bx + c < 0$),

где a,b,c – действительные числа, причём $a \neq 0$, называют неравенством второй степени с одним неизвестным x.

Решением квадратного неравенства называют такое число x0, при подстановке которого вместо x получается верное числовое неравенство.

Решить неравенство – это значит найти все его решения или доказать, что их нет.

- Решение неравенства $ax^2 + bx + c > 0$ или $ax^2 + bx + c < 0$ можно рассматривать как нахождение промежутков, в которых функция

Итак, для решения неравенств вида $ax^2 + bx + c > 0$ и $ax^2 + bx + c < 0$ поступают следующим образом:

находят дискриминант квадратного трёхчлена

$ax^2 + bx + c$

и выясняют имеет ли трёхчлен корни;

если трёхчлен имеет корни, то отмечают их на оси X и через отмеченные точки проводят схематически параболу, ветви которой направлены вверх при $a > 0$ или вниз при $a < 0$; если трёхчлен не имеет корней, то схематически изображают параболу, расположенную в верхней полуплоскости при $a > 0$

или в нижней при $a < 0$;

находят на оси X промежутки, для которых точки параболы расположены выше оси X

(если решают неравенство $ax^2 + bx + c > 0$)

или ниже осиX (если решают неравенство

$ax^2 + bx + c < 0$).

- ***Пример: (ГИА,2009). Для каждого неравенстваукажите множество его решений:***

а) $x^2 - 4 < 0$, 1) $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$

б) $x^2 + 4 < 0$, 2) $(-2; 2)$

в) $x^2 - 4 > 0$. 3) нет решений.

- *Пример: (ГИА,2009).Найти все значения параметра а, при каждом из которых неравенство*
- *$x^2 – 2ax + 5a + 6 \le 0$ не имеет решения.*
- *Решение. Квадратичная функция $y = x^2 – 2ax + 5a + 6$ определена при всех значениях переменной. Поэтому если неравенство $x^2 - 2ax + 5a + 6 \le 0$ не имеет решения, то это означает, что функция принимает положительные значения при всех значениях переменной.*
- *А это возможно, только если дискриминант квадратного трёхчлена , стоящего в левой части неравенства, будет отрицательным.*
- *Вычислим дискриминант, используя чётность второго коэффициента, получим: $D1 = a^2 – 5a – 6$.*
- *Для нахождения искомых значений параметра осталось решить неравенство $D1 < 0$.*
- *Имеем: $a^2 – 5a – 6 < 0$; $(a + 1) (a – 6) < 0$; $-1 < a < 6$.*
- *Ответ: (-1; 6).*

Р Е Ш Е Н И Е Н Е Р А В Е Н С Т В МЕТОДОМ И Н Т Е Р В А Л О В.

При решении неравенств методом интервалов рассуждают следующим образом:

если многочлен, стоящий в левой части неравенства Р(х) < 0, разложен на линейные множители, т.е. представлен в виде

$$P(x) = (x - x_1)^k (x - x_{2)}{}^i \ldots (x - x_n)^l$$

а оси ОХ отметить все его корни хn (n = 1,2,…). Над промежутком, расположенном правее наибольшего корня, поставить знак «+». Затем, двигаясь справа налево, при переходе через очередной корень менять знак, если соответствующий этому корню линейный множитель возводится в нечётную степень, и сохранять знак, если он возводится в чётную степень. Наконец, выбрать промежутки, над которыми стоят требуемые знаки. Граничные точки включать в ответ, если знак неравенства нестрогий и не включать в противном случае.

Задачи раздела НЕРАВЕНСТВА направлены на проверку умений:

а) ***решать линейные неравенства с одной переменной, требующие для приведения их к простейшему виду алгебраических преобразований; системы неравенств; выбирать решения, удовлетворяющие дополнительным условиям;***

б) ***решать квадратные неравенства и системы, включающие квадратные неравенства;***

в) ***применять аппарат неравенств для решения других задач.***

Примеры:

1. Сравнить числа: а) $\sqrt{6} + \sqrt{10}$ и $3 + \sqrt{7}$; б) $3 + \sqrt{5}$ и $\sqrt{8} + \sqrt{6}$.

При решении необходимо найти квадраты данных чисел. Это: $16 + \sqrt{240}$ и $16 + \sqrt{252}$.

Т.к. $\sqrt{252} > \sqrt{240}$, то $(3 + \sqrt{7})^2 > (6 + \sqrt{10})^2$, учитывая, что $\sqrt{6} + \sqrt{10}$ и $3 + \sqrt{7}$ положительные числа, получаем, что $3 + \sqrt{7} > \sqrt{6} + \sqrt{10}$.

Пример 2. Решить неравенство: а) $$\frac{3x - 1}{5} - \frac{2x - 4}{2} \leq 2 - \frac{4 - 3x}{10};$$

б) $$\frac{8 - 5x}{12} + \frac{2x - 5}{3} \geq \frac{3x - 2}{4} - 2.$$

Учащиеся должны знать, что при решении неравенств такого вида нужно прежде всего избавиться от дробей, умножив обе части неравенства на наименьший общий знаменатель дробей.

Пример 3. Решить систему неравенств: а) $3x \le x - 5,$ $4x + 6 < 0,$ $x + 1 \ge 3x + 5.$ б) $x \ge 3x + 1,$ $6x + 1 \ge 4x - 2,$ $5x + 5 \ge 0.$

Для нахождения пересечения трёх лучей, необходимо использовать рисунок.

а)Ответ: **б)Ответ:**

Запись ответа при решении неравенств и систем может быть различной – с использованием теоретико-множественной символики и без неё. Это зависит от «структуры» полученного множества решений. В сложных случаях, например с «выколотыми» или изолированными точками, теоретико-множественный язык предпочтительнее.

Пример 4. Решить неравенство: $4 - x^2 \le 0.$

Ответ: $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty).$

Пример 5. Найти область определения выражения:

а) $\dfrac{\sqrt{-4 + 8x - 3x^2}}{x^2 - 1}$ б) $\dfrac{\sqrt{7 + 4x - 3x^2}}{x^2 - 4}.$

Здесь происходит усложнение за счёт необходимости учёта дополнительных требований: из найденного множества решений квадратного неравенства надо исключить числа, обращающие в ноль знаменатель дроби.

Пример 5. Найти целые решения системы неравенств:

а) $\begin{cases} 4x^2 + 9x - 9 \leq 0, \\ \frac{x}{2} + 1 < 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 6x^2 + 7x - 24 \leq 0, \\ 1 - \frac{x}{2} > 0 \end{cases}$

А в этих заданиях приходится решать систему неравенств, в которой одно из неравенств квадратное: и кроме трудностей, связанных с нахождением пересечения множеств решений двух неравенств, есть ещё одна – понять, какие числа входят в искомое множество.

В группах упражнений высокого уровня, как и в других темах, присутствуют задания с буквенными коэффициентами.

Пример 6. а) Найти все значения n, при которых неравенство $x^2 - 2nx - (2 - n) \le 0$ не имеет решений.

б) Найти все значения m, при которых решением неравенства $x^2 - mx + (3 - m) > 0$ является любое число.

Такие задания целесообразно выполнять с опорой на графические представления. Например, при решении задания а) можно рассуждать следующим образом: неравенство не имеет решений, если парабола, являющаяся графиком квадратного трёхчлена, стоящего в левой части неравенства, расположена выше оси OX.

Отсюда следует, что данный квадратный трёхчлен не должен иметь корней, и задача сводится к решению неравенства $D < 0$.

Пример 7. Найти все значения p, при которых система неравенств имеет единственное решение: а) $x^2 - 7x - 18 \le 0$,

$x - 3p \ge 0$;

б) $x^2 - 2x - 24 \le 0$,

$x - 2p \ge 0$.

В этом задании решение состоит в изображении соответствующего рисунка:
На координатной прямой изображается отрезок – множество решений квадратного неравенства, а затем «пристраивается» луч так, чтобы их пересечением служила единственная точка.

а) Решение неравенства имеет вид: $-2 \le x \le 9$,

$x \ge 3p$.

Отрезок $[-2; 9]$ и луч $[3p; +\infty)$ имеют только одну общую точку при $3p = 9$, т.е. при $p = 3$.

Ответ: при $p = 3$.

б) Решение неравенства имеет вид: $-4 \le x \le 6$,

$x \le 2$.

Отрезок $[-4; 6]$ и луч $(-\infty; 2p]$ имеют только одну общую точку при $2p = -4$, т.е. при $p = -2$.

Ответ: при $p = -2$.

Пример (ГИА,2009). При каких значениях m неравенство $x^2 - mx - m + 3 \le 0$ имеет хотя бы одно решение?

Решение: парабола $y = x^2 - mx - m + 3$ не должна быть расположена целиком выше

Пример №8. Решить неравенство: $3x^2 - 2x - 5 \le 0$.

X = 1 + 4

3

Многочлен P(x) = (x+ 1)(x – 5/3) содержит все скобки в первой (нечётной) степени, значит при переходе через каждый корень знак будет меняться.

Нас интересуют промежутки с отрицательными знаками, следовательно,

x є [-1;5/3].

Пример №9. Решить неравенство: $-4x^2 + 4x - 1 < 0$.

Так как дискриминант квадратного трёхчлена равен нулю, то корень один

x = ½, следовательно, имеем (x -½)2 > 0. Линейный множитель возводится

в чётную степень, значит , знак менять не будем.

Получаем: xє (-∞;½) U (½;+∞).

Пример №10. Решить неравенство: $3x^2 - 2x + 1 > 0$.

Дискриминант квадратного трёхчлена отрицателен, значит корней нет,

и квадратный трёхчлен положителен всюду. Получаем x є R.

Пример. Решить неравенство: $2a(a-2)x > a-2$.

Решение: Контрольными будут те значения параметра, при которых коэффициент при x обращается в ноль. Эти точки разбивают множество действительных чисел на промежутки, в которых нужно определять знак неравенства. Поэтому рассмотрим заданное неравенство в следующих пяти случаях:

$\boxed{1)\ a < 0; \quad 2)\ a = 0; \quad 3)\ 0 < a < 2; \quad 4)\ a = 2; \quad 5)\ a > 2.}$

1) Если $a < 0$, то $2a(a-2) > 0$, и заданное неравенство преобразуется к виду:

$X > \dfrac{a-2}{2a(a-2)}$, т.е. $x > \dfrac{1}{2a}$.

2) Если $a = 0$, то заданное неравенство принимает вид: $0x > -2$, что верно при любых значениях x.

3) Если $0 < a < 2$, то $2a(a-2) < 0$ и заданное неравенство преобразуется к виду:

$X < \dfrac{a-2}{2a(a-2)}$ т.е. $x < 1/2a$

4) Если $a = 2$, то заданное неравенство принимает вид $0x > 0$, что не выполняется ни при каких значениях x.

4) Если $a > 2$, то $2a(a-2) > 0$, и, как в первом случае, получим $x > 1/2a$.

Пример.Решить неравенство: $(a - 1)x^2 + 2(2a + 1)x + (4a + 3) \le 0$.

Решение: Здесь два контрольных значения параметра: 1 и -4/5.

Заданное неравенство будем рассматривать по отдельности в каждом из следующих пяти случаев: 1) $a < -4/5$; 2) $a = -4/5$; 3) $-4/5 < a < 1$; 4) $a = 1$; 5) $a > 1$.

1) $a < -4/5$. В этом случае $D < 0$, и старший коэффициент $(a - 1)$ отрицателен.

Известно, что квадратный трёхчлен $ax^2 + вx + c$ с отрицательным дискриминантом имеет знак старшего коэффициента при всех значениях x. Значит, трёхчлен, содержащийся в левой части данного неравенства, отрицателен при всех x, т.е. все значения x удовлетворяют заданному неравенству.

2) Если $a = -4/5$, то данное неравенство принимает вид:

$$(-9/5)x^2 - (6/5)x - (1/5) \le 0;$$

т.е. $9x^2 + 6x + 1 \ge 0$, $(3x + 1)^2 \ge 0$.

Это верно при всех x.

Пример: Решить неравенство: $(a-1)x^2 + 2(2a+1)x + (4a+3) \le 0$.

Решение: Здесь два контрольных значения параметра: 1 и -4/5.

Заданное неравенство будем рассматривать по отдельности в каждом из следующих пяти случаев: 1) $a < -4/5$; 2) $a = -4/5$; 3) $-4/5 < a < 1$; 4) $a = 1$; 5) $a > 1$.

1) $a < -4/5$. В этом случае $D < 0$, и старший коэффициент $(a-1)$ отрицателен.

Известно, что квадратный трёхчлен $ax^2 + вx + c$ с отрицательным дискриминантом имеет знак старшего коэффициента при всех значениях x. Значит, трёхчлен, содержащийся в левой части данного неравенства, отрицателен при всех x, т.е. все значения x удовлетворяют заданному неравенству.

2) Если $a = -4/5$, то данное неравенство принимает вид:

$$(-9/5)x^2 - (6/5)x - (1/5) \le 0;$$

т.е. $9x^2 + 6x + 1 \ge 0$, $(3x+1)^2 \ge 0$.

Это верно при всех x.

3) $-4/5 < a < 1$. В этом случае $D > 0$, трёхчлен имеет два корня:

$$x_1 = \frac{-(2a+1) + \sqrt{5a+4}}{(a-1)} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{-(2a+1) - \sqrt{5a+4}}{(a-1)},$$

Значит, данное неравенство можно преобразовать к виду $(a-1)(x-x_1)(x-x_2) \le 0$ и далее к виду $(x-x_1)(x-x_2) \ge 0$, мы учли, что в рассматриваемом случае $(a-1) < 0$.

Презентация подготовлена: учителем МОУСОШ №74

Слепокуровой

Лилией Григорьевной