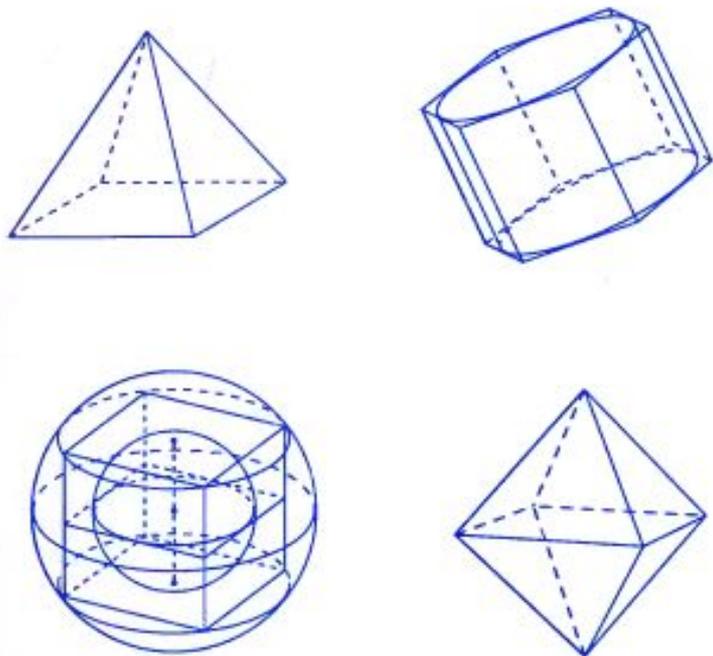


Смирнов В. А.

ГЕОМЕТРИЯ



Стереометрия

РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ТОСКАМИ

уровень А,В

часть 1

задачи

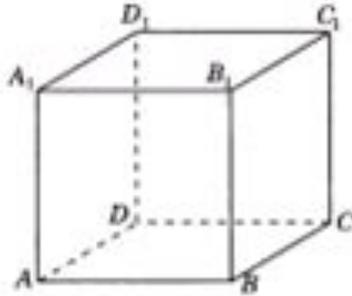
№1-3.№5.№7,9.№10-11.№13,15.№18.№26.№28.Свойства правильного треугольникаСвойства правильного
четырёхугольникаСвойства правильного
шестиугольника

РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ТОЧКАМИ



№1,2,3

1. Найдите диагональ куба, все ребра которого равны $\sqrt{3}$.



№1

Напоминалка

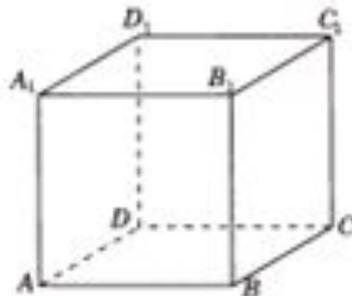
диагональ квадрата больше стороны в $\sqrt{2}$ раз

диагональ куба больше стороны в $\sqrt{3}$ раз

РЕШЕНИЕ

$$d = a\sqrt{3} \Rightarrow AC_1 = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3$$

2. Найдите ребро куба, диагональ которого равна $\sqrt{3}$.



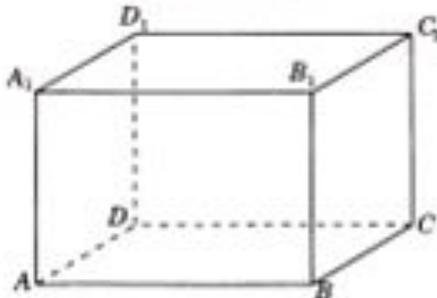
№2

сторона куба в $\sqrt{3}$ раз меньше диагонали

РЕШЕНИЕ

$$a = d : \sqrt{3} \Rightarrow AB = \sqrt{3} : \sqrt{3} = 1$$

3. Найдите диагональ прямоугольного параллелепипеда, ребра которого, выходящие из одной вершины, равны 2, 3, 6.



№3

Напоминалка

диагональ прямоугольника находится по сторонам по теореме Пифагора $d = \sqrt{a^2 + b^2}$

диагональ прямоугольного параллелепипеда $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

a, b, c - измерения параллелепипеда
обобщенная теорема Пифагора

РЕШЕНИЕ

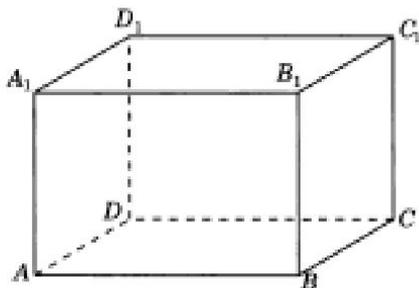
$$d = \sqrt{4 + 9 + 36} = \sqrt{49} = 7$$

РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ТОЧКАМИ

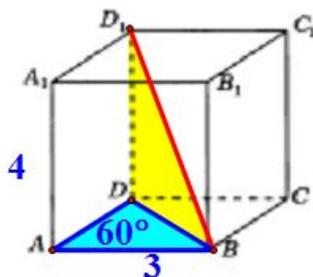
№5



4. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 4 и 6, а его диагональ равна 14. Найдите третье ребро, выходящее из той же вершины.



5. Основанием прямой четырехугольной призмы является ромб со стороной 3 и острым углом 60° . Боковое ребро равно 4. Найдите меньшую диагональ призмы.

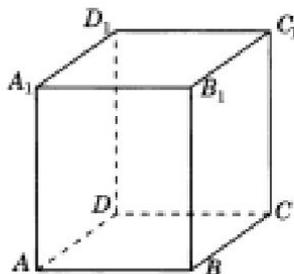


Искомый отрезок меньшая диагональ BD_1

шаг 1 $\triangle ABD$ p/c $\Rightarrow DB=3$

шаг 2 $\triangle BDD_1$ прямоугольный $\Rightarrow BD_1 = \sqrt{9+16} = 5$

6. Основанием прямой четырехугольной призмы является ромб со стороной 6 и острым углом 60° . Меньшая диагональ призмы равна 10. Найдите боковое ребро.

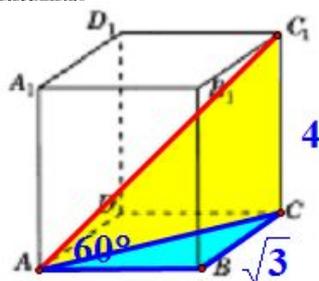


РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ТОЧКАМИ

№7,9



7. Основанием прямой четырехугольной призмы является ромб со стороной $\sqrt{3}$ и острым углом 60° . Боковое ребро равно 4. Найдите большую диагональ призмы.



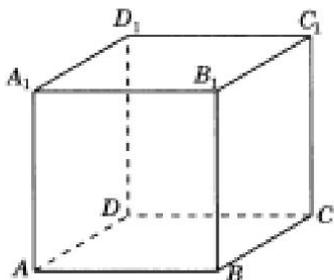
№7

Искомый отрезок большая диагональ AC_1

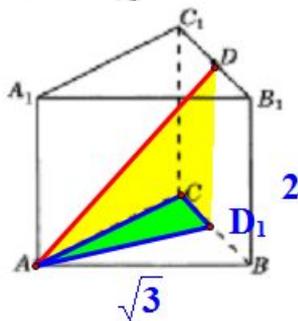
шаг 1 $\triangle ABC$ равнобедренный с углом $120^\circ \Rightarrow$
 $AC = \sqrt{\sqrt{3}^2 + \sqrt{3}^2 - 2\sqrt{3}\sqrt{3}\cos 120^\circ} = \sqrt{3+3+3} = 3$

шаг 2 $\triangle ACC_1$ прямоугольный $\Rightarrow AC_1 = \sqrt{9+16} = 5$

8. Основанием прямой четырехугольной призмы является ромб с острым углом 60° . Боковое ребро равно 1, а большая диагональ — 2. Найдите сторону основания призмы.



9. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны оснований равны $\sqrt{3}$, боковые ребра равны 2. Точка D — середина ребра B_1C_1 . Найдите расстояние между точками A и D .



№9

Искомый отрезок AD

шаг 1 $\triangle ABC$ p/c $\Rightarrow AD_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}$ высота p/c треугольника

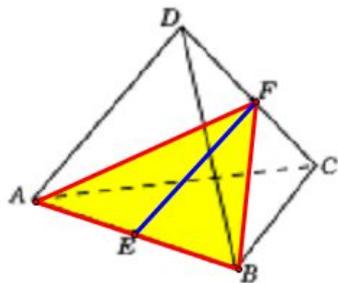
шаг 2 $\triangle ADD_1$ прямоугольный $\Rightarrow AD = \sqrt{2,25+4} = 2,5$

РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ТОЧКАМИ



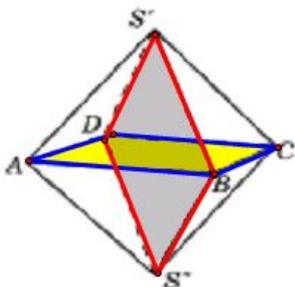
№10,11

10. В правильном тетраэдре $ABCD$, ребра которого равны $\sqrt{2}$, найдите расстояние между серединами противоположных ребер AB и CD .



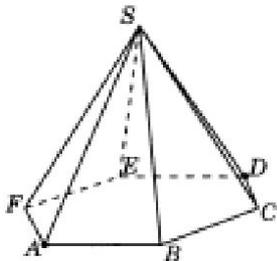
№10

11. Найдите расстояние между противоположными вершинами октаэдра, ребра которого равны $\sqrt{2}$.



№11

12. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, найдите расстояние между точками A и D .



Искомый отрезок EF – высота р/б

1. $\triangle AFB$; $\triangle ACD$

$$BF = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}; \quad AF = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

2. $\triangle AFB$ – равнобедренный;

$$\triangle EFB \text{ – прямоугольный } (\angle E = 90^\circ; \quad BF = \frac{\sqrt{6}}{2}; \quad BE = \frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$EF = \sqrt{BF^2 - BE^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{6}{4} - \frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1$$

Расстояние между противоположными вершинами $S'S''$ равно диагонали квадрата $ABCD$

$\triangle ABCD$ – квадрат

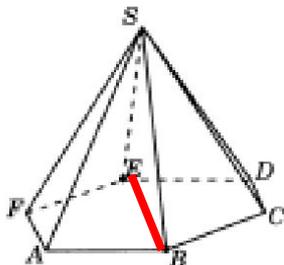
$$AC = a\sqrt{2} = \sqrt{2}\sqrt{2} = 2$$

РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ТОЧКАМИ



№13,15

13. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, найдите расстояние между точками B и E .

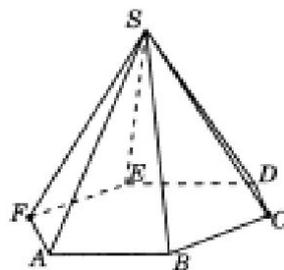


№13

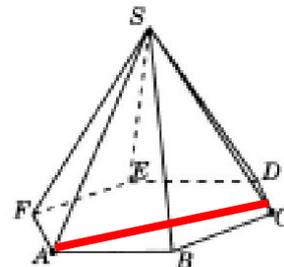
BE – большая диагональ
правильного шестиугольника

$$BE = 2a = 2 \cdot 1 = 2$$

14. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, найдите расстояние между точками C и F .



15. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, найдите расстояние между точками A и C .



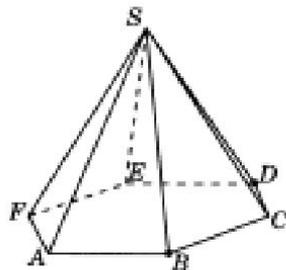
№15

AC – малая диагональ
правильного шестиугольника

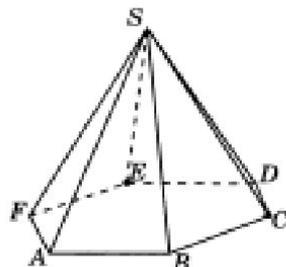
$$AC = a\sqrt{3} = 1 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3}$$



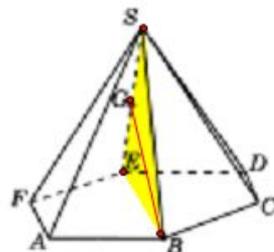
16. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, найдите расстояние между точками B и D .



17. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, найдите расстояние между точками C и E .



18. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, точка G — середина ребра SE . Найдите расстояние между точками B и G .



№18

Искомый отрезок EG – высота р/с $\triangle SBE$

1. BE – большая диагональ
правильного шестиугольника

$$BE = 2a = 2 \cdot 1 = 2$$

2. $\triangle BES$ – равносторонний

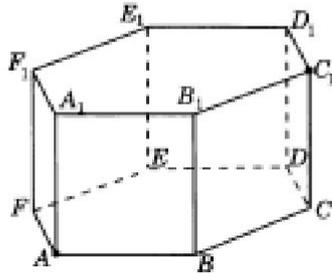
$$BG = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ТОЧКАМИ

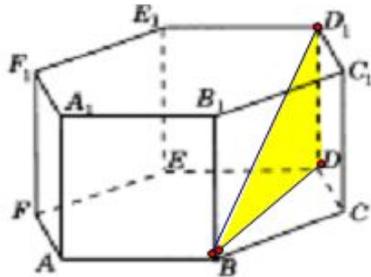
№26



25. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между точками A и C_1 .

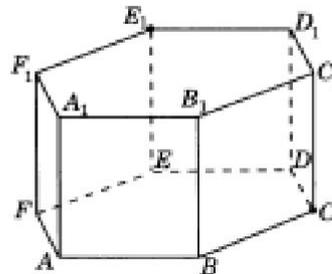


26. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между точками B и D_1 .



№26

27. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между точками C и E_1 .



1. BD – меньшая диагональ правильного шестиугольника

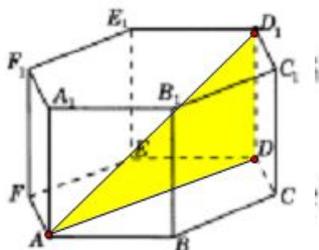
$$BD = a\sqrt{3} = 1 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3}$$

2. $\triangle BDD_1$ – прямоугольный

$$BD_1 = \sqrt{BD^2 + DD_1^2} = \sqrt{3+1} = 2$$



28. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны $\sqrt{5}$, найдите расстояние между точками A и D_1 .



№28

1. AD – большая диагональ правильного шестиугольника

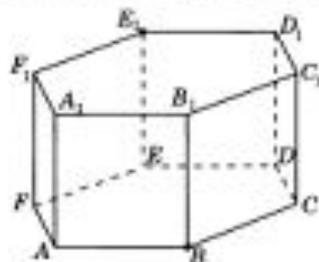
$$AD = 2a = 2 \cdot \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

2. $\triangle ADD_1$ – прямоугольный

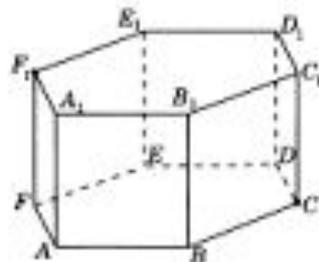
$$AD_1 = \sqrt{AD^2 + DD_1^2}$$

$$AD_1 = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5})^2} = \sqrt{4 \cdot 5 + 5} = 5$$

29. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны $\sqrt{5}$, найдите расстояние между точками B и E_1 .

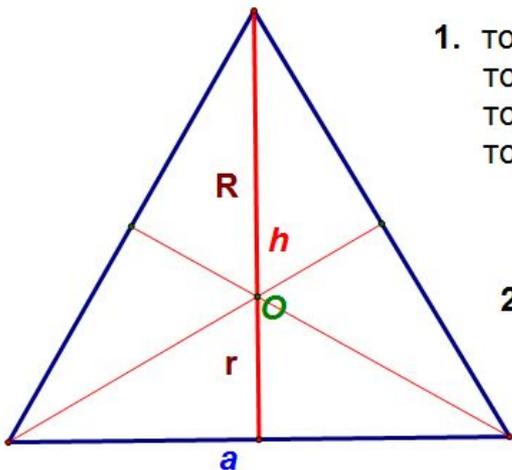


30. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны $\sqrt{5}$, найдите расстояние между точками C и F_1 .



Свойства треугольника

Свойства правильного треугольника

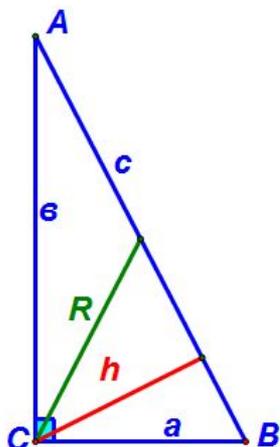


1. точка пересечения медиан (центр тяжести)
 точка пересечения биссектрис (центр вписанной окружности)
 точка пересечения серединных перпендикуляров (центр описанной окружности)
 точка пересечения высот (ортоцентр)

Все эти центры совпадают

$$2. \quad h = \frac{a\sqrt{3}}{2}; \quad S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}; \quad R = 2r; \quad r = \frac{a\sqrt{3}}{6}; \quad R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Свойства прямоугольного треугольника



1. Теорема Пифагора $c^2 = a^2 + b^2$

2. $\sin A = \frac{\text{противолежащий катет}}{\text{гипотенуза}}$

$$\cos A = \frac{\text{прилежащий катет}}{\text{гипотенуза}}$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{\text{противолежащий катет}}{\text{прилежащий катет}}$$

3. $S = \frac{ab}{2}; \quad S = \frac{ch}{2}$

4. Медиана, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы и равна радиусу описанной окружности

Центр описанной окружности лежит на середине гипотенузы

5. Формула связи радиуса вписанной окружности и сторон треугольника $r = \frac{a + b - c}{2}$

6. Формулы связи сторон и углов

треугольника

$$a = c \cdot \sin A = b \cdot \operatorname{tg} A = c \cdot \cos B = b \cdot \operatorname{ctg} B$$

$$b = c \cdot \sin B = a \cdot \operatorname{tg} B = c \cdot \cos A = a \cdot \operatorname{ctg} A$$

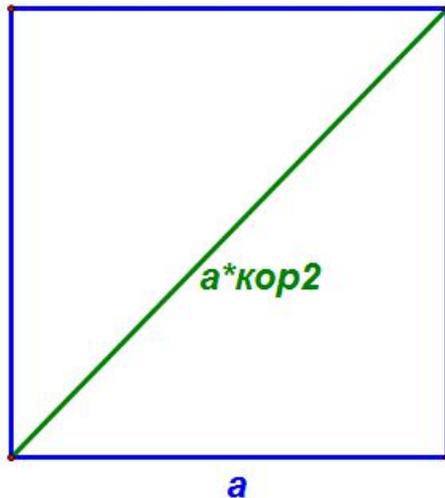
$$c = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\cos A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\cos B}$$

Свойства правильного четырехугольника



Свойства правильного четырехугольника

равных



1. диагоналями разбивается на 2 прямоугольных равнобедренных треугольника

2. диагональ в $\sqrt{2}$ раз больше стороны
сторона в $\sqrt{2}$ раз меньше диагонали

3. $S = a^2$; $S = \frac{d^2}{2}$

4. Формулы связи радиусов вписанной и описанной окружностей и стороны квадрата

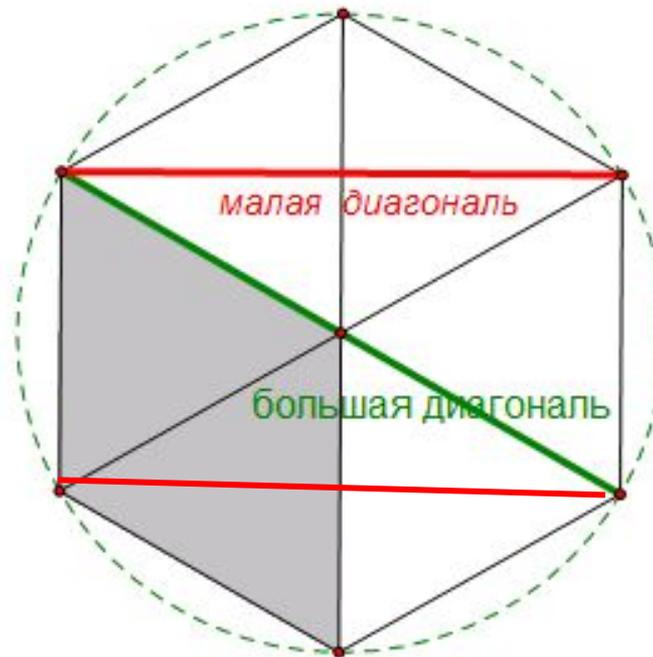
$$r = \frac{a}{2} \quad R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

5. Диагонали равны, взаимно перпендикулярны, являются биссектрисами углов, точкой пересечения делятся пополам

Свойства правильного шестиугольника



1. сторона равна радиусу описанной окружности
2. диагоналями разбивается на 6 равносторонних треугольников
3. все внутренние углы по 120°
4. большая диагональ в 2 раза больше стороны
5. малая диагональ в $\sqrt{3}$ раз больше стороны
6. малая диагональ делит большую в отношении 1:3
7. все ромбы
 - с углом 60° и 120°
 - меньшей диагональю, равной стороне
 - большей диагональю, равной $a\sqrt{3}$



8. Параллельные малые диагонали «вырезают» прямоугольник во сторонами a и $a\sqrt{3}$