

Семинар, посвященный памяти П.Е. Эльяберга.  
ИКИ РАН. 22 апреля 2004 года



Методика построения  
адаптивной модели  
определения движения  
КА

Сергиевский А.Н.  
ФГУП ЦНИИ "Комета"

## Постановка задачи

- Имеется. Решается задача Коши для высокоэллиптического КА с периодом обращения  $\sim 12$  часов. Начальные условия периодически корректируются по результатам траекторных измерений. Модели как описания движения (потенциалы сил притяжения Луны, Солнца и Земли), так и ошибок измерений (математические ожидания равны нулю, ковариационная матрица - известна) заданы. Ошибки прогнозирования движения указанного КА составляют 50-70 км (при прогнозировании на 2 недели в апогей орбиты) и 150-200 км (соответственно на 4 недели) и превышают соответствующие СКО  $\sim 5$  раз.
- Требуется. Уменьшить соответствующие ошибки прогнозирования (определения движения) КА до уровня меньшего соответствующих СКО.

- Методика решения задачи.

- Методика построения адаптивной модели определения движения космического аппарата (КА) может быть заключаться в выполнении следующей последовательности операций.

- Проводится апостериорная оценка точности прогнозирования движения КА.
- Проводится анализ:
  - особенностей движения рассматриваемых КА;
  - наиболее вероятных причин (основных источников) возникновения ошибок прогнозирования при использовании существующей методики прогноза;
  - путей повышения точности прогноза положения рассматриваемых КА.
- На основе результатов проведенного анализа и априорной информации принимается решение о возможных вариантах моделей описания движения КА и ошибок измерителя, т.е. параметры обеих моделей, поправки к которым могут быть использованы в качестве компенсирующих.
- Исходный материал для проведения апостериорной оценки точности разбивается на три подвыборки: обучающую, проверочную и контрольную. На обучающей выборке (малого объема) производится вычисление поправок к параметрам, выбранным в пункте 3, для которых удовлетворяется правило включения по одиночке в расширяемый вектор состояния [1].

- На проверочной выборке (которая может быть объединена с обучающей) строится (адекватная) модель прогноза движения КА методом пошаговой регрессии [2]. Построение модели заканчивается, когда включение в модель оставшихся регрессоров, т.е. поправок, вычисленных в пункте 4, не приводит к существенному уменьшению функционала эмпирического риска [3].
- На контрольной выборке проверяется статистическая устойчивость результатов апостериорной оценки точности прогноза.
- Результаты. В результате применения предлагаемой методики ошибки прогнозирования (определения движения) КА были уменьшены до уровня существенно меньшего соответствующих СКО.

Основными причинами возникновения ошибок определения движения КА служат следующие ошибки:

- в определении начальных условий при решении задачи Коши [1]:

- $\frac{dr}{dt} = f(r, R, t)$  с начальными условиями  $r_0 = r(t_0)$ , где  $r$  - шестимерный вектор параметров движения КА,
- $R = U + S + L + \dots$  - потенциал сил, действующих на КА в полете, где основное влияние оказывает геопотенциал  $U$ , который может быть представлен в виде [1]:

$$U = \frac{\mu}{r} \left\{ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left( \frac{r_a}{r} \right)^n P_n(\sin \varphi) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \left( \frac{r_a}{r} \right)^n P_n^{(m)}(\sin \varphi) \times (C_{nm} \cos m\lambda + D_{nm} \sin m\lambda) \right\},$$

- $S$  и  $L$  - потенциалы сил притяжения Солнцем и Луной соответственно;
- $P_n(\sin \varphi)$  - полиномы, а  $P_n^{(m)}(\sin \varphi)$  - присоединенные функции Лежандра соответственно;
- $r, \varphi, \lambda$  - геоцентрические радиус, широта, долгота;
- $J_n, C_{nm}, D_{nm}$  - коэффициенты разложения геопотенциала;
- $\mu$  - гравитационная постоянная Земли;
- $r_a$  - средний экваториальный радиус Земли;
- ошибки в описании движения и расчетные ошибки.

- Ошибки определения начальных условий обусловлены в свою очередь ошибками измерителя (погрешностей измерений и неточностью координатной привязки измерителя) и погрешностями при обработке результатов измерений. Последние в свою очередь можно разбить на ошибки за счет описания движения КА на интервале обработки измерений и расчетные ошибки.
- Ошибки описания движения КА обусловлены как неточным знанием и учетом (известных) сил в потенциале  $R$ , так и наличием неизвестных и неучтенных в потенциале  $R$  сил, действующих на КА в полете.
- Расчетные ошибки обусловлены как погрешностями при численном интегрировании системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{f}(\vec{r}, R, t)$$

так и численными ошибками при вычислении оценки вектора состояния и при вычислении частных производных.

- Задача поиска вектора компенсирующих поправок (как при поиске расширенного вектора состояния  $\overset{\wedge}{y}_0 = \{\overset{\wedge}{r}_0, \overset{\wedge}{a}\}$ , где  $\overset{\wedge}{a}$  - вектор "мешающих" параметров [1], или уточнения только вектора начальных условий  $\overset{\wedge}{r}_0$ ) может рассматриваться в качестве задачи нелинейного регрессионного анализа – восстановления зависимости [3].

- В рассматриваемом случае применение регрессионного анализа заключается в поэтапном наращивании уточняемых поправок к исследуемым параметрам (в частности, к коэффициентам разложения геопотенциала в соответствующий ряд) до тех пор пока расширение числа уточняемых параметров целесообразно.
- В качестве критерия целесообразности расширения числа членов регрессии на  $j$  – ый параметр может служить выполнение следующего неравенства [2]:

- $$\frac{(\Delta a_j^{\text{в}})^2}{\sigma_{a_j}^2} > F_{in} \quad (1)$$
- где  $\sigma_{a_j}^2$

- - оценка поправки к параметру ;
- $\Delta a_j^{\text{в}}$  - расчетное значение дисперсии параметра ;
- в качестве обычно выбирают  $F_{0.05,1,v}$  - критическое значение распределения Фишера с  $v$  - числом степеней свободы.



- После выбора совокупности параметров, для которых для которых удовлетворяется правило (1) включения по одиночке в расширяемый вектор состояния производится проверка целесообразности их совместного применения. Для этого сначала производится их ранжирование по значению величины  $\frac{(\Delta \hat{\alpha}_j)^2}{\sigma_{\alpha_j}^2}$ . На следующем этапе выбирается параметр  $\hat{\alpha}_j$ , для которого достигается максимум указанной величины. Оценивается величина остаточной суммы квадратов  $S_{r(1)}^2$ . В предположении, что k параметров уже включены в расширяемый вектор состояния, включение k+1 параметра считается целесообразным [ ], если выполняется условие

- $$\frac{(S_{r(k)}^2 - S_{r(k+1)}^2)}{S_{r(k+1)}^2} > F_{0.05, k, N-k}$$
 где N – объем выборки.

Часто в качестве критериев, позволяющих сделать выбор «наилучшей» (по определению Д.Химмельблау) модели из нескольких возможных или предполагаемых моделей, обычно используют по отдельности или в некоторой комбинации критерии, приведенные в работе [6]:

- ведется поиск наименьшего числа параметров регрессии, совместимого с разумной ошибкой;
- при выборе параметров регрессии используются разумные физические основания;
- выбор ведется по минимальной сумме квадратов отклонений между предсказанными и эмпирическими значениями.

Выбор модели в целом считается удовлетворительным, если отношение

$\frac{S_r^2}{S_e^2}$  не превышает определенной величины, где  $S_r^2$  - остаточная сумма квадратов, деленная на число степеней свободы;

$S_e^2$  - мера рассеяния ошибок прогноза, вызванного ошибками траекторных измерений. При этом предполагается [6], что модель приблизительно адекватно описывает экспериментальные данные.

## Литература

- П.Е.Эльясберг. Определение движения по результатам измерений. М.: Наука. 1976.
- Дж.Себер. Линейный регрессионный анализ. М.: Мир. 1980.
- Алгоритмы и программы восстановления зависимостей. Под редакцией В.Н.Вапника. М.: Наука. 1984.
- В.П.Вапник, С.С. Вербицкий, А.И.Михальский, Б.С.Ратнер, А.Н. Сергиевский, А.А.Сорокина.. Применение метода упорядоченной минимизации риска для нахождения сечений фотоядерных реакций. Краткие сообщения по физике. М.: ФИАН СССР. №9. 1975.
- Ф.М. Гольцман. Физический эксперимент и статистические выводы. Ленинград. Издательство Ленинградского университета. 1982.
- Д.Химмельблау. Анализ процессов статистическими методами. М.: Мир. 1973.