



# Метод крупных вихрей для исследования космической и астрофизической плазмы

**ЧЕРНЫШОВ Александр,**

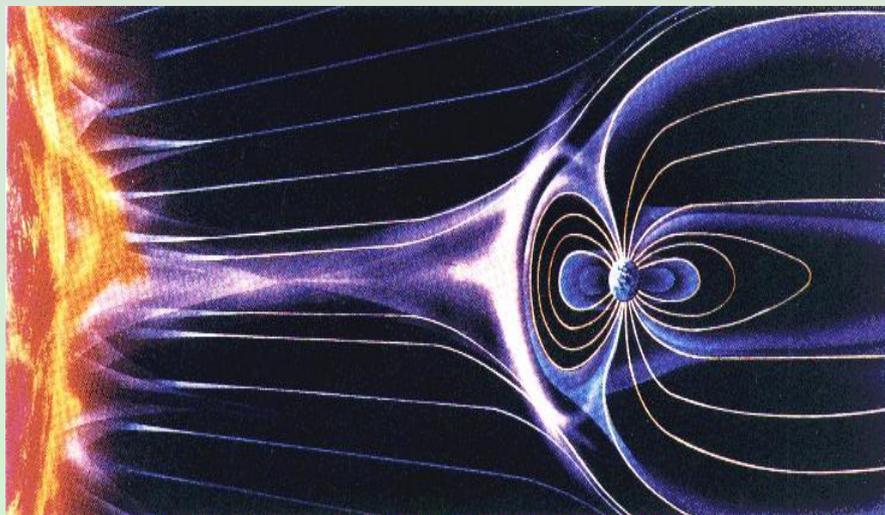
**Карельский К.В., Петросян А.С.**

*Институт космических исследований РАН*

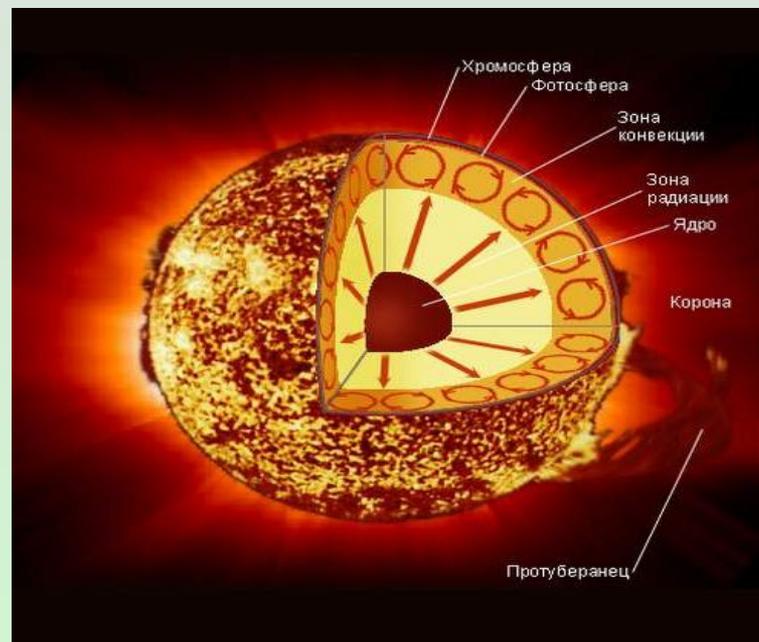
# План

- Метод крупных вихрей для сжимаемой МГД турбулентности политропной плазмы.
- Метод крупных вихрей для сжимаемой МГД турбулентности теплопроводящей плазмы.
- Установление слабо сжимаемого режима в МГД турбулентности космической плазмы и свойства турбулентности локальной межзвёздной среды.

# Актуальность



- Солнечная корона
- Межзвездная/межпланетная среда
- Солнечная конвективная зона
- Магнитосфера Земли
- Инженерные применения



- Звездный/солнечный ветер
- Солнечный тахоклин
- Аккреционный диск

# Моделирование турбулентности

## DNS

*(Direct Numerical Simulation)*

Разрешаются все масштабы движения жидкости. Метод DNS не требует специальных замыканий. Сталкивается с принципиальными трудностями, связанными с большими числами Рейнольдса, так как в этом случае число степеней свободы турбулентного движения велико и минимальное количество узлов на численной сетке должно быть столь большим, что ограничивает применение прямого численного моделирования.

## RANS

*(Reynolds averaged Navier-Stokes)*

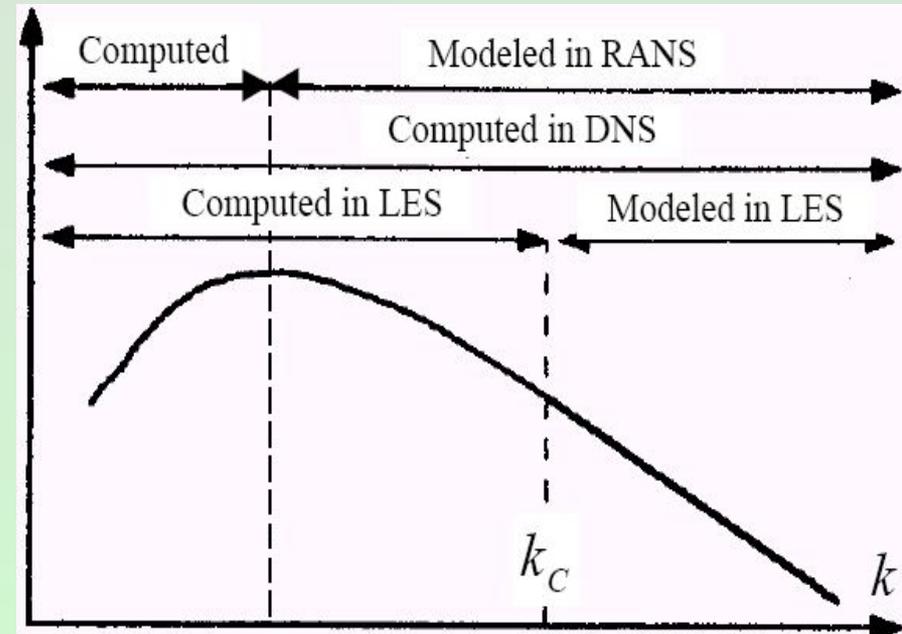
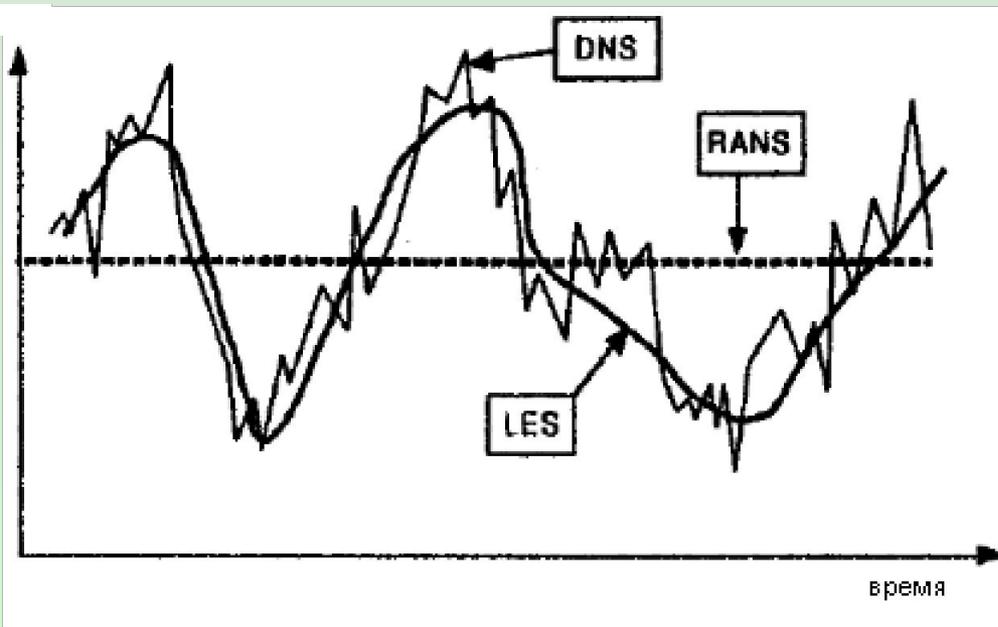
Статистический подход для исследования турбулентности, который заключается в осреднении уравнений движения. Все параметры движения разлагаются на среднюю и турбулентную составляющие. В уравнении Навье-Стокса появляются рейнольдсовские напряжения, которые необходимо замкнуть. Вся турбулентность моделируется (например,  $k - \epsilon$  модель), а не высчитывается, как в DNS.

## LES

*(Large Eddy Simulation)*

Крупномасштабная часть турбулентности высчитывается непосредственно, а мелкомасштабная - моделируется, то есть LES является промежуточным подходом между DNS и RANS. В LES используется операция фильтрации для разложения характеристик турбулентного движения на крупномасштабную и мелкомасштабную части, что связано с достаточной изотропностью, однородностью и универсальностью мелких масштабов.

# Сравнение RANS, DNS и LES



Метод крупных вихрей для  
сжимаемой МГД турбулентности  
политропной плазмы.

# Уравнения МГД политропной плазмы

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} = 0 \quad - \text{уравнение неразрывности}$$

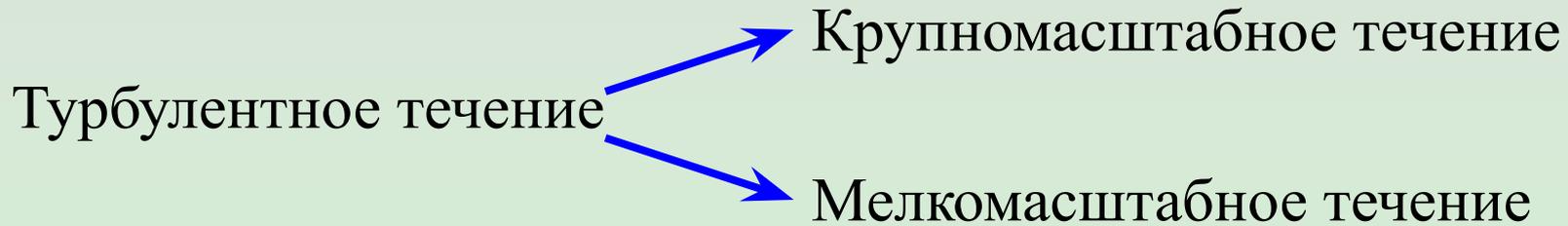
$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j + p \delta_{ij} - \sigma_{ij}) - \frac{1}{c} \varepsilon_{ijk} j_j B_k = 0 \quad - \text{уравнение импульсов}$$

$$\frac{\partial B_i}{\partial t} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \varepsilon_{klm} (B_l u_m) + \eta \nabla^2 B_i \quad - \text{уравнение магнитной индукции}$$

$$\frac{\partial B_j}{\partial x_j} = 0$$

Политропное соотношение:  $p = \rho^\gamma$

# Процедура фильтрации



$$f = \bar{f} + f'$$

$$\bar{f}(x) = \int_D f(x') G(x, x'; \bar{\Delta}) dx'$$

функция фильтрации

Условие нормировки:

$$\int_D G(x, \acute{x}; \bar{\Delta}) d\acute{x} = 1$$

Свойства:

$$\bar{\bar{f}} \neq \bar{f}, \quad \bar{f}' \neq 0$$

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial x_k} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_k}, \quad \frac{\partial \bar{f}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial t}$$

# Виды фильтрационных функций

1. Гауссиановский фильтр

$$G(x - x'; \bar{\Delta}) = \left(\frac{6}{\pi\bar{\Delta}^2}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{6(x - x')^2}{\bar{\Delta}^2}\right)$$

2. Фурье-фильтр

$$G(x - x'; \bar{\Delta}) = \frac{\sin[k_c(x - x')]}{k_c(x - x')}, \quad k_c = \pi/\bar{\Delta}$$

3. Цилиндрический  
фильтр

$$G(x - x'; \bar{\Delta}) = \begin{cases} \frac{1}{\bar{\Delta}}, & |x - x'| < \frac{\bar{\Delta}}{2} \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

# Отфильтрованные уравнения традиционным способом

$$\frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \bar{\rho} \bar{u}_i \bar{u}_j + \bar{p} \delta_{ij} - \bar{\sigma}_{ij} + \frac{\bar{B}^2}{8\pi} \delta_{ij} - \frac{1}{4\pi} \bar{B}_j \bar{B}_i \right) = -\frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\rho u_j u_i} - \bar{\rho} \bar{u}_i \bar{u}_j) + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{B}_j \bar{B}_i - \bar{B}_i \bar{B}_j) - \frac{\partial}{\partial t} (\overline{\rho u_i} - \bar{\rho} \bar{u}_i)$$

Дополнительные слагаемые,  
которые нужно параметризовать!

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\rho u_j} - \bar{\rho} \bar{u}_j)$$

Это требует дополнительные численные ресурсы

# Процедура фильтрации - 2

Рассматривается сжимаемая жидкость, поэтому чтобы избежать появления дополнительных слагаемых в уравнениях после фильтрации, в работе используется средневзвешенная фильтрация (фильтрация по Фавру).

$$\tilde{f} = \frac{\overline{\rho f}}{\bar{\rho}}$$

$$f = \tilde{f} + f''$$

Свойства:

$$\overline{\rho u''} \neq 0$$

$$\tilde{u} \neq \bar{u}$$

$$\tilde{u} \neq 0$$

# Отфильтрованные уравнения МГД

$$\left[ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_j}{\partial x_j} = 0 \\ \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j + \bar{p} \delta_{ij} - \frac{1}{\text{Re}} \tilde{\sigma}_{ij} + \frac{\bar{B}^2}{2M_A^2} - \frac{1}{M_A^2} \bar{B}_i \bar{B}_j) = -\frac{\partial \tau_{ji}^u}{\partial x_j} \\ \frac{\partial \bar{B}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\tilde{u}_j \bar{B}_i - \bar{B}_j \tilde{u}_i) - \frac{1}{\text{Re}_m} \frac{\partial^2 \bar{B}_i}{\partial x_j^2} = -\frac{\partial \tau_{ji}^b}{\partial x_j} \end{array} \right. \quad \text{Уравнения записаны в безразмерном виде}$$

В правой части уравнений - подсеточные слагаемые, которые надо параметризовать:

$$\tau_{ij}^u = \bar{\rho} ((u_j u_i)^\sim - \tilde{u}_j \tilde{u}_i) - \frac{1}{M_A^2} (\overline{B_i B_j} - \bar{B}_j \bar{B}_i)$$

$$\tau_{ij}^b = \overline{(u_i B_j - \bar{B}_j \tilde{u}_i)} - \overline{(B_i u_j - \tilde{u}_j \bar{B}_i)}$$

Subgrid scale (SGS)

или

Subfilter scale (SFS)

# SGS

$$\bar{\rho} \widetilde{u_j u_i} = \bar{\rho} (\widetilde{u_i} + u_i'') (\widetilde{u_j} + u_j'') = \bar{\rho} (\widetilde{u_i u_j} + \widetilde{u_i u_j''} + \widetilde{u_j u_i''} + \widetilde{u_i'' u_j''})$$

Нелинейные члены должны быть записаны, используя крупномасштабные величины:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \bar{\rho} \widetilde{u_j u_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{\rho} \widetilde{u_i u_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \widetilde{u_j u_i} - \bar{\rho} \widetilde{u_i u_j}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{\rho} \widetilde{u_i u_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} t_{ji}^u$$

Турбулентный тензор можно представить как:

$$t_{ij}^u = \bar{\rho} (\widetilde{u_i u_j} - \widetilde{u_i u_j}) = \bar{\rho} (\underbrace{\widetilde{u_i u_j} - \widetilde{u_i u_j}}_{\text{Леонардовский член}}) + \bar{\rho} (\underbrace{\widetilde{u_i u_j''} + \widetilde{u_j u_i''}}_{\text{Перекрестный член}}) + \bar{\rho} (\underbrace{\widetilde{u_i'' u_j''}}_{\text{Рейнольдсовский член}})$$

*Леонардовский  
член*

*Перекрестный  
член*

*Рейнольдсовский  
член*

# Подсеточное моделирование

Условия реализуемости:

$$\tau_{ii} \geq 0 \quad \text{для } i \in \{1, 2, 3\}$$

$$|\tau_{ij}| \leq \sqrt{\tau_{ii}\tau_{jj}} \quad \text{для } i, j \in \{1, 2, 3\}$$

$$\det(\tau_{ij}) \geq 0$$

**Модель вихревой вязкости:**

$$\tau_{ij}^u - \frac{1}{3}\tau_{kk}^u \delta_{ij} = -2\nu_t \left( \tilde{S}_{ij} - \frac{1}{3}\tilde{S}_{kk} \delta_{ij} \right)$$

$$\tau_{ij}^b - \frac{1}{3}\tau_{kk}^b \delta_{ij} = -2\eta_t \bar{J}_{ij}$$

$$\tilde{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad \text{- крупномасштабный тензор скорости деформации}$$

$$\bar{J}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{B}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{B}_j}{\partial x_i} \right) \quad \text{- крупномасштабный тензор магнитной ротации}$$

Для изотропного подсеточного слагаемого из условий реализуемости:

$$\tau_{12}^2 + \tau_{13}^2 + \tau_{23}^2 \leq \tau_{11}\tau_{22} + \tau_{11}\tau_{33} + \tau_{22}\tau_{33}$$

Используя модель вихревой вязкости:

$$k \geq \frac{1}{2} \sqrt{3} (\nu_t |S^u|) \quad |S^u| = (2S_{ij}S_{ij})^{1/2}$$

$$k = \frac{1}{2} (\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33})$$

# Расширенная модель Смагоринского для МГД

$$\tau_{ij}^u - \frac{1}{3}\tau_{kk}^u \delta_{ij} = -2\nu_t \left( \tilde{S}_{ij} - \frac{1}{3}\tilde{S}_{kk} \delta_{ij} \right)$$

$$|\tilde{S}^u| = (2S_{ij}S_{ij})^{1/2}$$

Турбулентная вязкость:  $\nu_t = C_1 \bar{\rho} \bar{\Delta}^2 |\tilde{S}^u|$

$$\tau_{kk}^u = 2Y_1 \bar{\rho} \bar{\Delta}^2 |\tilde{S}^u|^2 \quad - \text{подсеточное замыкание для изотропной части}$$

$$\tau_{ij}^b - \frac{1}{3}\tau_{kk}^b \delta_{ij} = -2\eta_t \bar{J}_{ij}$$

Турбулентная магнитная диффузия:  $\eta_t = D_1 \bar{\Delta}^2 |j|$

# Расширенная модель Колмогорова для МГД

Если длина фильтра находится в инерционном интервале, то можно предположить, что энергия диссипации магнитной и кинетической энергии постоянна.

Параметризации основываются на колмогоровском скейлинге:

$$v_t = C_s \bar{\rho} \bar{\Delta}^{4/3} \quad - \text{турбулентная вязкость}$$

$$\eta_t = D \bar{\Delta}^{4/3} \quad - \text{турбулентная магнитная диффузия}$$

# Расширенная модель, основанная на перекрестной спиральности

Определение перекрестной спиральности:  $H^c = \int_V (u \cdot B) dV$   
(cross helicity)

Перекрестная спиральность связана с обменом между кинетической и магнитной энергией, вызванной силой Лоренца.

$$\nu_t = C_s \bar{\rho} \bar{\Delta}^2 \left| \tilde{S}_{ij}^u \tilde{S}_{ij}^b \right|^{1/2}$$

$$\eta_t = D \bar{\Delta}^2 \left| j\omega \right|^{1/2}$$

*Турбулентные вязкость и магнитная диффузия*

# Расширенная модель подобию масштабов для МГД

Здесь неизвестные турбулентные тензоры моделируются в предположении, что они пропорциональны Леонардовскому члену. Теория этого подхода базируется на предположении об универсальном характере турбулентности на небольших масштабах.

$$\tau_{ij}^u = \bar{\rho}((\tilde{u}_j \tilde{u}_i)^\sim - \tilde{u}_j \tilde{u}_i) - \frac{1}{M_A^2} (\overline{\tilde{B}_i \tilde{B}_j} - \overline{\tilde{B}_j \tilde{B}_i})$$

$$\tau_{ij}^b = (\overline{\tilde{u}_i \tilde{B}_j} - \overline{\tilde{B}_j \tilde{u}_i}) - (\overline{\tilde{B}_i \tilde{u}_j} - \overline{\tilde{u}_j \tilde{B}_i})$$

# Расширенная смешанная модель для МГД

Расширенная смешанная модель является объединением двух моделей: расширенной модели Смагоринского и расширенной модели подобия масштабов:

$$\tau_{ij}^u - \frac{1}{3} \tau_{kk}^u \delta_{ij} = -2C_s \bar{\rho} \bar{\Delta}^2 |\tilde{S}^u| (\tilde{S}_{ij} - \frac{1}{3} \tilde{S}_{kk} \delta_{ij}) + \bar{\rho} ((\tilde{u}_j \tilde{u}_i)^\sim - \tilde{\tilde{u}}_j \tilde{\tilde{u}}_i) - \frac{1}{M_A^2} (\overline{\overline{B_i B_j}} - \overline{\overline{B_j B_i}})$$

$$\tau_{ij}^b = -2D \bar{\Delta}^2 |\bar{j}| \bar{J}_{ij} + (\overline{\overline{\tilde{u}_i B_j}} - \overline{\overline{B_j \tilde{u}_i}}) - (\overline{\overline{B_i \tilde{u}_j}} - \overline{\overline{\tilde{u}_j B_i}})$$

# Численная реализация

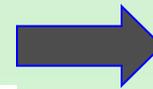
- ✓ Уравнения МГД в консервативной форме
- ✓ Конечно-разностные схемы 4го порядка точности
- ✓ Модифицированный метод Рунге-Кутта 3 порядка точности для временного интегрирования
- ✓ Фильтр Гаусса 4го порядка точности
- ✓ Периодические граничные условия
- ✓ Для нелинейных членов используется косо-симметричная дискретизация

дивергентная форма

$$N_i^d = \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j}$$

конвективная форма

$$N_i^a = \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_i \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j}$$



$$N_i^s = \frac{1}{2} (N_i^d + N_i^a)$$

кососимметричная форма

Плотность дискретизации:

для DNS 256x256x256

для LES 64x64x64

Расчетная область:  $l_x = l_y = l_z = 2\pi$

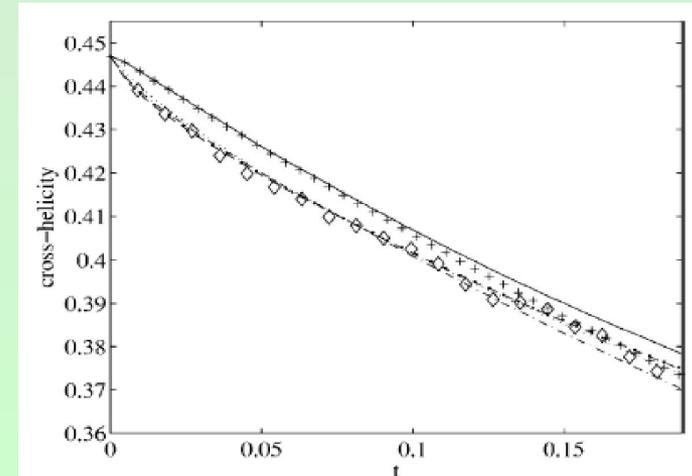
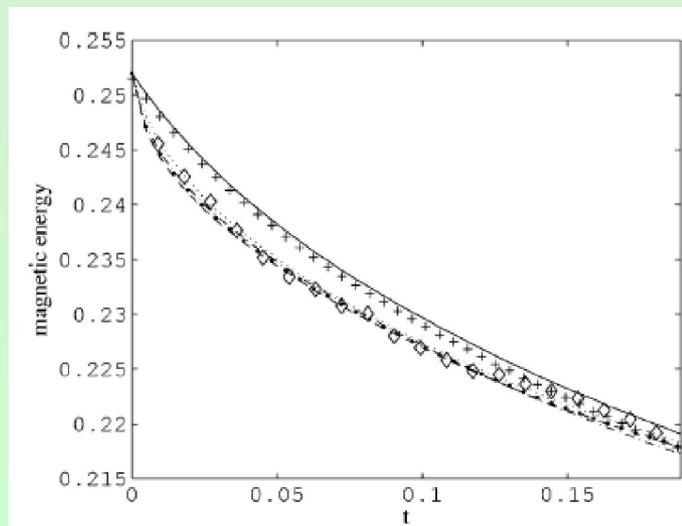
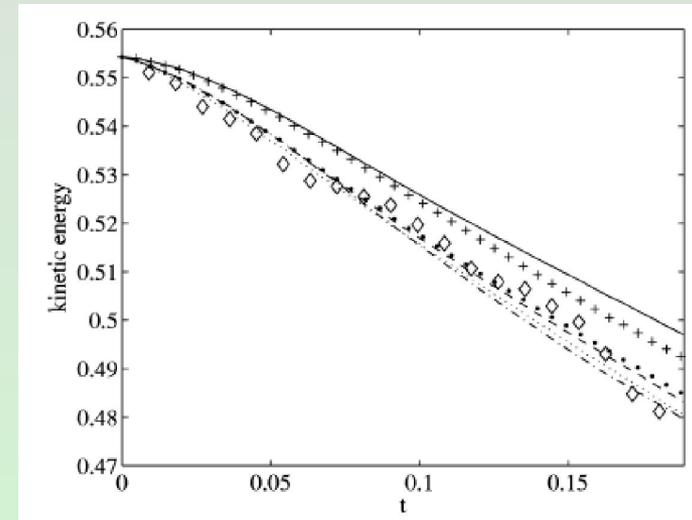
# Рассмотренные случаи

Левая граница для  $Re$  выбрана таким образом, чтобы обеспечить режим развитой турбулентности, а правая - компромиссом между получением адекватных результатов DNS и необходимостью проведения сравнительного анализа с подсеточными моделями LES. Для магнитного числа Рейнольдса величина правой границы, рассматриваемого интервала, обусловлена тем, что в данной работе исследуем затухающую сжимаемую турбулентность, а при увеличении  $Re_m$  повышается вероятность возникновения динамо-процессов в трехмерном течении заряженной жидкости. Левая граница для  $Re_m$  - выраженной ролью магнитных эффектов в МГД течении. Ограниченность числа Маха единицей определяется приближением политропности газа. Течения соответствующие значению  $Ms$  меньше 0.2 не представляет интереса с точки зрения изучения сжимаемых течений.

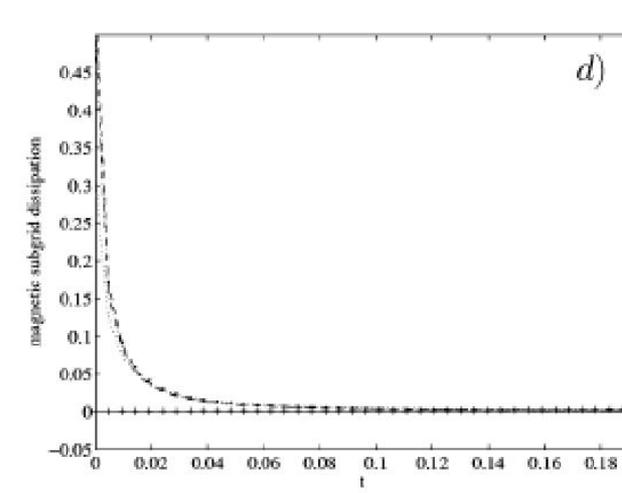
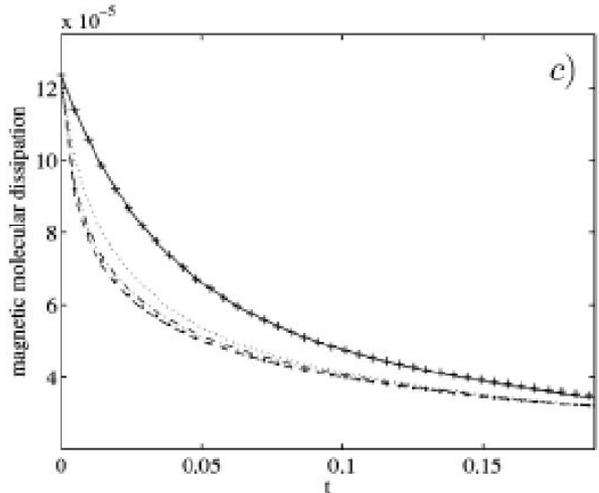
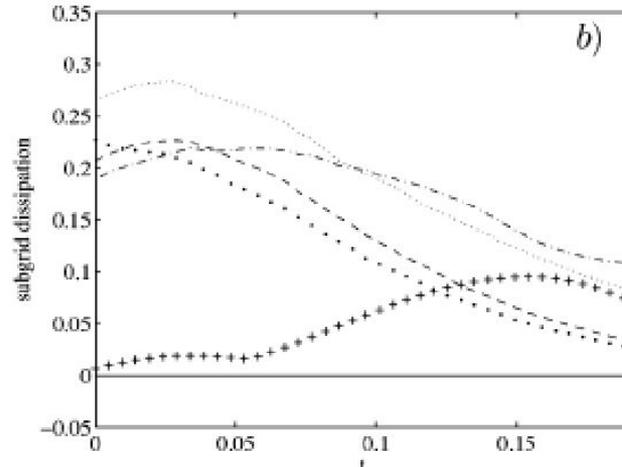
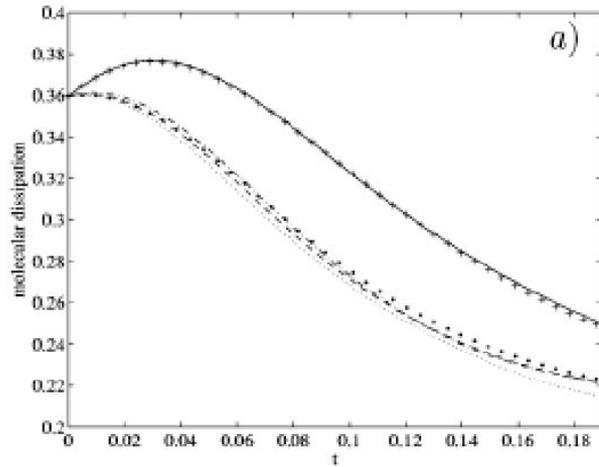
Случай	$Re_l$	$Re$	$Re_m$	$Ms$	$Ma$
1	50	390	10	0.6	0.6
2	25	100	10	0.6	0.6
3	100	1580	10	0.6	0.6
4	50	390	2	0.6	0.6
5	50	390	20	0.6	0.6
6	50	390	10	0.2	0.6
7	50	390	10	1	0.6

# M=0.6, Re = 390, Re\_m=10

Обозначение	Подсеточная модель	вид графика
M0	Без модели	сплошная линия
M1	Модель Смагоринского	штриховая линия --
M2	Модель Колмогорова	пунктирная линия ..
M3	Модель, основанная на спиральности	линия из черных точек
M4	Модель подобия масштабов	линия из +
M5	Смешанная модель	штрих-пунктирная линия



# M=0.6, Re = 390, Re\_m=10



$$\varepsilon_\mu = 2\mu\tilde{S}_{ij}\tilde{S}_{ij}$$

молекулярная диссипация

$$\chi_\mu = -\tau_{ij}^u\tilde{S}_{ij}$$

подсеточная кинетическая энергии диссипации

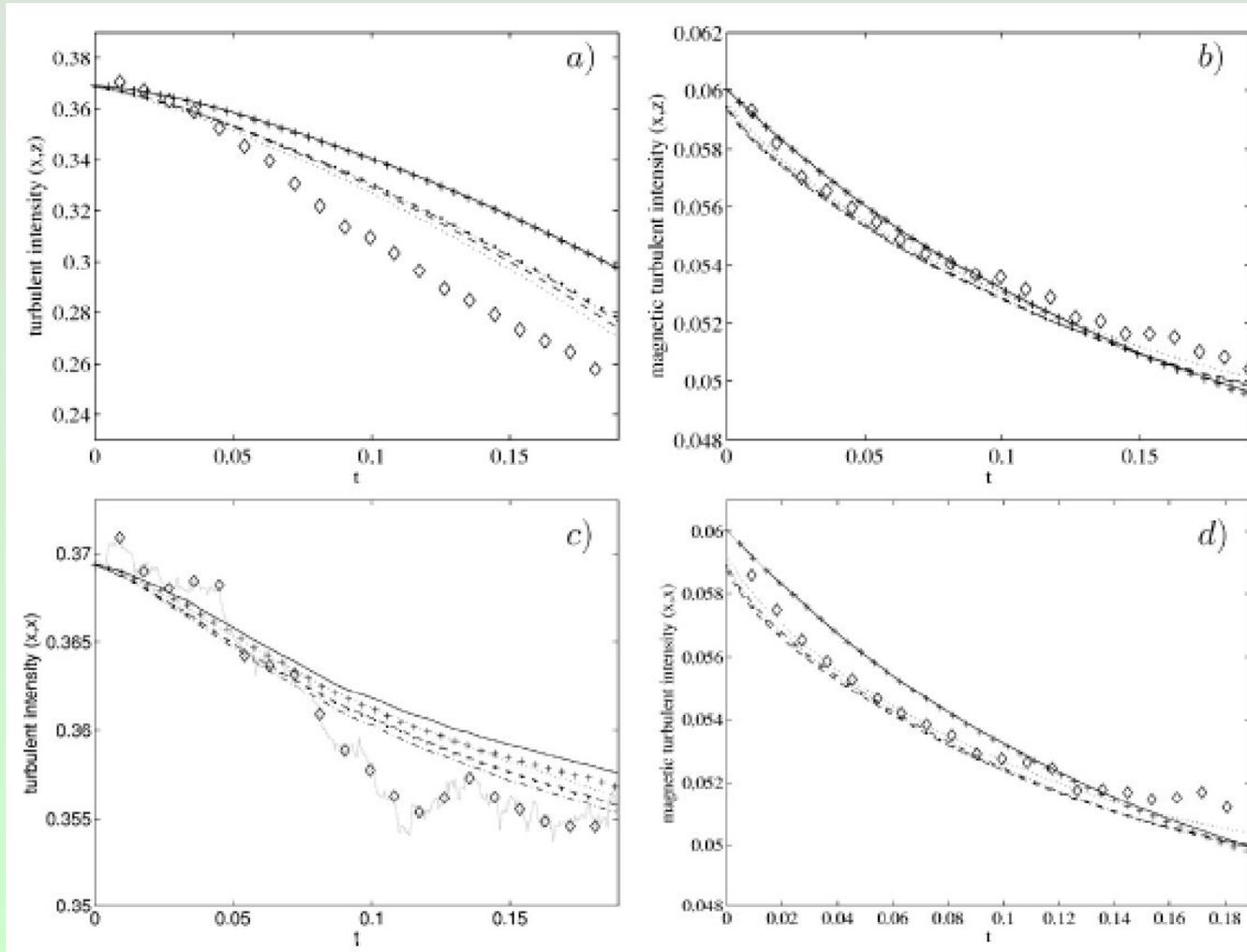
$$\varepsilon_\eta = \eta|\bar{j}|^2$$

магнитная молекулярная диссипация

$$\chi_b = -\tau_{ij}^b\bar{J}_{ij}$$

подсеточная магнитная энергия диссипации

# M=0.6, Re = 390, Re\_m=10

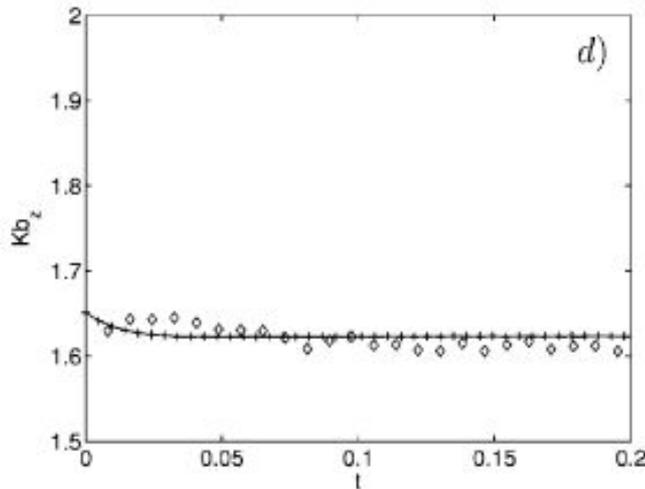
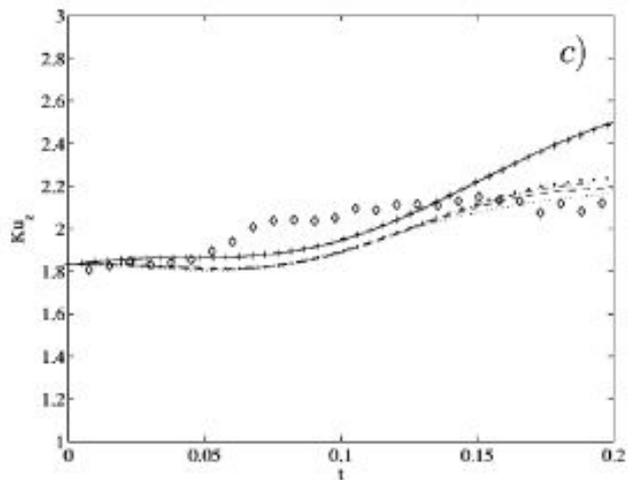
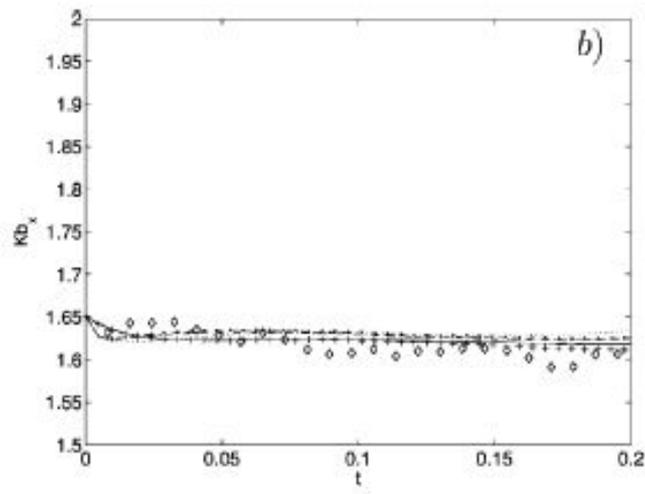
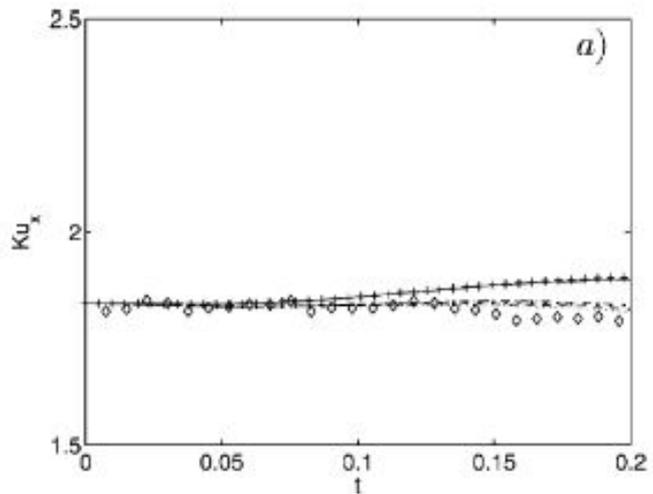


Флуктуирующие части скорости и магнитного поля:

$$v_i = \tilde{u} - \langle \bar{\rho} \tilde{u}_i \rangle / \langle \bar{\rho} \rangle$$

$$b_i = \bar{B}_i - \langle \bar{B}_i \rangle$$

# M=0.6, Re = 390, Re\_m=10



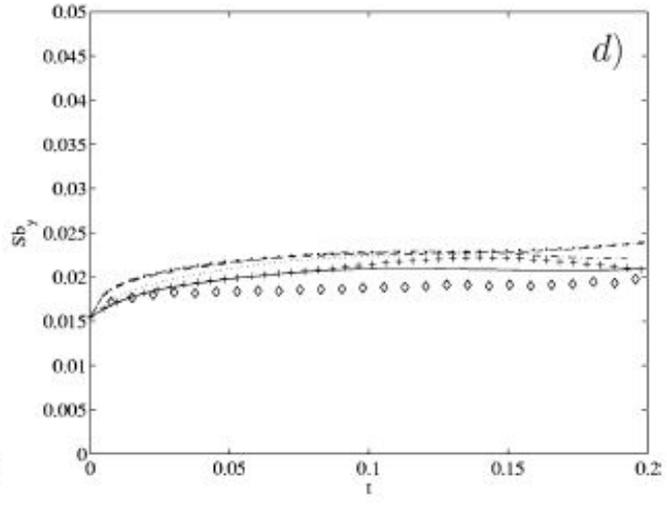
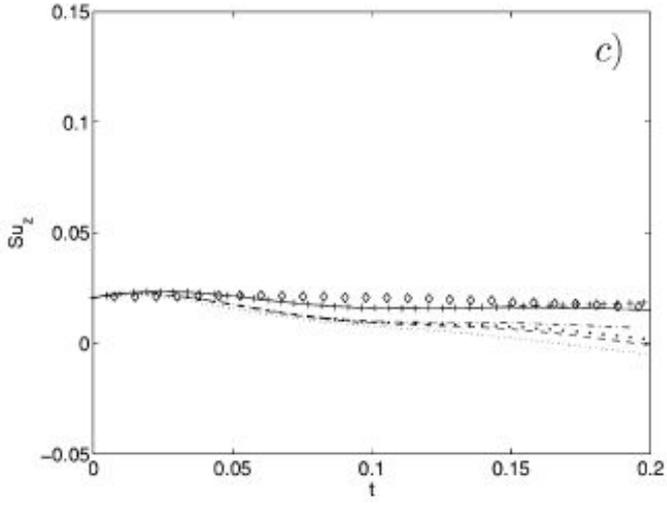
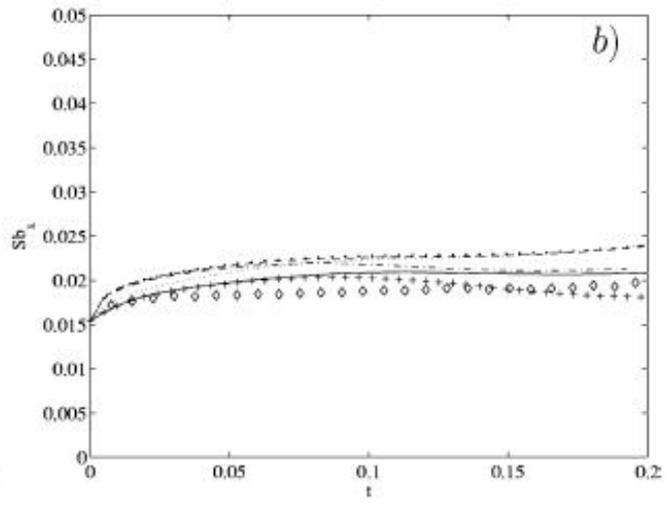
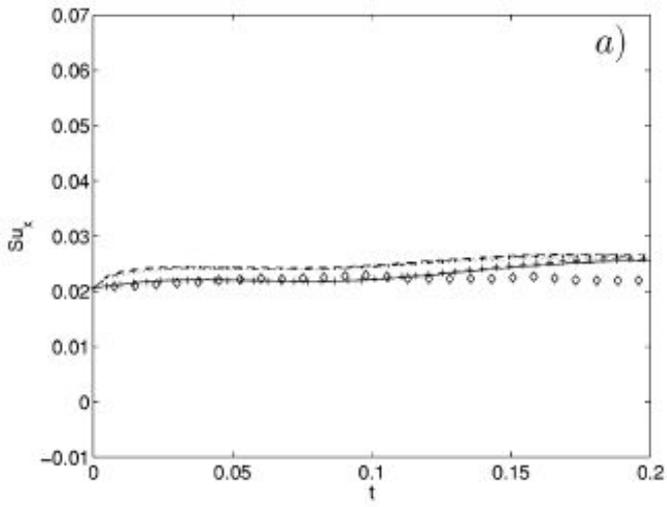
Пологость для  
компонент скорости:

$$Ku_j = \frac{\langle u_j^4 \rangle}{(\langle u_j^2 \rangle)^2}$$

Пологость для  
магнитного поля:

$$Kb_j = \frac{\langle B_j^4 \rangle}{(\langle B_j^2 \rangle)^2}$$

# M=0.6, Re = 390, Re\_m=10



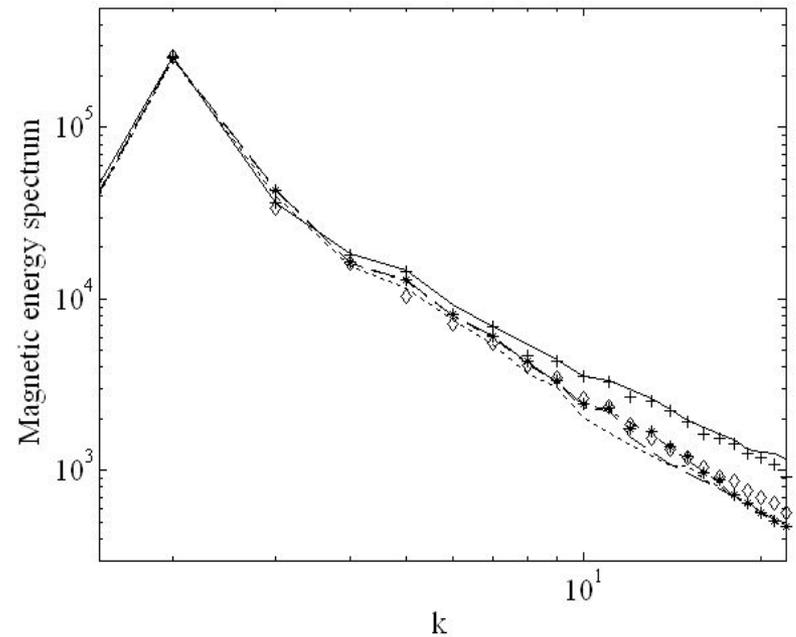
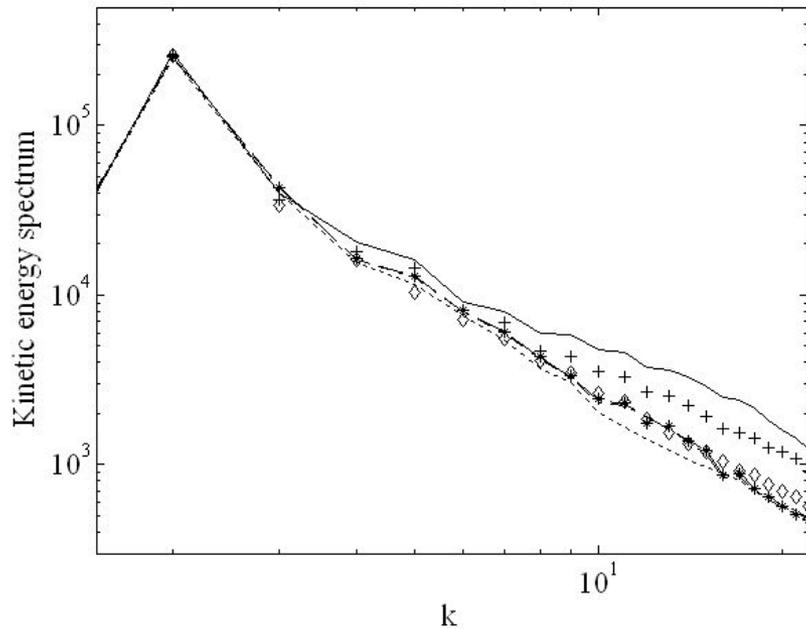
Ассиметрия для компонент скорости:

$$Su_j = \frac{\langle u_j^3 \rangle}{(\langle u_j^2 \rangle)^{3/2}}$$

Ассиметрия для магнитного поля:

$$Sb_j = \frac{\langle B_j^3 \rangle}{(\langle B_j^2 \rangle)^{3/2}}$$

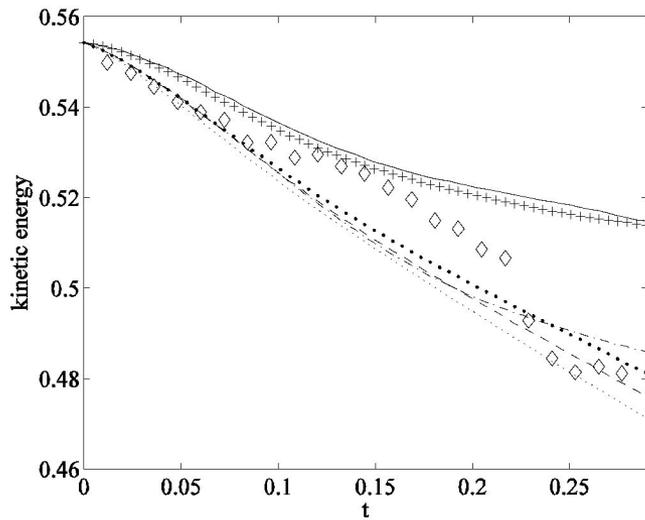
$M=0.6$ ,  $Re = 390$ ,  $Re_m=10$



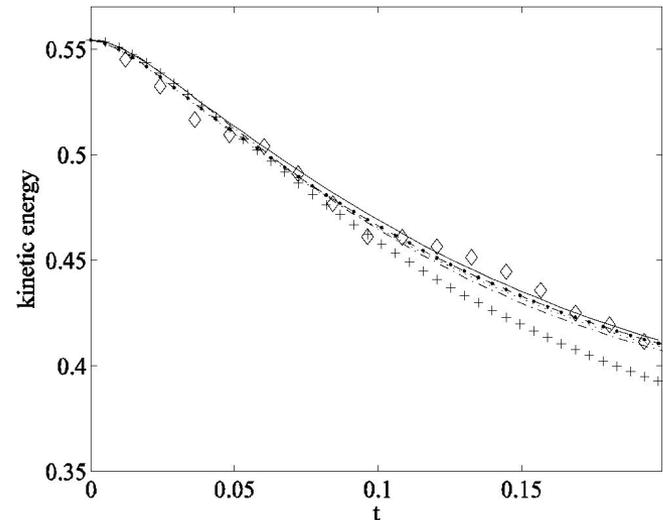
*Спектры кинетической и магнитной энергии*

# Кинетическая энергия

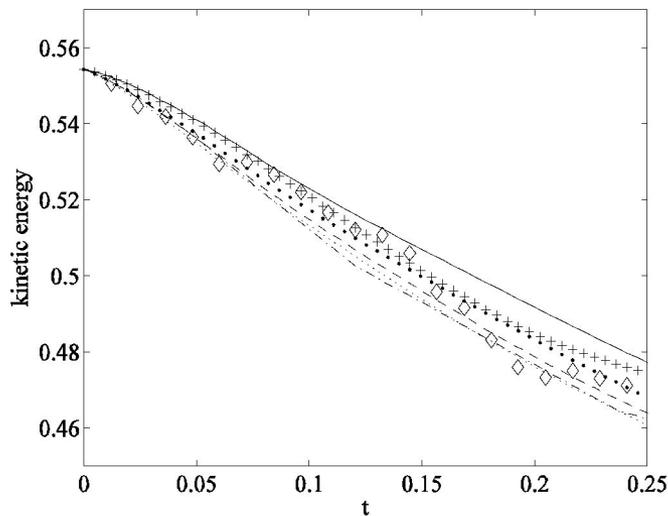
$Ms=1$



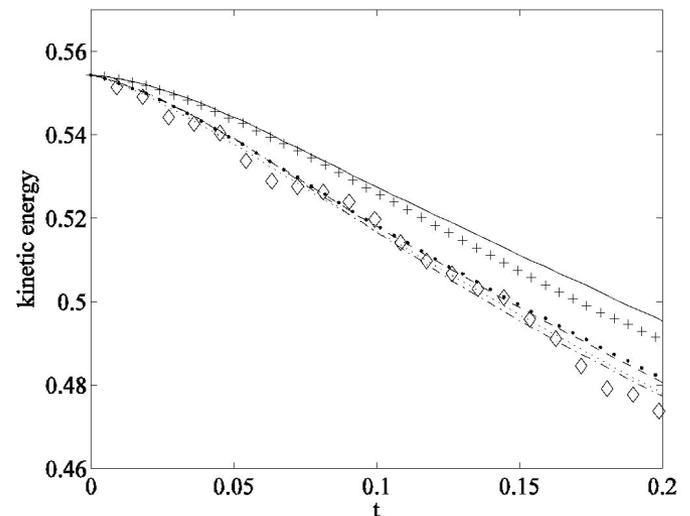
$Ms=0.2$



$Re_m=2$

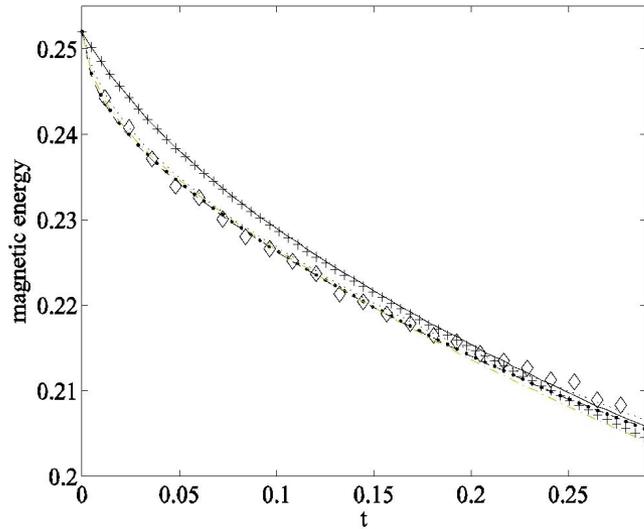


$Re_m=20$

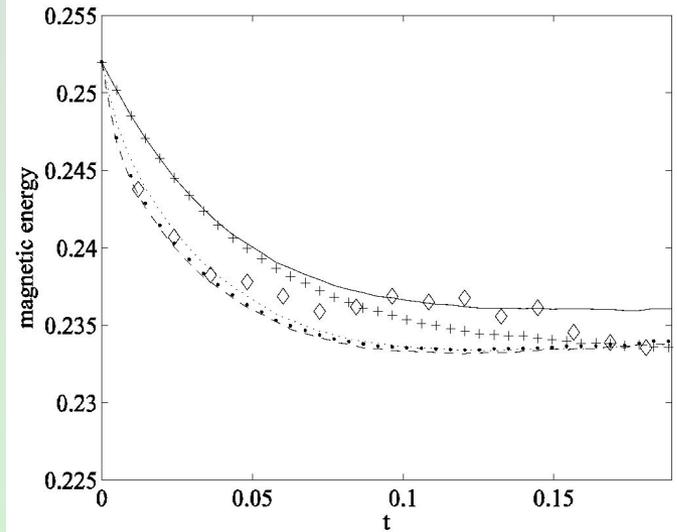


# Магнитная энергия

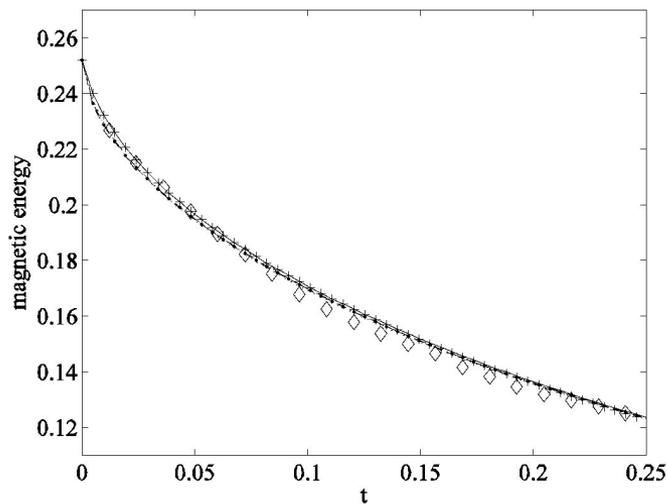
$M_s=1$



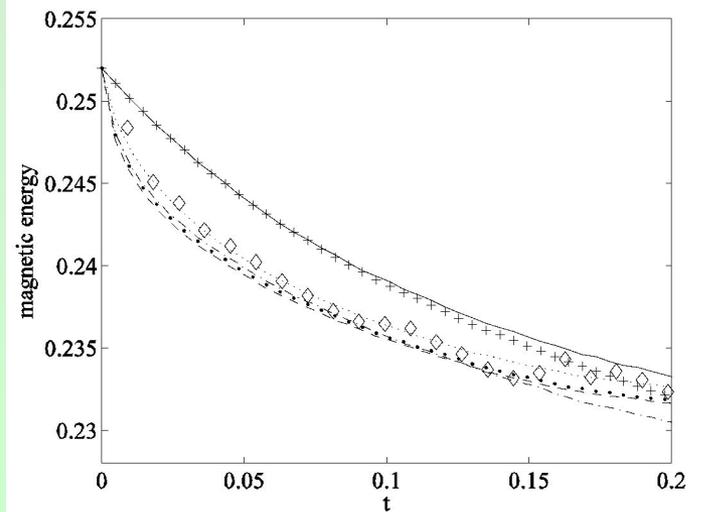
$M_s=0.2$



$Re_m=2$

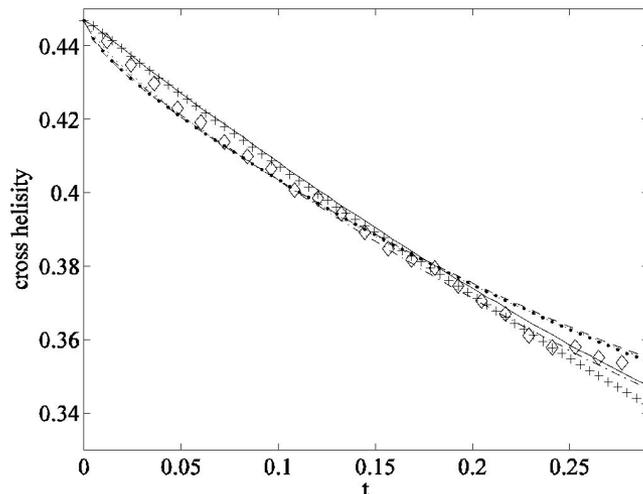


$Re_m=20$

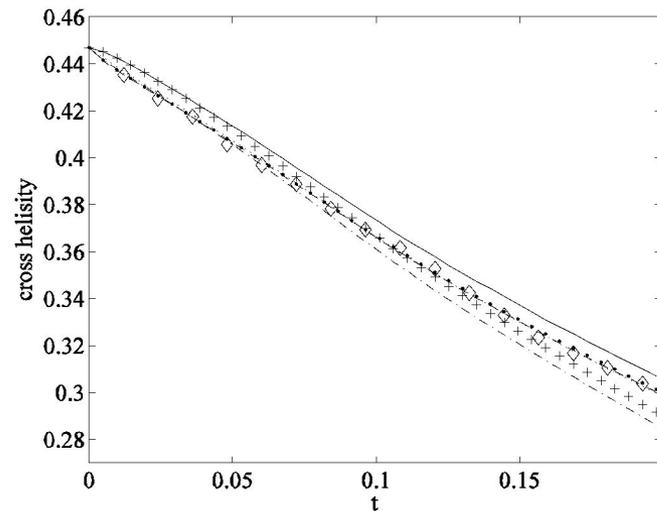


# Перекрестная спиральность

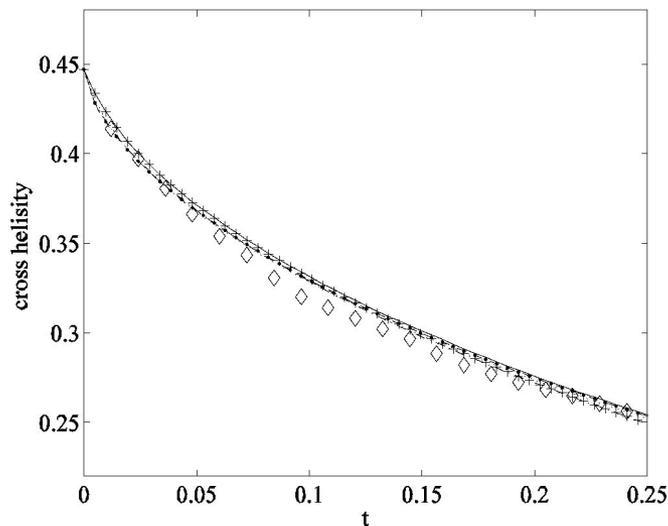
$Ms=1$



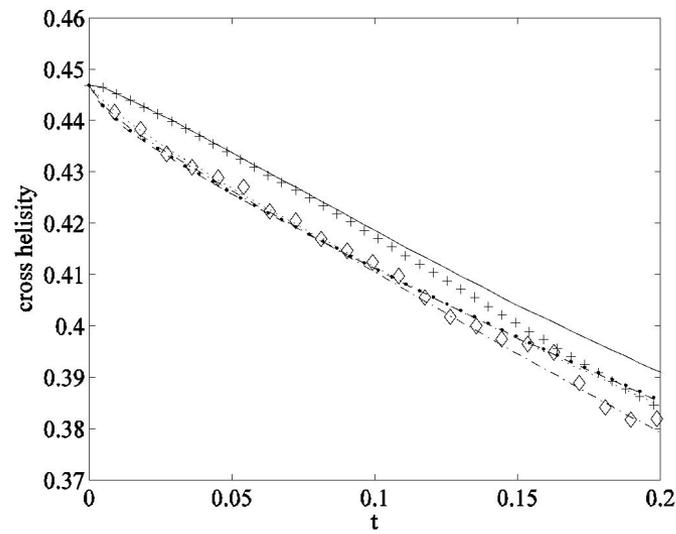
$Ms=0.2$



$Re_m=2$



$Re_m=20$



# Выводы

- Метод LES сформулирован для сжимаемой МГД турбулентности для моделирования сжимаемой. Проведены численные исследования пяти подсеточных параметризаций при различных параметрах подобия: модель Смагоринского; модель Колмогорова; модель, основанная на взаимной спиральности скорости и магнитного поля; модель подобия масштабов и смешанная модель при различных числах подобия
- В целом, наилучшие результаты демонстрируют расширенная модель Смагоринского для МГД случая и модель, основанная на взаимной спиральности магнитного поля и поля скоростей. Модель подобия масштабов не обеспечивает достаточной диссипацией кинетическую и магнитную энергию и эту модель следует использовать только вместе с моделями вихревой вязкости (например, с моделью Смагоринского), что является основной идеей смешанной модели.
- Метод LES имеет хорошие перспективы для исследования сжимаемой магнитогидродинамической турбулентности политропной плазмы.

Метод крупных вихрей для  
сжимаемой МГД турбулентности  
теплопроводящей плазмы.

# Отфильтрованные уравнения МГД для теплопроводящей плазмы

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_j}{\partial x_j} = 0$$

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j + \bar{p} \delta_{ij} - \frac{1}{\text{Re}} \tilde{\sigma}_{ij} + \frac{\bar{B}^2}{2M_A^2} - \frac{1}{M_A^2} \bar{B}_i \bar{B}_j) = - \frac{\partial \tau_{ji}^u}{\partial x_j}$$

$$\frac{\partial \bar{B}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\tilde{u}_j \bar{B}_i - \bar{B}_j \tilde{u}_i) - \frac{1}{\text{Re}_m} \frac{\partial^2 \bar{B}_i}{\partial x_j^2} = - \frac{\partial \tau_{ji}^b}{\partial x_j}$$

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{E}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} [(\tilde{E} + \bar{P}) \tilde{u}_j - \frac{1}{M_A^2} \bar{B}_i \bar{B}_j \tilde{u}_i] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{\tilde{q}_j}{\text{Pr Re } M_s^2 (\gamma - 1)} - \frac{1}{\text{Re}} \tilde{\sigma}_{ij} \tilde{u}_i \right] -$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{\eta}{\text{Re}_m M_a^2} \bar{B}_i \left( \frac{\partial \bar{B}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{B}_j}{\partial x_i} \right) \right] = - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{\gamma M_s^2} Q_j + \frac{1}{2} J_j + \frac{1}{2 M_a^2} V_j - \frac{1}{M_s^2} G_j \right)$$

**Уравнение состояния:**

$$\bar{p} = \frac{\tilde{T} \bar{\rho}}{\gamma M_s^2}$$

$$E = \rho e + \frac{1}{2} \rho u_i u_i + \frac{1}{2 M_a^2} B_i B_i$$

полная энергия

$$e = \frac{T \rho}{\gamma (\gamma - 1) M_s^2}$$

внутренняя энергия

# Подсеточные слагаемые в отфильтрованных уравнениях

- $\tau_{ij}^u = \bar{\rho}((u_j u_i)^\sim - \tilde{u}_j \tilde{u}_i) - \frac{1}{M_A^2} (\overline{B_i B_j} - \bar{B}_j \bar{B}_i)$  - тензор подсеточных напряжений
- $\tau_{ij}^b = (\overline{u_i B_j} - \bar{B}_j \tilde{u}_i) - (\overline{B_i u_j} - \tilde{u}_j \bar{B}_i)$  - магнитный подсеточный тензор напряжений
- $Q_j = \bar{\rho}((u_j T)^\sim - \tilde{u}_j \tilde{T})$  - подсеточный поток тепла
- $J_j = \bar{\rho}((u_j u_k u_k)^\sim - \tilde{u}_j (u_k u_k)^\sim)$  - турбулентной подсеточной диффузии
- $V_j = (\overline{B_k B_k u_j} - \bar{B}_j \bar{B}_k \tilde{u}_j)$  - поток подсеточной магнитной энергии
- $G_j = (\overline{B_j B_k u_k} - \tilde{u}_k \bar{B}_k \bar{B}_j)$  - подсеточная энергия взаимодействия магнитного натяжения и скорости

# Подсеточные модели - 1

Для подсеточных тензоров в уравнениях импульса и индукции, используем модель Смагоринского для МГД случая:

$$\tau_{ij}^u = -2C \bar{\rho} \bar{\Delta}^2 |\tilde{S}^u| (\tilde{S}_{ij} - \frac{1}{3} \tilde{S}_{kk} \delta_{ij}) + \frac{2}{3} Y \bar{\rho} \bar{\Delta}^2 |\tilde{S}^u|^2 \delta_{ij}$$

$$\tau_{ij}^b = -2D \bar{\Delta}^2 |\bar{j}| \bar{J}_{ij}$$

Для параметризации подсеточного потока тепла используется вихревая диффузионная модель. Данная модель похожа на определение молекулярного теплового потока, однако молекулярная вязкость и число Прандтля были заменены соответственно на динамическую вихревую вязкость и на турбулентное число Прандтля:

$$Q_j = -C_s \frac{\bar{\Delta}^2 \bar{\rho} |\tilde{S}^u|}{\text{Pr}_T} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j}$$

Модель для  $J_j$  получается по аналогии Рейнольдского подхода для усреднения уравнений Навье-Стокса и в предположении, что  $\tilde{u}_i \cong \tilde{u}_i$

$$J_j = \tilde{u}_k \tau_{jk}^u$$

# Подсеточные модели - 2

Для окончательного замыкания полной системы уравнений сжимаемой магнитной гидродинамики необходимо параметризовать подсеточные слагаемые в уравнении энергии, возникающие из-за наличия магнитного поля. Для того чтобы получить эти подсеточные модели, воспользуемся теорией, основанной на обобщенных центральных моментах. Данный подход в нашей работе расширен и применен к МГД случаю:

$$\varphi(B_i, B_k) = (\overline{B_i B_k} - \bar{B}_i \bar{B}_k)$$

- корреляционные моменты второго порядка

$$\varphi(u_i, B_k) = (\overline{u_i B_k} - \tilde{u}_i \bar{B}_k)$$

$$\begin{aligned} \varphi(B_i, B_k, u_j) = & (\overline{B_i B_k u_j} - \bar{B}_i \bar{B}_k \tilde{u}_j) - \tilde{u}_j \varphi(B_i, B_k) \\ & - \bar{B}_k \varphi(u_j, B_i) - \bar{B}_i \varphi(u_j, B_k), \end{aligned}$$

- корреляционные моменты третьего порядка

Подсеточный поток магнитной энергии:

$$V_j = \overline{B_k B_k u_j} - \overline{B_j B_i \tilde{u}_j} = \overline{B_k B_k u_j} - \tilde{u}_k \bar{B}_k \bar{B}_k - \overline{B_j B_i \tilde{u}_j} + \tilde{u}_k \bar{B}_k \bar{B}_k$$

# Подсеточные модели - 3

Сделаем замену индексов в корреляционном моменте третьего момента :

$$\begin{aligned} \varphi(B_k, B_k, u_j) = & \overline{(B_k B_k u_j - \bar{B}_k \bar{B}_k \bar{u}_j)} - \bar{u}_j \varphi(B_k, \bar{B}_k) \\ & - \bar{B}_k \varphi(u_j, B_k) - \bar{B}_k \varphi(u_j, B_k). \end{aligned} \longrightarrow V_j = \varphi(B_k, B_k, u_j) + 2\bar{B}_k \varphi(u_j, B_k)$$

Аналогичным образом запишем соотношение для SGS тензора  $G_j$ :

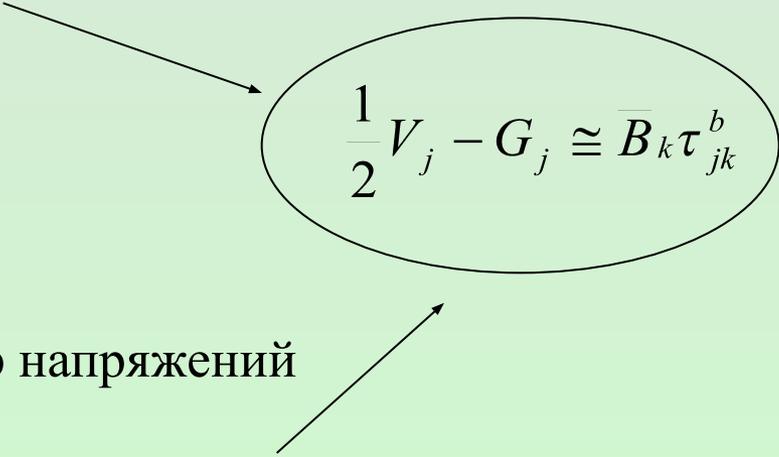
$$\begin{aligned} G_j = & \varphi(B_j, B_k, u_k) + \bar{B}_k \varphi(u_k, B_j) + \bar{u}_k \varphi(B_j, B_k) \\ & + \bar{B}_j \varphi(u_k, B_k). \end{aligned}$$

Предполагается, что тройной корреляцией можно пренебречь. Магнитная корреляция пренебрегается при моделировании SGS тензора в уравнении сохранения количества движения, так как магнитные моменты имеют намного более слабую корреляция по сравнению с моментами скорости. Последний член описывает корреляции в направлении, где вектор скорости и вектор магнитного поля коллинеарны, следовательно, сила Лорентца в этом направлении отсутствует.

# Подсеточные модели - 4

Поэтому, сумму подсеточных тензоров  $V_j$  и  $G_j$  можно представить в следующем виде:

$$\frac{1}{2}V_j - G_j \simeq \frac{1}{2}(2\bar{B}_k\varphi(u_j, B_k)) - \bar{B}_k\varphi(u_k, B_j)$$


$$\frac{1}{2}V_j - G_j \cong \bar{B}_k\tau_{jk}^b$$

Так как магнитный подсеточный тензор напряжений может быть представлен в виде:

$$\tau_{ij}^b = (\overline{u_i B_j} - \bar{B}_j \tilde{u}_i) - (\overline{B_i u_j} - \tilde{u}_j \bar{B}_i) = \varphi(u_i, B_j) - \varphi(u_j, B_i)$$

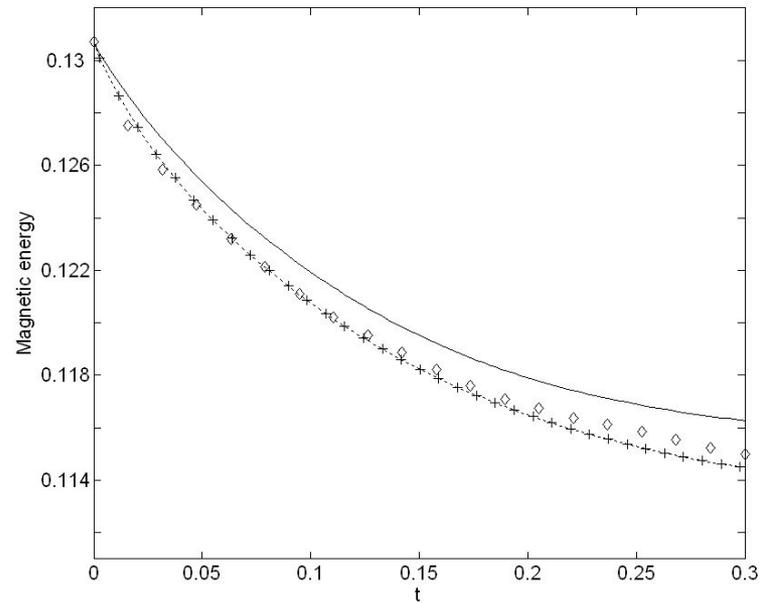
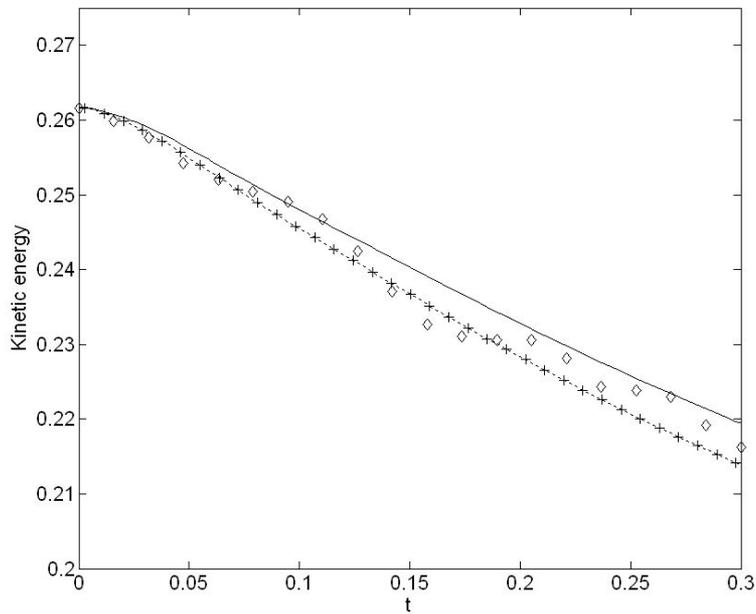
# Рассмотренные случаи

Так как эффекты сжимаемости и временная динамика температуры, определяемая из уравнения полной энергии, нетривиально зависят от числа Маха, в данной работе рассматриваются три случая:

число Маха равно  $Ms = 0.38$ , то есть течение умеренно сжимаемое; при числах Маха  $Ms = 0.65$ , когда сжимаемость играет существенную роль; и третий случай –  $Ms = 1.45$ , что соответствует появлению сильных разрывов в существенно сжимаемом течении.

Во всех трех численных экспериментах использовались следующие безразмерные параметры при вычислениях: гидродинамическое число Рейнольдса  $Re = 281$ , микромасштабное (тейлоровское) число Рейнольдса  $Re_l = 43$ , магнитное число Рейнольдса  $Rem = 10$ , Альфвеновское число Маха  $Ma = 1.2$ , число Прандтля  $Pr = 1.0$ , показатель политропы  $1.5$ .

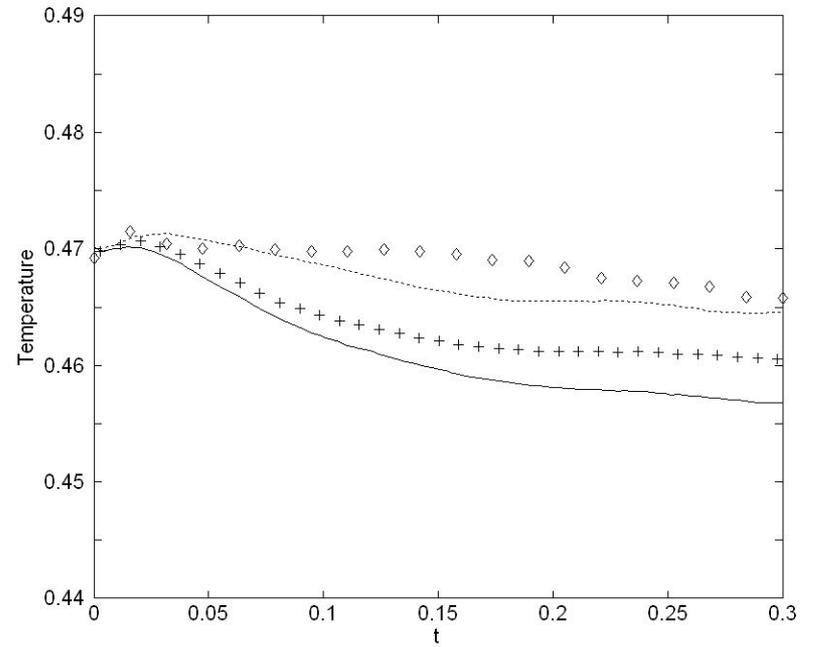
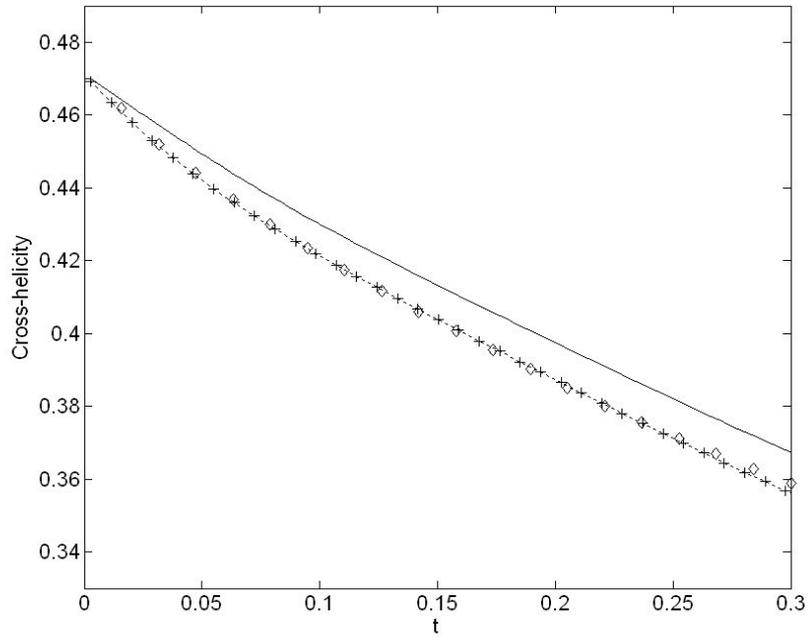
# M=0.38



Временная динамика  
кинетической и магнитной  
энергии

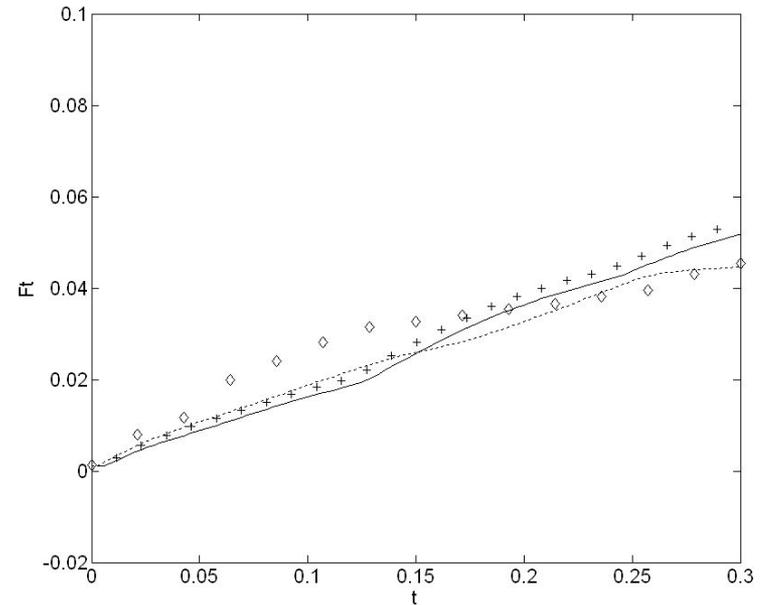
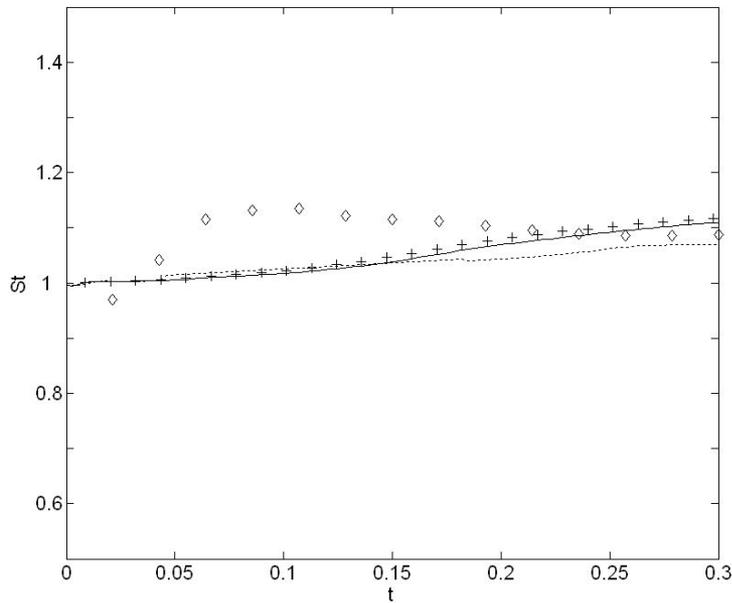
Case	Curve
DNS	Diamond line
LES without any SGS models	Solid line
LES	Dotted line
LES without energy SGS terms	Marker +

# M=0.38



Временная динамика перекрестной спиральности и температуры

# M=0.38



Временная динамика асимметрии температуры и параметра  $Ft$

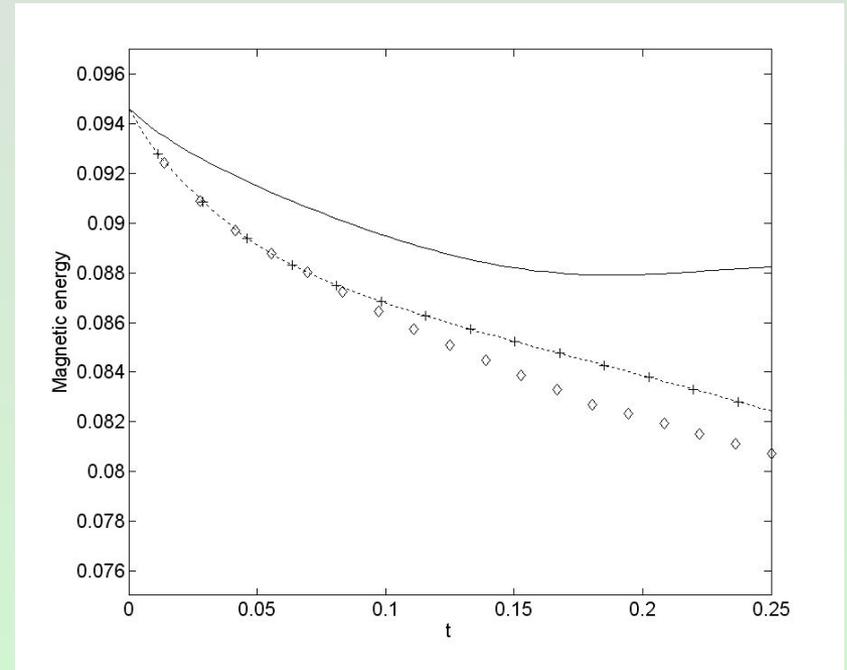
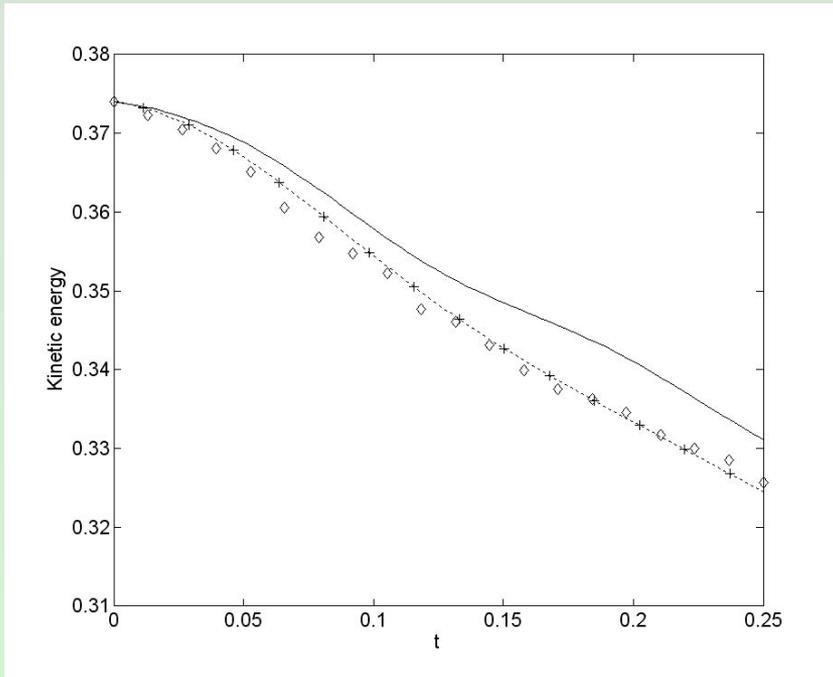
$$St = \frac{\langle T^3 \rangle}{(\langle T^2 \rangle)^{3/2}}$$

- асимметрия температуры

$$Ft = (\langle (T - \langle T \rangle)^2 \rangle)^{1/2}$$

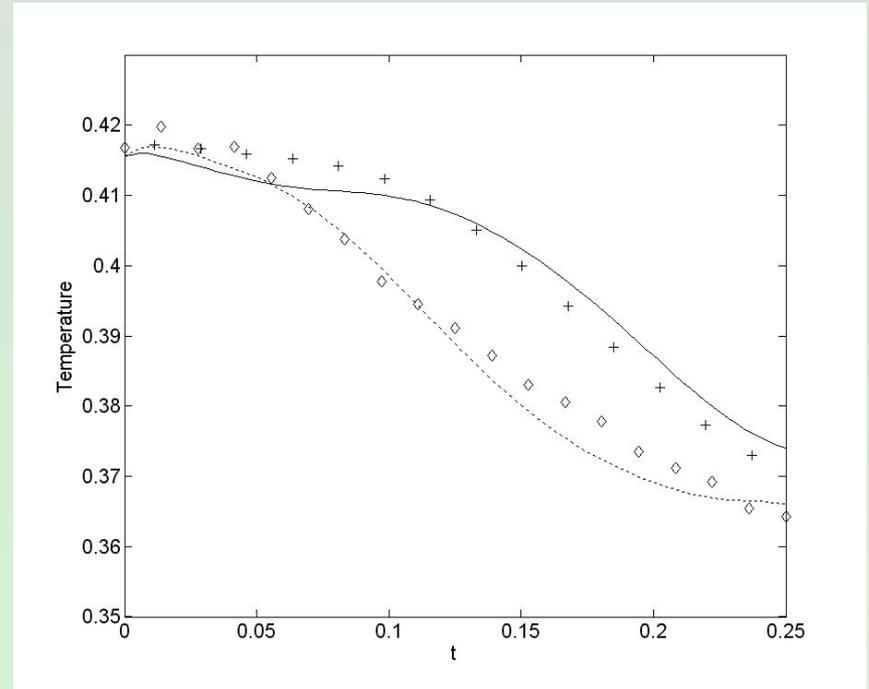
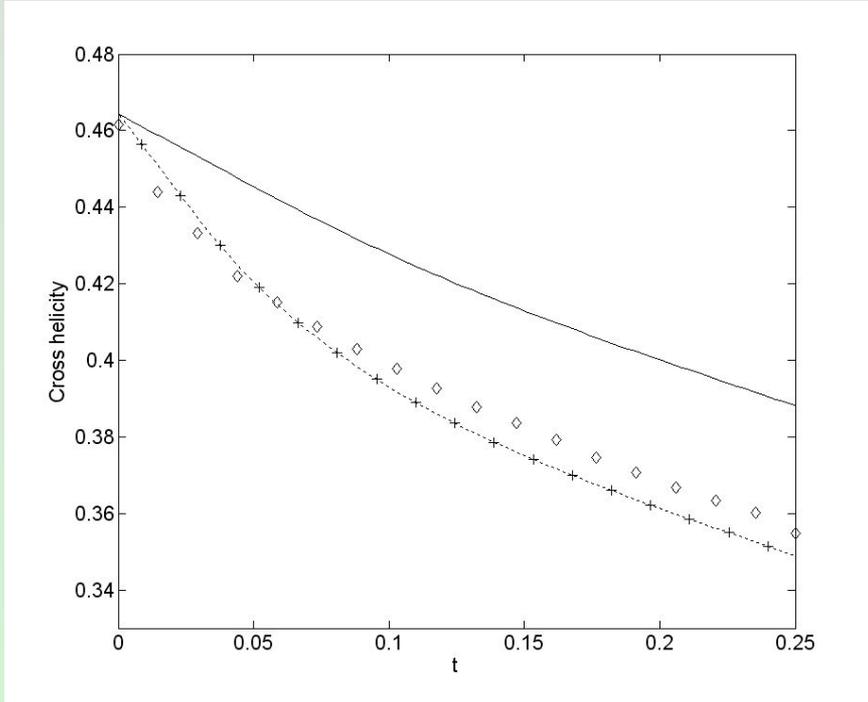
- параметр, характеризующий флуктуации температуры

# M=0.65



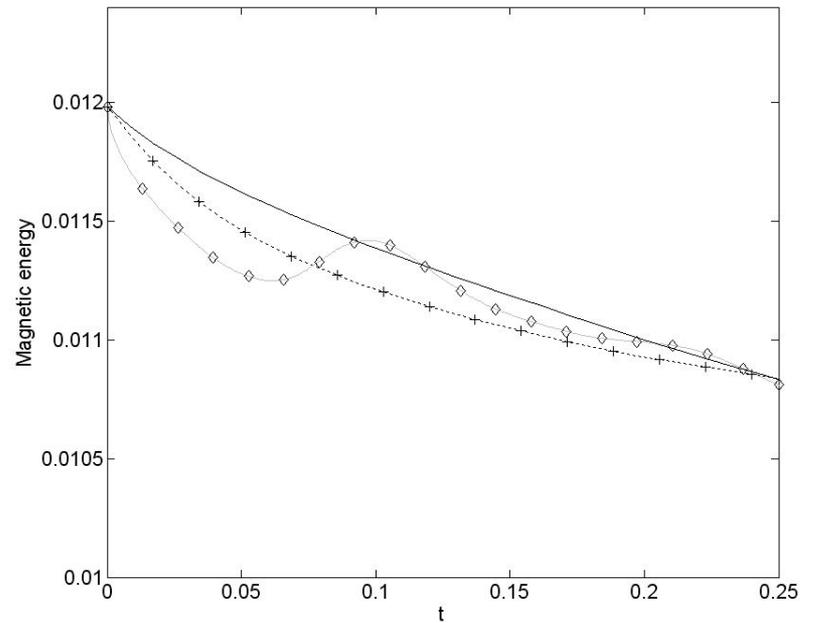
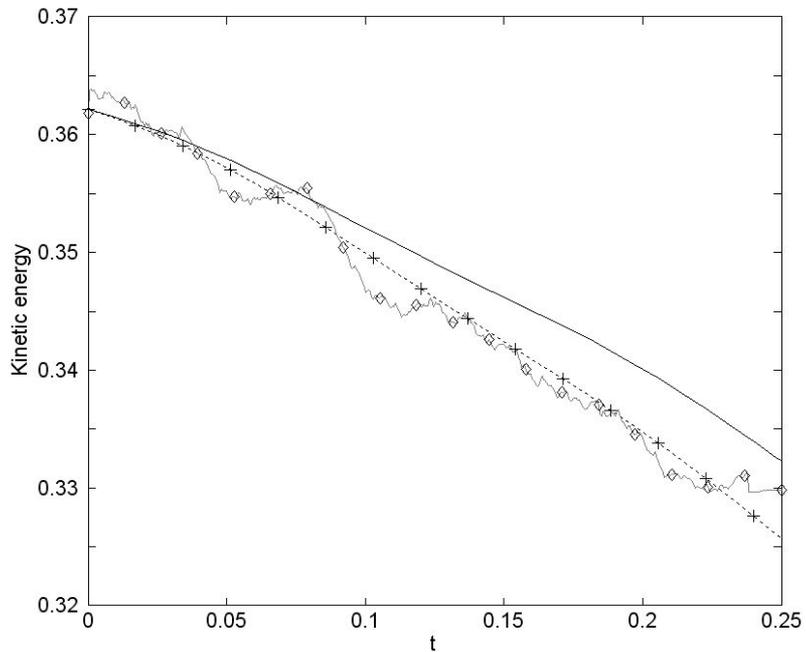
Временная эволюция кинетической и магнитной энергии.

# M=0.65



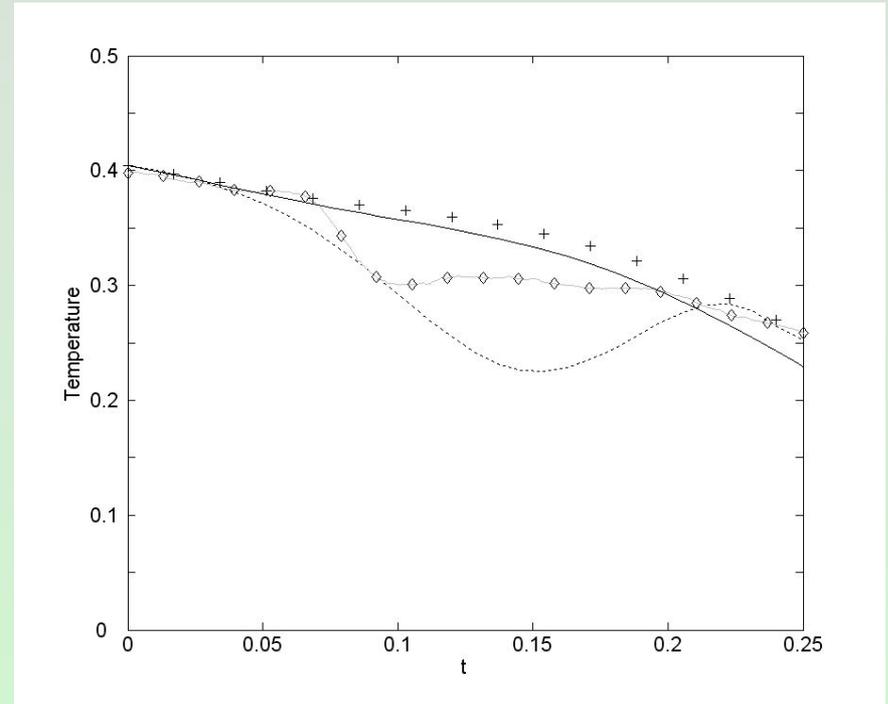
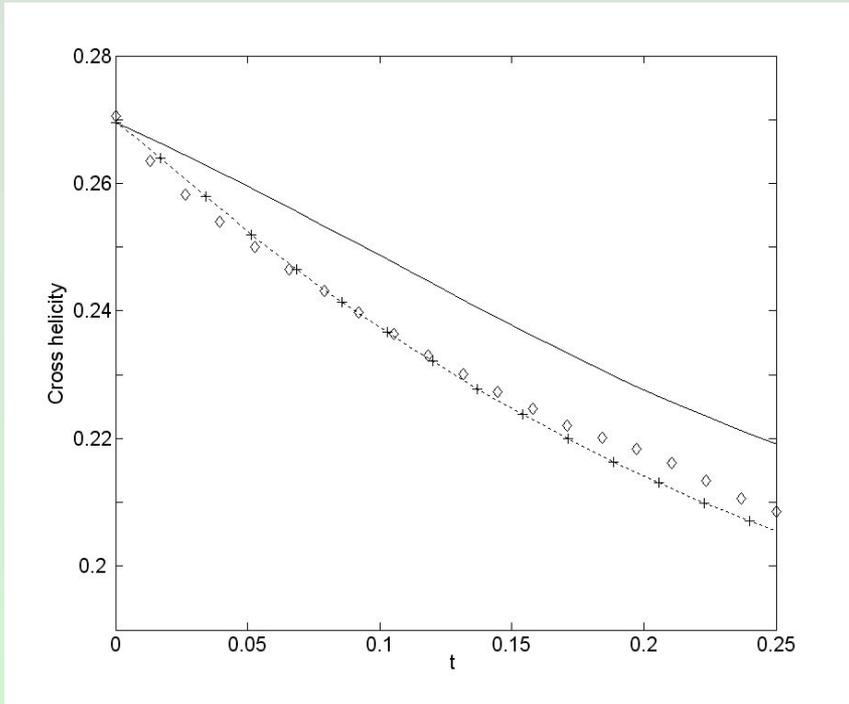
Временная динамика перекрестной спиральности и температуры

# M=1.45



Временная эволюция кинетической и магнитной энергии.

# M=1.45



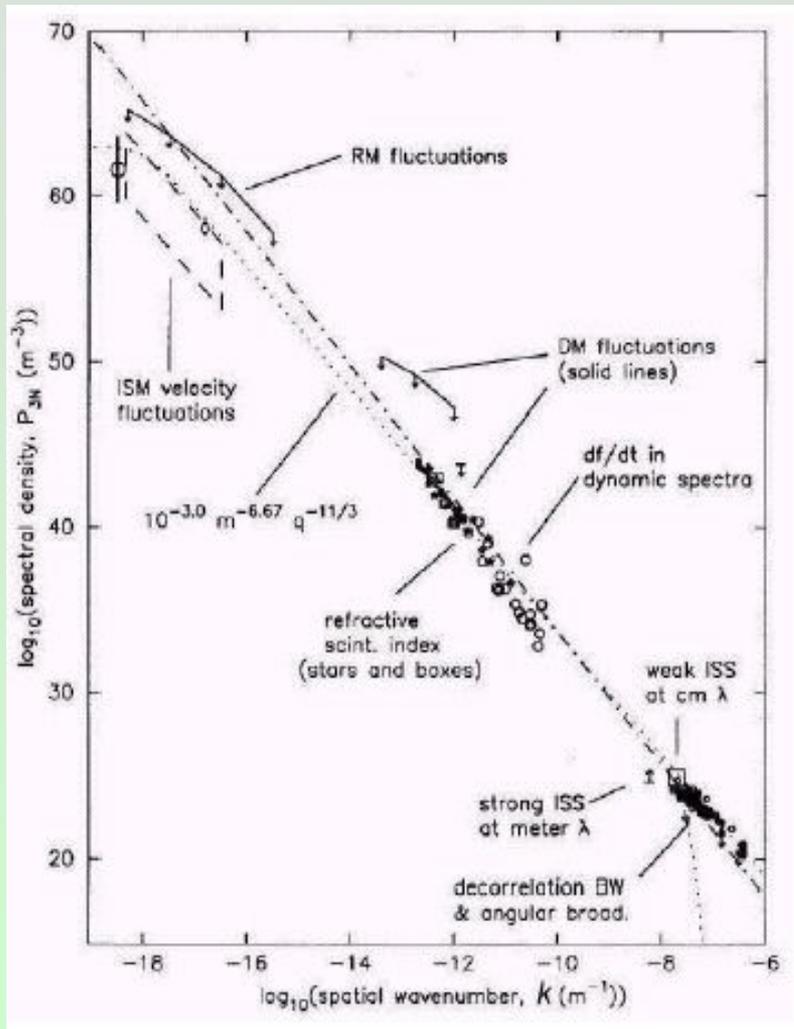
Временная динамика перекрестной спиральности и температуры

# Выводы

- Получена система отфильтрованных уравнений МГД при наличии уравнения полной энергии. Предложены новые подсеточные модели для подсеточных слагаемых, появляющиеся после операции фильтрации, в уравнении полной энергии при наличии магнитного поля.
- На кинетическую и магнитную энергию учет подсеточных слагаемых в уравнении полной энергии почти не оказывает никакого эффекта, даже при высоких числах Маха, в то же время для температуры (соответственно и для внутренней энергии) наличие подсеточных моделей в уравнении полной энергии является важным условием для повышения точности вычислений термодинамических величин. При увеличении значения числа Маха увеличиваются осцилляции кинетической, магнитной энергии и температуры.
- Метод LES с использованием явной средневзвешенной фильтрацией демонстрирует хорошие результаты при моделировании электро- и теплопроводящей плазмы в сжимаемой МГД турбулентности при различных числах Маха, особенно для дозвуковых течений.

Установление слабо сжимаемого режима в МГД турбулентности космической плазмы и свойства турбулентности локальной межзвёздной среды.

# Локальная межзвездная среда



*Межзвездная среда - это вещество и поля, наблюдаемое в пространстве между звездами внутри галактик. Межзвездная среда нашей галактики, непосредственно примыкающая к солнечной системе, называется **локальной (местной) межзвездной средой**.*

Спектр колмогоровского типа  $k^{-5/3}$  был теоретически получен для несжимаемой гидродинамической среды, а межзвездная турбулентность является МГД и существенно сжимаемой, поэтому основной задачей является понимания возникновения колмогоровского спектра для флуктуаций плотности и энергии в локальной межзвездной турбулентности.

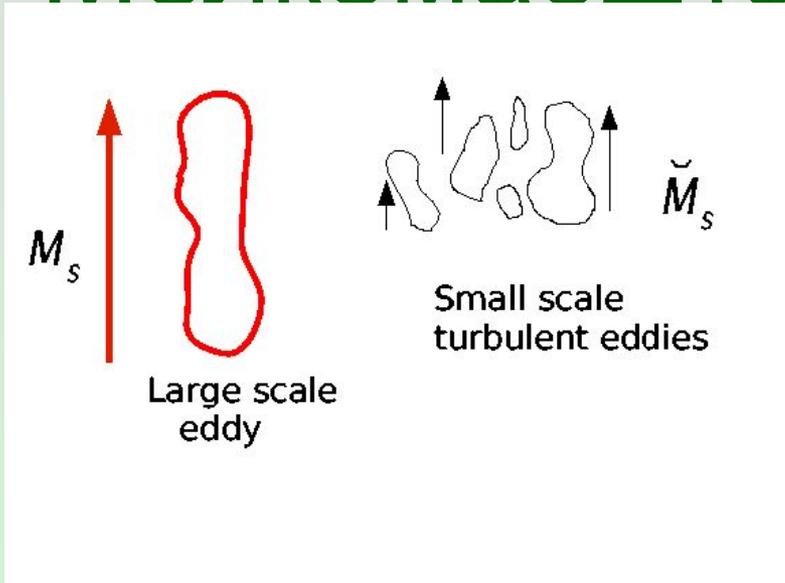
# МГД модель

Статистически однородная, изотропная плазма в локальной межзвездной среде может быть описана одножидкостной магнитогидродинамической моделью:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} \\ \frac{\partial \rho u_i}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \rho u_i u_j + p \delta_{ij} - \sigma_{ij} - \frac{1}{4\pi} B_j B_i + \frac{1}{8\pi} B^2 \right) \\ \frac{\partial B_i}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x_j} (B_i u_j - B_j u_i) + \eta \nabla^2 B_i \\ \frac{\partial B_j}{\partial x_j} = 0 \end{array} \right.$$

# Мелкомасштабные числа Маха

Крупномасштабные значения чисел подобия:



$$\text{Re} = \frac{\rho_0 L_0 u_0}{\mu_0}$$

$$\text{Re}_m = \frac{L_0 u_0}{\eta_0}$$

$$M_s = \frac{u_0}{c_s}$$

$$M_A = \frac{u_0}{u_A}$$

$$\beta = \frac{8\pi\rho_0}{B_0}$$

Мелкомасштабные значения чисел подобия:

$$\check{M}_s = \frac{\sqrt{\langle |u|^2 \rangle}}{\check{c}_s}$$

где

$$\check{c}_s = \sqrt{\gamma\rho^{(\gamma-1)/2}}$$

$$\check{M}_a = \frac{\sqrt{\langle |u|^2 \rangle}}{\check{u}_a}$$

$$\check{u}_a = \check{V} / \sqrt{4\pi\check{\rho}}$$

*Крупномасштабное течение, или постоянное среднее фоновое течение, приводит к постоянному значению числа Маха, в то время как локальные флуктуирующие вихри изменяют турбулентное число Маха, зависящее от локальных свойств мелкомасштабных турбулентных флуктуаций.*

# Параметры моделирования локальной межзвездной среды

Для исследования локальной межзвездной турбулентности, используется LES метод для решения системы уравнений сжимаемой МГД, в качестве подсеточной параметризации применяется расширенная модель Смагоринского для МГД случая, которая продемонстрировала достаточно точные результаты при различных числах подобия.

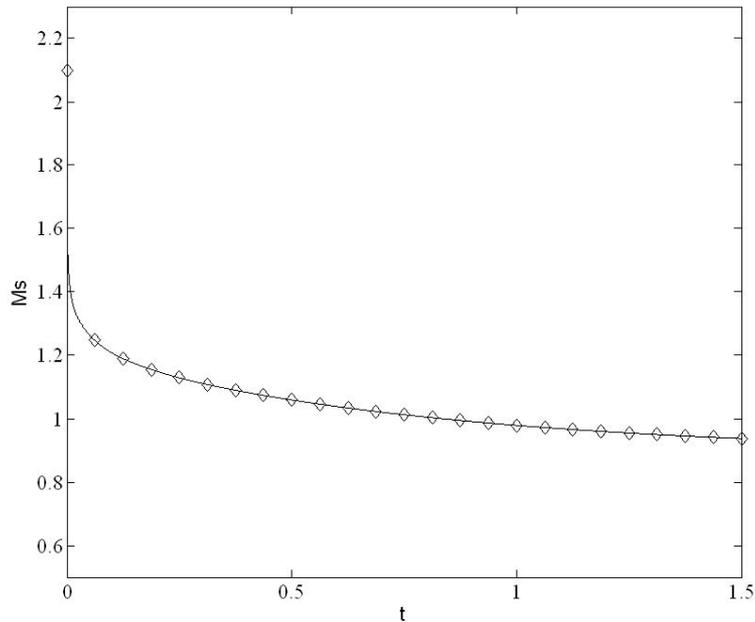
Начальные параметры:  $Re \approx 2000$   $M_s \approx M_A \approx 2.2$

$Re_m \approx 200$  (амбиполярная диффузия)

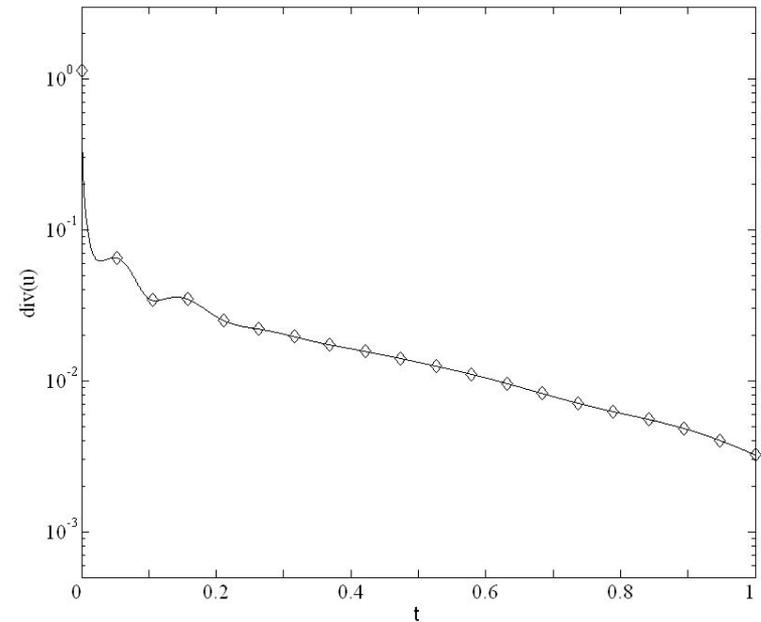
Начальный изотропный турбулентный спектр для кинетической и магнитной энергии выбирался близким к спектру  $k^{-2}$  со случайными амплитудой и фазами по всем трем направлениям.

Расчетная область - трехмерный куб с размерами  $\pi^3$

# Свойства сжимаемости среды

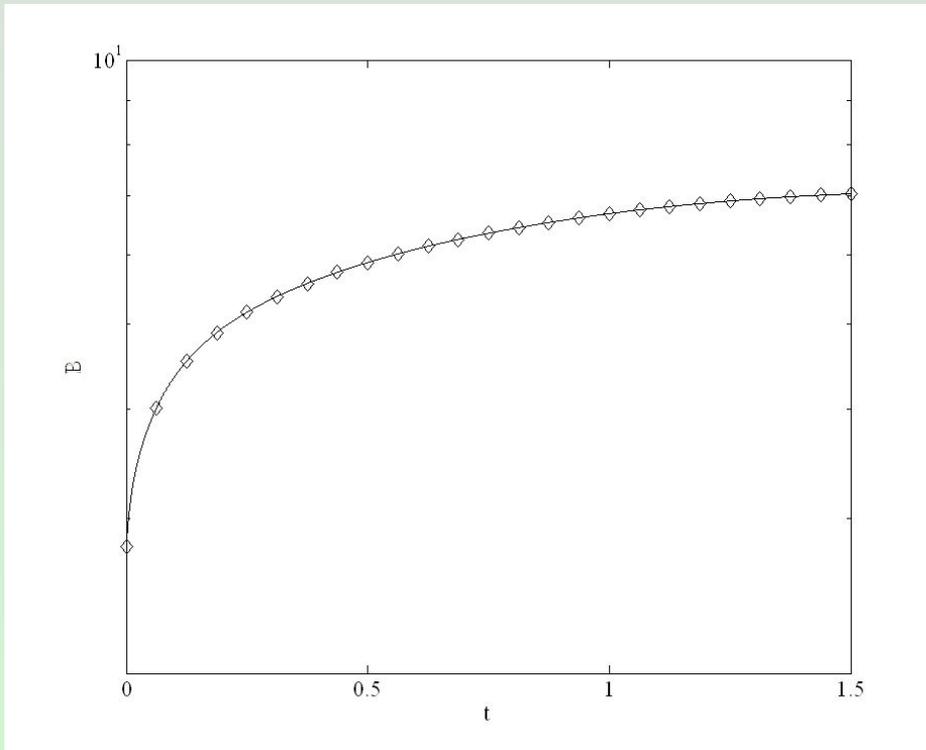


Затухание турбулентного мелкомасштабного числа Маха со временем. Наблюдается переход из сверхзвукового режима к дозвуковому.



Дивергенция скорости, характеризующая сжимаемость среды, затухает и течения становится слабо сжимаемым со временем.

# Намагниченность плазмы



Турбулентная плазменная бета:

$$\check{\beta} \simeq \frac{8\pi\check{p}}{\check{B}^2} \sim \frac{\check{c}_s^2}{\check{u}_a^2} \sim \frac{\check{M}_a^2}{\check{M}_s^2}$$

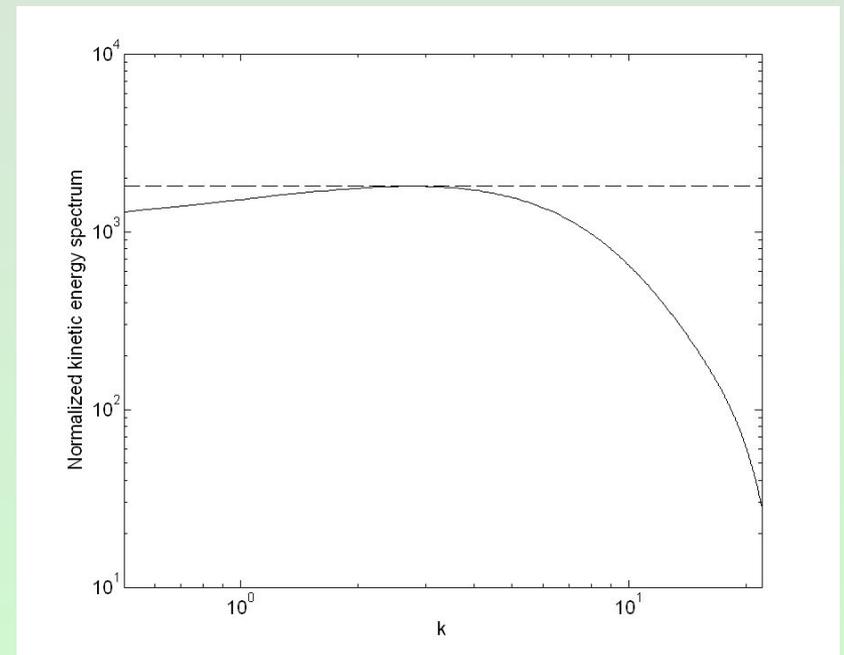
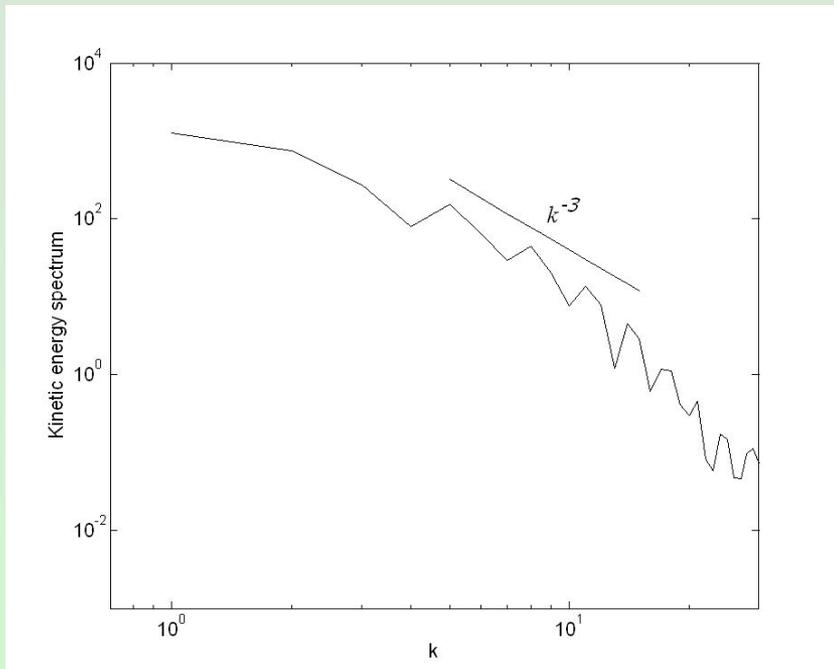
$$\check{u} < \check{u}_a < \check{c}_s$$

$$\tau_s < \tau_a < \tau_{NL}$$

Магнитозвуковые флуктуации ослабевают быстрее, чем альфеновские

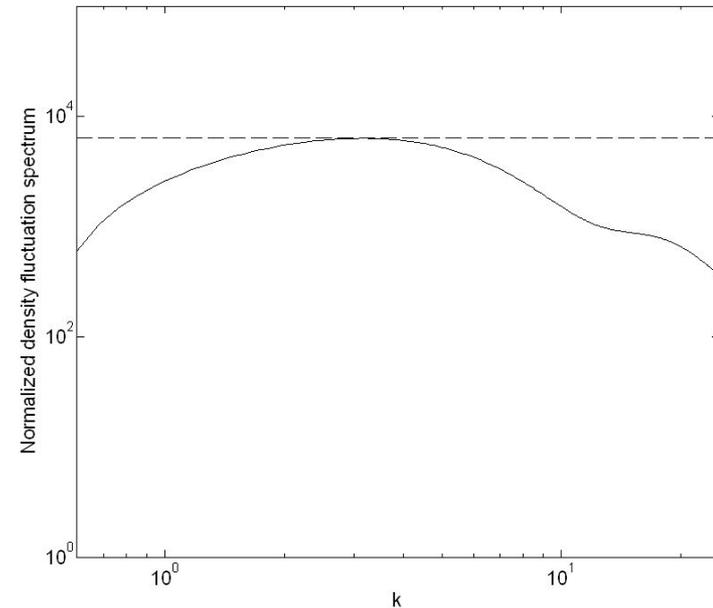
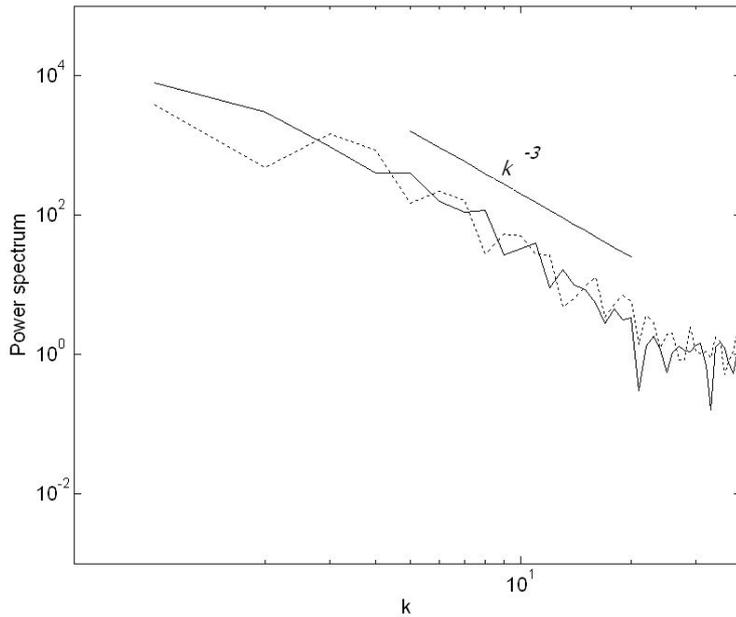
Частицы плазмы, связанные с магнитными силовыми линиями, выталкиваются из их gyro-орбит вследствие того, что увеличивается доминирующая роль плазменного давления по сравнению с магнитной энергией. Это приводит к ослаблению намагниченности плазмы, следовательно и плазменных флуктуаций.

# Турбулентные спектры - 1



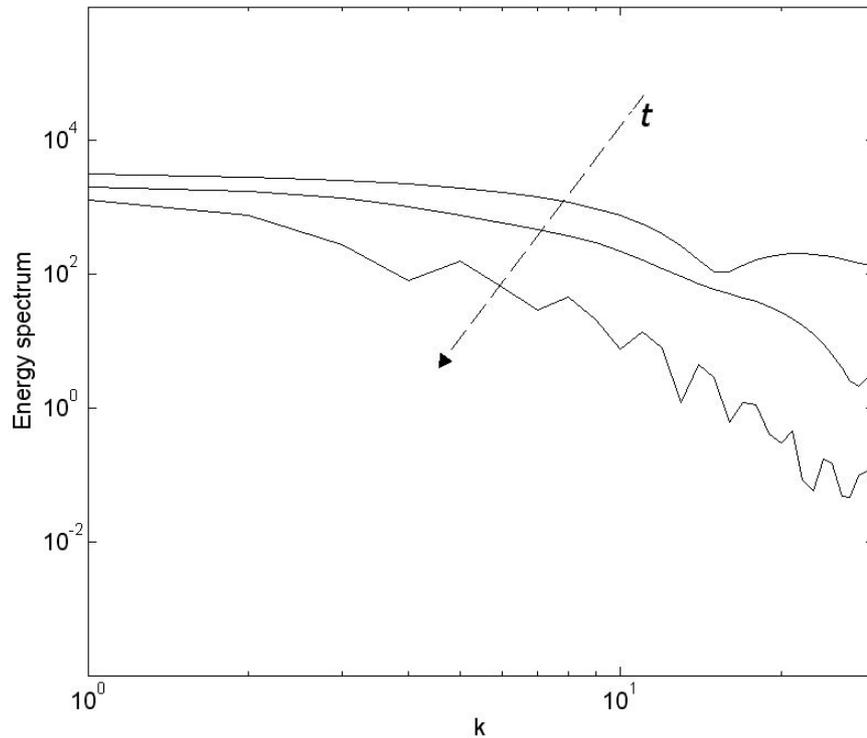
Спектр кинетической энергии (слева). Нормализованный (умноженный на  $k^{5/3}$ ) сглаженный спектр кинетической энергии (справа). Видно, что степенной показатель спектра близок к  $k^{-3}$  для большей части турбулентного каскада. Однако существует четко выраженный инерционный интервал колмогоровского типа  $k^{-5/3}$

# Турбулентные спектры - 2



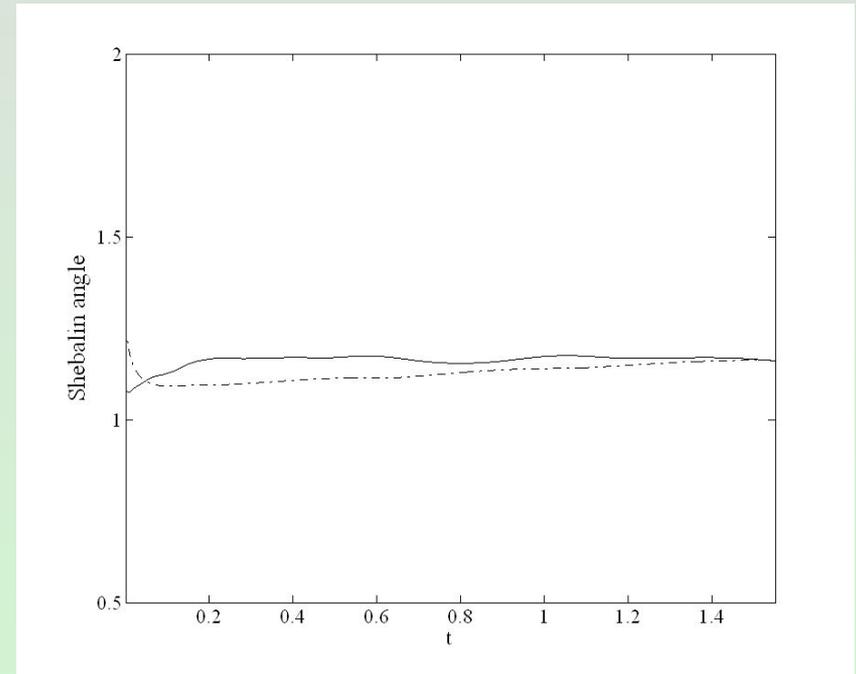
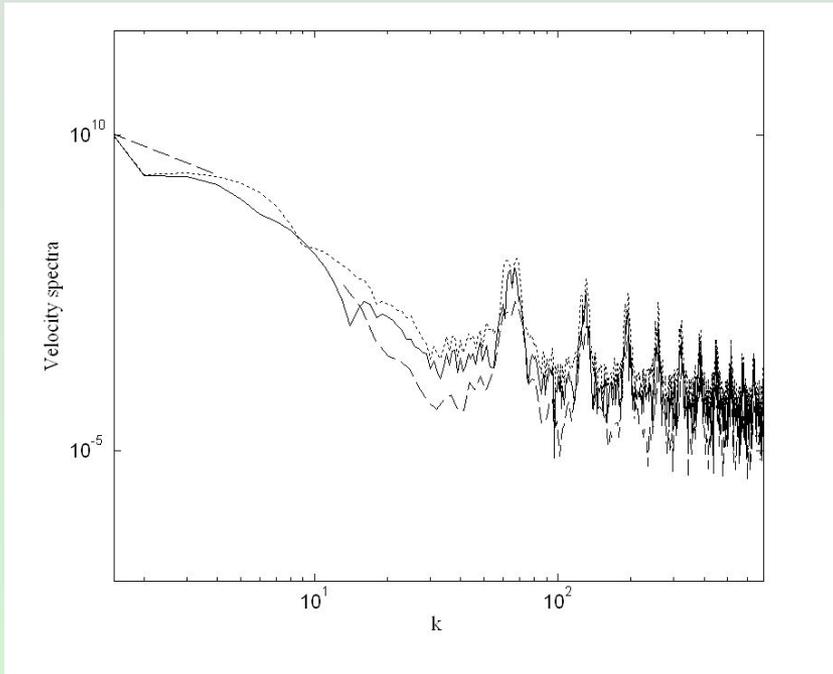
Спектр плотности - сплошная линия, спектр флуктуаций плотности - пунктирная линия (слева). Нормализованный (умноженный на  $k^{5/3}$  сглаженный спектр флуктуаций плотности (справа). На рисунке (слева) оба графика имеют показатель спектра близкий к  $k^{-3}$ . Также существует четко выраженный инерционный интервал колмогоровского типа  $k^{-5/3}$  для флуктуаций плотности (справа), что подтверждает наблюдательные данные.

# Турбулентные спектры - 3



Изменение спектра энергии со временем

# Анизотропная турбулентность



При низких значениях плазменной беты - анизотропия и нарушения симметрии вызваны в первую очередь магнитным полем. При больших значениях - каскады анизотропной турбулентности наблюдаются из-за распространения сжимаемых акустических мод, которые препятствуют спектральному переносу в локальном Фурье пространстве. Эти моды в МГД турбулентности могут быть возбуждены либо крупными масштабами, либо внешней скоростью фоновой турбулентностью.

$$\tan^2 \theta_u = 2 \frac{G_{xx}^u + G_{xy}^u + G_{xz}^u}{G_{yx}^u + G_{yy}^u + G_{yz}^u}$$

$$\tan^2 \theta_b = 2 \frac{G_{xx}^b + G_{xy}^b + G_{xz}^b}{G_{yx}^b + G_{yy}^b + G_{yz}^b}$$

- угол Шебалина (анизотропный угол).

# Выводы

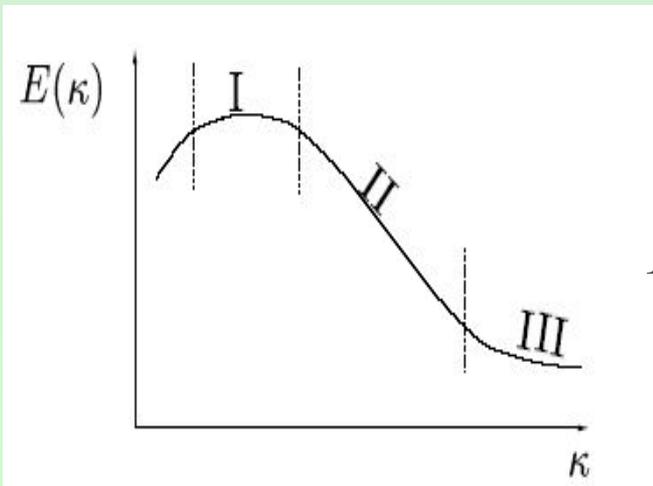
- Флуктуации плотности являются пассивным скаляром в поле скорости в умеренно сжимаемой МГД турбулентности и демонстрируют колмогоровский спектр
- Показано уменьшение энергосодержащих крупных вихрей и инерционного интервала и увеличение диссипативного масштаба в спектре энергии.
- Турбулентное число Маха уменьшается значительно со сверхзвукового режима турбулентности, где рассматриваемая среда сильно сжимаемая до дозвукового значения, характеризующее слабо сжимаемое течение.
- В локальной межзвездной среде переход плазмы от существенно сжимаемого МГД турбулентного течения к умеренно сжимаемому течению в локальной межзвездной среде не только преобразовывает сверхзвуковое движение в дозвуковое, но также приводит к ослаблению намагниченности плазмы, так как плазменная бета увеличивается со временем, таким образом роль магнитной энергии падает по сравнению с давлением плазмы.
- Крупномасштабное течение проявляет анизотропные свойства, в то время как мелкомасштабные структуры являются изотропными.

1. Chernyshov A. A., Karelsky K. V., Petrosyan A. S. *Subgrid-scale modeling in large-eddy simulations of compressible magnetohydrodynamic turbulence*// Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2006. Vol. 21. N. 1. P. 1-20
2. Chernyshov A. A., Karelsky K. V., Petrosyan A. S. *Large-eddy simulation of magnetohydrodynamic turbulence in compressible fluid*// Physics of Plasmas. 2006. V. 13. N. 3. P. 032304-032304-9.
3. Chernyshov A. A., Karelsky K. V., Petrosyan A. S. *Subgrid-scale modelling of compressible magnetohydrodynamic turbulence in heat-conducting plasma*// Physics of Plasmas. 2006. V. 13. N. 10. P. 104501-104501-4.
4. Chernyshov A. A., Karelsky K. V., Petrosyan A. S. *Development of large eddy simulation for modeling of decaying compressible magnetohydrodynamic turbulence*// Physics of Fluids. 2007. V. 19. N. 5. P. 055106-055106-14.
5. Chernyshov A. A., Karelsky K. V., Petrosyan A. S. *Assessment of subgrid-scale models for decaying compressible MHD turbulence*// Flow, Turbulence and Combustion. 2008. V. 20 N. 1 P. 21-35.
6. Chernyshov A. A., Karelsky K. V., Petrosyan A. S. *Modeling of compressible magnetohydrodynamic turbulence in electrically and heat conducting fluid using large eddy simulation*// Physics of Fluids, V. 20, N 8, pp. 085106-085106-13, 2008
7. Chernyshov A. A., Karelsky K. V., Petrosyan A. S. *Three-dimensional modeling of compressible magnetohydrodynamic turbulence in the local interstellar medium*// Astrophysical Journal, 686:1137–1144, 2008

**Спасибо за внимание!**

# Турбулентность

- ✓ широкий диапазон временных и пространственных масштабов
- ✓ нет аналитического решения
- ✓ нелинейность
- ✓ трехмерность
- ✓ нелинейное слагаемое  $\gg$  диссипативное слагаемое



I. Интегральный масштаб  $l$

II. Инерционный масштаб  $\eta$

III. Масштаб диссипации  $\lambda$

$$\text{Re} = \frac{\rho l v}{\mu} \quad l / \eta \sim \text{Re}^{3/4} \quad l / \lambda \sim \text{Re}^{1/2}$$

# SGS

$$\bar{\rho} \widetilde{u_j u_i} = \bar{\rho} (\widetilde{u_i} + u_i'') (\widetilde{u_j} + u_j'') = \bar{\rho} (\widetilde{u_i u_j} + \widetilde{u_i u_j''} + \widetilde{u_j u_i''} + \widetilde{u_i'' u_j''})$$

Нелинейные члены должны быть записаны, используя крупномасштабные величины:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \bar{\rho} \widetilde{u_j u_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{\rho} \widetilde{u_i u_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \widetilde{u_j u_i} - \bar{\rho} \widetilde{u_i u_j}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{\rho} \widetilde{u_i u_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} t_{ji}^u$$

Турбулентный тензор можно представить как:

$$t_{ij}^u = \bar{\rho} (\widetilde{u_i u_j} - \widetilde{u_i} \widetilde{u_j}) = \bar{\rho} (\underbrace{\widetilde{u_i u_j} - \widetilde{u_i} \widetilde{u_j}}_{\text{Леонардовский член}}) + \bar{\rho} (\underbrace{\widetilde{u_i u_j''} + \widetilde{u_j u_i''}}_{\text{Перекрестный член}}) + \bar{\rho} (\underbrace{\widetilde{u_i'' u_j''}}_{\text{Рейнольдсовский член}})$$

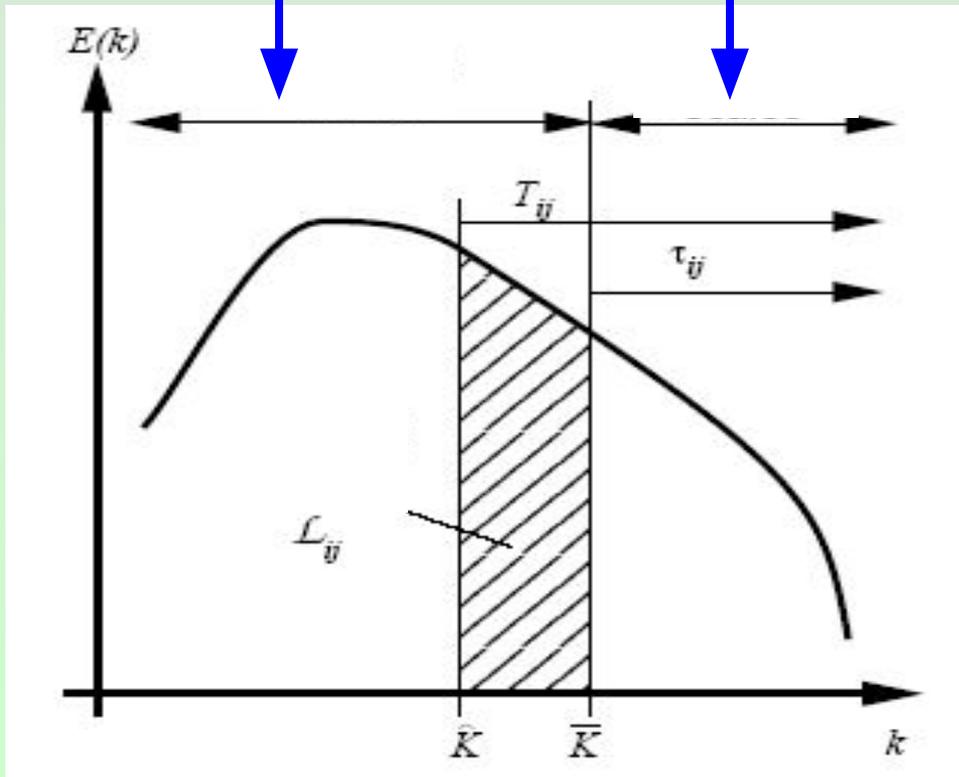
*Леонардовский  
член*

*Перекрестный  
член*

*Рейнольдсовский  
член*

# Динамическая процедура - 1

высчитываются      моделируются



$$T_{ij}^b = \bar{\tau}_{ij}^b + L_{ij}^b$$

$$T_{ij}^u = \tilde{\tau}_{ij}^u + L_{ij}^u$$

Тестовые тензоры для нахождения констант (соотношения Германо)

*Константа определяется динамически на каждом шаге.*

Отрицательные значения соответствуют обратному направлению энергии

# Динамическая процедура - 2

$$\nu_t = C_s \alpha_{ij}^u \quad (\text{для } \tau_{ij}^u) \quad - \text{общий вид}$$

$$L_{ij}^u = \left( \frac{\widehat{\rho u_i} \widehat{\rho u_j}}{\bar{\rho}} \right) - \frac{\widehat{\rho u_i} \widehat{\rho u_j}}{\hat{\rho}} - \frac{1}{M_a^2} \left( \widehat{\bar{B}_i \bar{B}_j} - \hat{B}_i \hat{B}_j \right)$$

$$M_{ij}^u = \alpha_{ij}^u \left( \hat{S}_{ij}^u - \frac{\delta_{ij}}{3} \hat{S}_{kk} \right) - \alpha_{ij}^u \left( \widetilde{S}_{ij}^u - \frac{\delta_{ij}}{3} \widetilde{S}_{kk} \right)$$

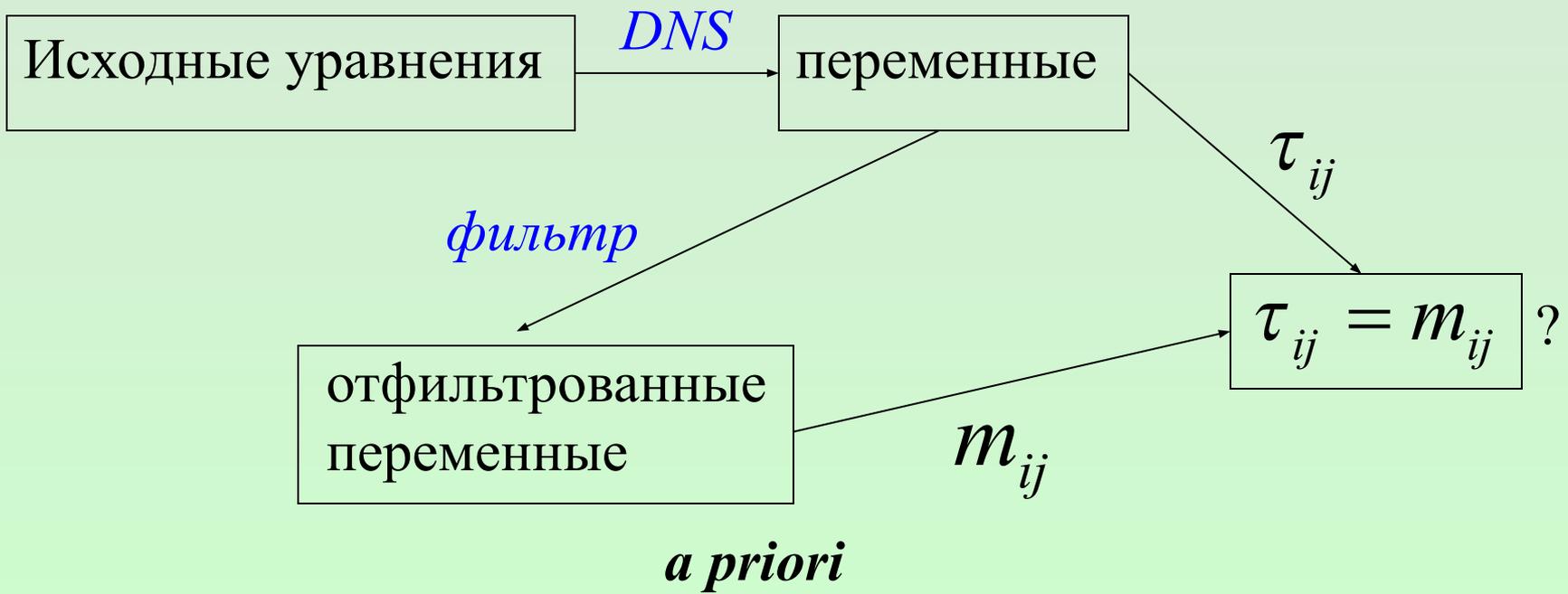
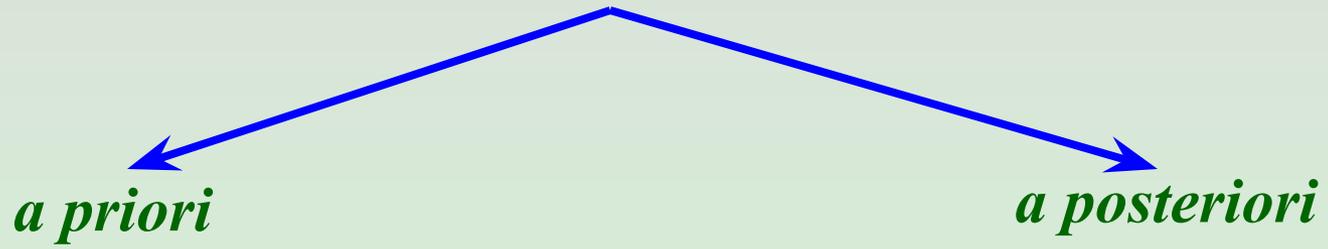
*Угловые скобки  
обозначают  
пространственное  
усреднение*

**Метод  
наименьших  
квадратов**

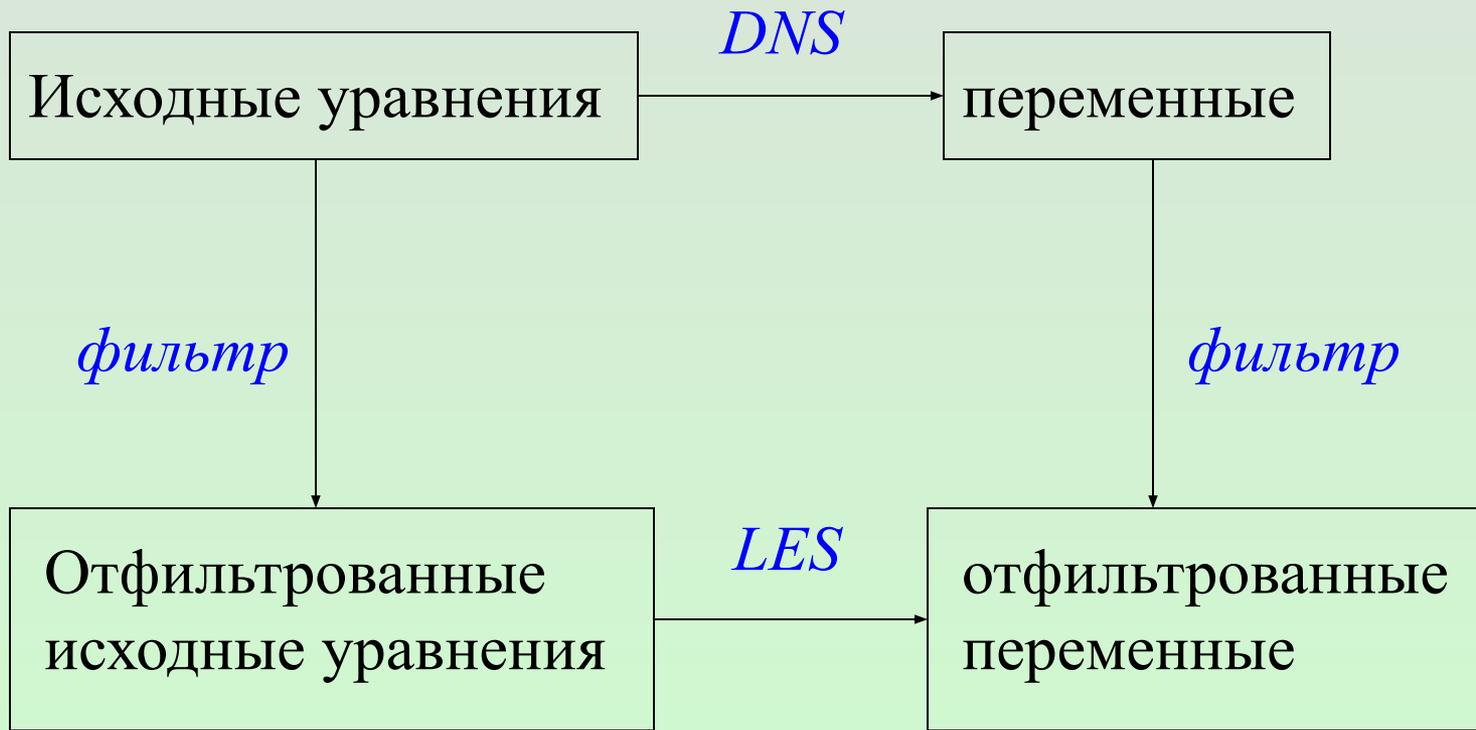
$$Z^u = \langle \langle (T_{ij}^u - \tau_{ij}^u - L_{ij}^u)^2 \rangle \rangle$$

$$C_s = \frac{\langle L_{ij}^u M_{ij}^u \rangle}{\langle M_{ij}^u M_{ij}^u \rangle}$$

# Тестовые методы для LES -1



# Тестовые методы для LES - 2



*a posteriori*