

# ТЕОРИЯ РИСКА

# Литература

1. Королев В.Ю., Бенинг В.Е., Шоргин С.Я. Математические основы теории риска. М. Физматлит, 2007.
2. Булинская Е.В. Теория риска и перестрахование. Учебное пособие. В 2 ч. - М.: Изд-во ММФ МГУ, 2001.
3. Мак Т. Математика рискованного страхования. М.: Олимп-Бизнес, 2005.
4. Фалин Г.И. Математический анализ рисков в страховании. М.: Российский юридический издательский дом, 1994.
5. Фалин Г.И. Математические основы теории страхования жизни и пенсионных схем. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1996.
6. Гербер Х. Математика страхования жизни. Пер. с англ./ под ред. Бирюкова П.А. – М.: Мир, 1995 г. 154 с.
7. Bowers, N.L., Gerber, H.U., Hickman, J.C., Jones, D.A., and Nesbitt, C.J.: Actuarial Mathematics. 2nd ed., Society of Actuaries. Schaumburg, Illinois, 1997.
8. C. D. Daykin, T.Pentikainen, M.Pesonen Practical Risk Theory for Actuaries. - Chapman and Hall, 1994.
9. Kaas R., Goovaerts M., Dhaene J., Denuit M. Modern Actuarial Risk Theory. Springer. 2008. 381 p.

# Страховая математика

Страхование жизни

(life insurance)

Теория риска

(non-life insurance)

Страхователь:

До заключения договора – риск,  
приводящий к потерям  $X$

После заключения – избавил себя от риска

$p$  – сумма, которую заплатил с.к.

Риск → страховой компании → Оценка  
риска

Проблема обеспечения финансовой устойчивости с.к. – комплексная.

В рамках ТР разработана система понятий, моделей и методов, которые позволяют количественно оценивать фин. риски.

ТР входит в квал. экзамен актуариев:

экз.1 «Математические основы актуарной науки»;

экз.3 «Актуарные модели»;

экз.4 «Построение актуарных моделей».

# Основные характерные черты ситуаций, связанных с риском

- случайный характер события, при котором возможны несколько исходов;
- наличие альтернативных решений;
- вероятность получения прибыли или возникновения убытков

# Употребление слова «риск»

- вероятность получения прибыли или возникновения убытков
- вероятность возможных потерь, их размер, локализация и т.п. — характеристики рискованной ситуации.

# Определение

## РИСК (франц.),

- 1) в страховом деле: опасность, от которой производится страхование; иногда размер ответственности страховщика. Страхование м. б. произведено против Р. наступления смерти, пожара, градобития и т. п. За Р., который несет страховое учреждение (об-во), страхователь уплачивает страховую премию.
- 2) Различного рода случайности, сопряженные с деятельностью предпринимателя и обусловленные изменчивостью рыночной конъюнктуры.
- 3) В переносном смысле: действие наудачу; дело, пред- принятое на счастливую случайность. Рисковать – подвергать себя случайности, опасности.

Малая советская энциклопедия, ОГИЗ РСФСР, Москва, 1932.



# Страховые риски

- риски, поступающие от страхователей
- собственные риски
  - технические
  - инвестиционные
  - нетехнические

# Традиционные модели и задачи ТР

Элементарная составляющая страховщика - индивидуальный риск (страховое требование claim) равный итоговой сумме средств, выплаченных по некоторому договору страхования.

Убыток- условное значение величины иска при условии, что иск отличен от 0.

# Классификация моделей риска

## 1. Модель индивидуальных потерь (статическая модель страхования)

- совокупность объектов сформирована одновременно,
- страховые премии собраны в момент формирования портфеля,
- срок действия всех договоров одинаковый
- в течении срока м. происходить стр. события, приводящие к убыткам с.к.

# Классификация моделей риска

## 2. Модель коллективного риска

(динамическая модель страхования)

- договоры заключаются в моменты времени, образующие некоторый случайный процесс,
- каждый договор имеет свою длительность,
- в течении действия договора м. происходить стр. события, приводящие к убыткам с.к.

# Задачи ТР

## 1. Вычисление распределения суммарного иска

- по итогам страх. деятельности по всему портфелю (инд. модель)
- по итогам страх. деятельности в течении некоторого интервала времени (колл. модель)

# Задачи ТР

2. Вычисление (оценка) страховых премий, обеспечивающих заданную вероятность разорения страховщика

**Разорение** – событие, при котором

$$P(S > U) \geq 0$$

$S$  – сумма выплат,

$U$  – начальный резерв + собранные премии

**Страховая премия** – часть полного взноса страхователя (брутто-премии), которая зачисляется в страховой фонд, т.е. в фонд, предназначенный для покрытия будущих страховых выплат

При вычислении  $P(S > U)$

- Для модели ИР

Достаточно рассмотреть итоговые суммы убытков и страховых премий по всему портфелю



# При вычислении $P(S > U)$

- Для модели КР

1. Вероятность разорения в данный момент времени;
2. Вероятность разорения на фиксированном конечно интервале времени  
(вероятность того, что в течении рассматриваемого интервала времени сумма убытков хотя бы 1 раз превзойдет  $S$ )
3. На бесконечном интервале времени  
(когда-нибудь сумма убытков превзойдет  $S$ )

# Основные задачи теории ИР

## ● **Объект исследования** –

распределение сл. в. итогового страхового фонда или остатка средств страховой компании по некоторому фиксированному множеству договоров (портфелю):

$$R = r + \sum_{j=1}^N Z_j - \sum_{j=1}^N Y_j$$

$r$  – начальный капитал

$N$  – кол-во договоров страхования

$Z_j$ - часть полной страховой премии, зачисл. в страховой фонд по  $j$ -му договору

$Y_j$ - полные величины выплат по всем договорам портфеля

Пусть в  $t = 0$  начинается формирование портфеля, существует кон. момент  $t = t_0$ , к которому формирование портфеля заканчивается.

Пусть характер процесса заключения договоров на  $[0, t_0]$  не имеет значения для распределения сл. в.  $R$

Игнорируется поведение страх. фонда на  $[0, t_0]$

В литературе **внимание** обращается на

- явное вычисление распределения суммарного иска при заданных распределениях индивидуальных исков,
- простейшие асимптотические формулы,
- сравнение рискованных ситуаций,
- оценивание риска, функций полезности, эмпирических принципов выбора страховых взносов.

Критика подхода, связанного с применением аппроксимаций для распределения суммарного иска.

**Главный недостаток** - недостаточная точность соответствующих приближенных формул и отсутствие приемлемых оценок точности аппроксимации (Bowers).

## Асимптотика распределения случайной величины $R$

Использование **нормальной аппроксимации** для распределения суммарного иска не является идеальным подходом, поскольку реальное распределение обладает положительной асимметрией, которой нет у нормального распределения (Bowers).

Выход – использование, например, «сдвинутого» гамма-распределения

# Основные задачи теории КР

Под **процессом риска** мы будем понимать процесс изменения капитала, принадлежащего страховой компании.

Причины изменения капитала:

- 1) он увеличивается благодаря поступлению взносов от клиентов (страховых премий)
- 2) уменьшается из-за страховых выплат.

Страховые премии описываются детерминированной (неслучайной) функцией времени.

Процесс страховых выплат случайный.

Т.о., процесс риска является стохастическим процессом.



**Основная цель** изучения процессов риска – оптимизация параметров деятельности страховых компаний, например, страховых тарифов и/или страховых выплат.

# Критерии оптимальности

Например,

- 1) - определить вероятностное распределение суммарных страховых выплат за рассматриваемый промежуток времени
  - вычислить размер страховых премий, гарантирующий желаемый объем резерва с требуемым уровнем достоверности.

методы предельных теорем теории вероятностей
- 2) - вероятность разорения (вероятность того, что процесс риска опустится ниже некоторого уровня в течение определенного промежутка времени (конечного или бесконечного).)
  - задачи, связанные с изучением вероятности разорения.

Вероятность разорения рассматривается как функция основных параметров процесса риска.

Э. Ф. Лундберг - первые оценки этой вероятности

Г. Крамер - систематическое изучение вероятности разорения, поведение вероятности разорения в зависимости от величины начального капитала

Для подавляющего большинства моделей отсутствуют явные замкнутые формулы для вероятности разорения. Это приводит к необходимости построения различных аппроксимаций.

### Аппроксимации:

- 1) формулы, приближающие вероятность разорения с помощью асимптотических выражений (например, формула Крамера-Лундберга).
- 2) приближения, основанные на функциональных предельных теоремах