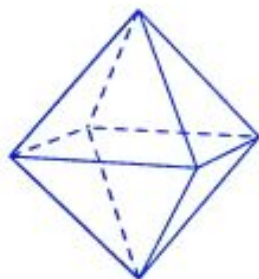
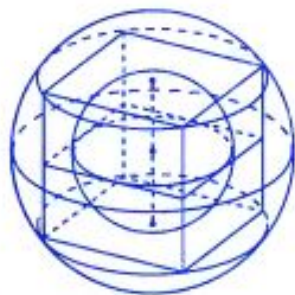
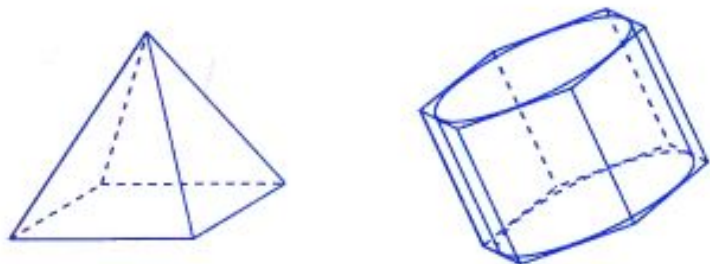


Смирнов В. А.

## ГЕОМЕТРИЯ



## Стереометрия

# РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ТОСКАМИ уровень А,В

## часть 1

### задачи

№1-3.

№5.

№7,9.

№10-11.

№13,15.

№18.

№26.

№28.

Свойства правильного треугольника

Свойства правильного  
четырёхугольника

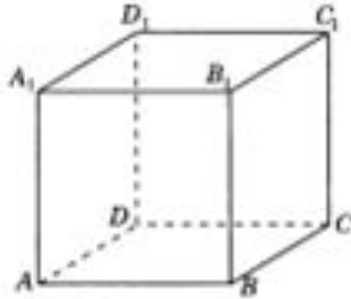
Свойства правильного  
шестиугольника

# РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ТОЧКАМИ



## №1,2,3

1. Найдите диагональ куба, все ребра которого равны  $\sqrt{3}$ .



№1

**Напоминалка**

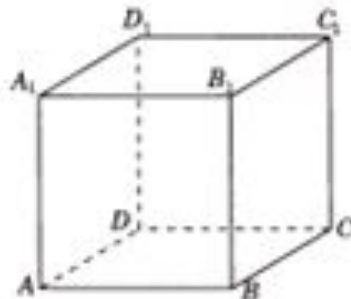
диагональ квадрата больше стороны в  $\sqrt{2}$  раз

диагональ куба больше стороны в  $\sqrt{3}$  раз

**РЕШЕНИЕ**

$$d = a \cdot \sqrt{3} \Rightarrow AC_1 = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3$$

2. Найдите ребро куба, диагональ которого равна  $\sqrt{3}$ .



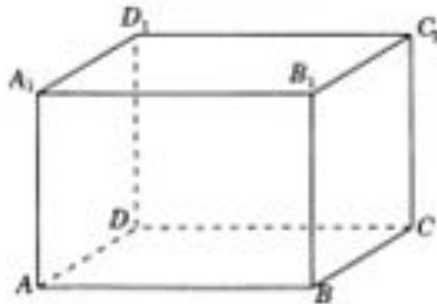
№2

сторона куба в  $\sqrt{3}$  раз меньше диагонали

**РЕШЕНИЕ**

$$a = d : \sqrt{3} \Rightarrow AB = \sqrt{3} : \sqrt{3} = 1$$

3. Найдите диагональ прямоугольного параллелепипеда, ребра которого, выходящие из одной вершины, равны 2, 3, 6.



№3

**Напоминалка**

диагональ прямоугольника находится по сторонам по теореме Пифагора  $d = \sqrt{a^2 + b^2}$

диагональ прямоугольного параллелепипеда  $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

a, b, c - измерения параллелепипеда  
обобщенная теорема Пифагора

**РЕШЕНИЕ**

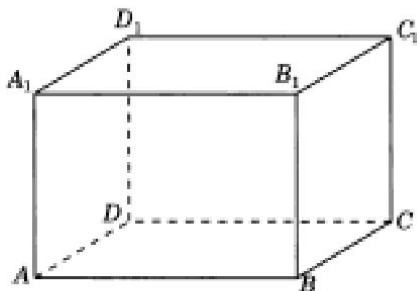
$$d = \sqrt{4 + 9 + 36} = \sqrt{49} = 7$$

# РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ТОЧКАМИ

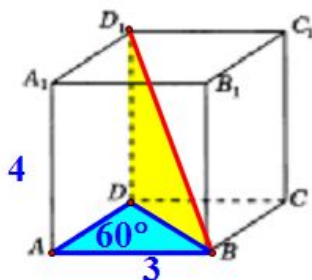
№5



4. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 4 и 6, а его диагональ равна 14. Найдите третье ребро, выходящее из той же вершины.



5. Основанием прямой четырехугольной призмы является ромб со стороной 3 и острым углом  $60^\circ$ . Боковое ребро равно 4. Найдите меньшую диагональ призмы.

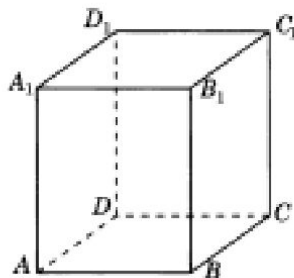


**Искомый отрезок**      меньшая диагональ  $BD_1$

**шаг 1**  $\triangle ABD$  p/c  $\Rightarrow DB=3$

**шаг 2**  $\triangle BDD_1$  прямоугольный  $\Rightarrow BD_1 = \sqrt{9+16} = 5$

6. Основанием прямой четырехугольной призмы является ромб со стороной 6 и острым углом  $60^\circ$ . Меньшая диагональ призмы равна 10. Найдите боковое ребро.

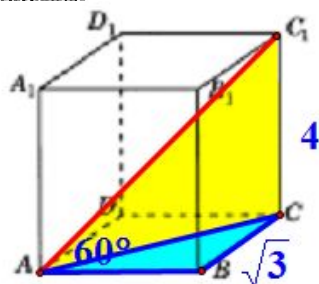


# РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ТОЧКАМИ

## №7,9



7. Основанием прямой четырехугольной призмы является ромб со стороной  $\sqrt{3}$  и острым углом  $60^\circ$ . Боковое ребро равно 4. Найдите большую диагональ призмы.



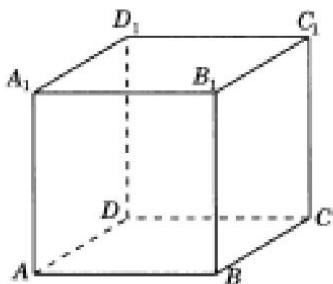
№7

**Искомый отрезок** большая диагональ  $AC_1$

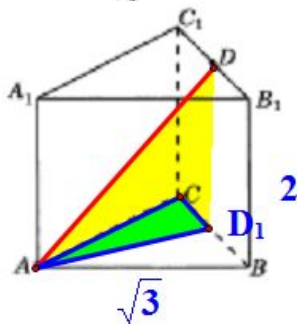
**шаг 1**  $\triangle ABC$  равнобедренный с углом  $120^\circ \Rightarrow$   
 $AC = \sqrt{\sqrt{3}^2 + \sqrt{3}^2 - 2\sqrt{3}\sqrt{3}\cos 120^\circ} = \sqrt{3+3+3} = 3$

**шаг 2**  $\triangle ACC_1$  прямоугольный  $\Rightarrow AC_1 = \sqrt{9+16} = 5$

8. Основанием прямой четырехугольной призмы является ромб с острым углом  $60^\circ$ . Боковое ребро равно 1, а большая диагональ — 2. Найдите сторону основания призмы.



9. В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$  стороны оснований равны  $\sqrt{3}$ , боковые ребра равны 2. Точка  $D$  — середина ребра  $B_1C_1$ . Найдите расстояние между точками  $A$  и  $D$ .



№9

**Искомый отрезок**  $AD$

**шаг 1**  $\triangle ABC$  п/с  $\Rightarrow AD_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}$  высота п/с треугольника

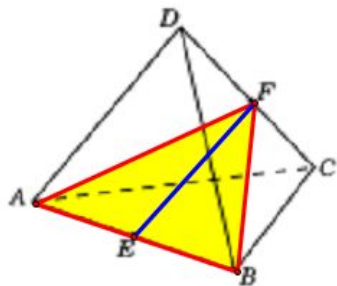
**шаг 2**  $\triangle ADD_1$  прямоугольный  $\Rightarrow AD = \sqrt{2,25+4} = 2,5$

# РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ТОЧКАМИ



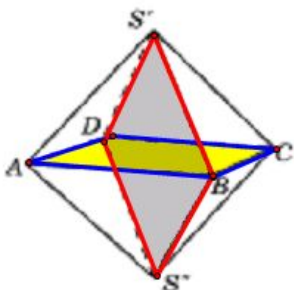
## №10,11

10. В правильном тетраэдре  $ABCD$ , ребра которого равны  $\sqrt{2}$ , найдите расстояние между серединами противоположных ребер  $AB$  и  $CD$ .



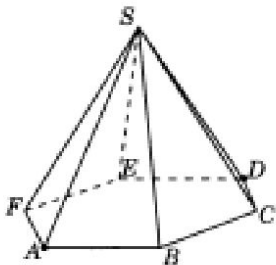
№10

11. Найдите расстояние между противоположными вершинами октаэдра, ребра которого равны  $\sqrt{2}$ .



№11

12. В правильной шестиугольной пирамиде  $SABCDEF$ , стороны основания которой равны 1, найдите расстояние между точками  $A$  и  $D$ .



Искомый отрезок  $EF$  – высота р/б

1.  $\triangle AFB$ ;  $\triangle ACD$

$$BF = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}; \quad AF = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

2.  $\triangle AFB$  – равнобедренный;

$$\triangle EFB \text{ – прямоугольный } (\angle E = 90^\circ; \quad BF = \frac{\sqrt{6}}{2}; \quad BE = \frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$EF = \sqrt{BF^2 - BE^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{6}{4} - \frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1$$

Расстояние между противоположными вершинами  $S'S''$  равно диагонали квадрата  $ABCD$

$\triangle ABCD$  – квадрат

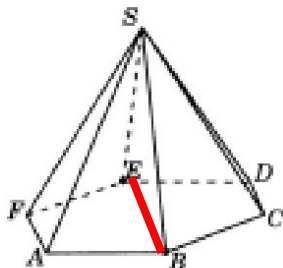
$$AC = a\sqrt{2} = \sqrt{2}\sqrt{2} = 2$$

# РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ТОЧКАМИ



## №13,15

13. В правильной шестиугольной пирамиде  $SABCDEF$ , стороны основания которой равны 1, найдите расстояние между точками  $B$  и  $E$ .

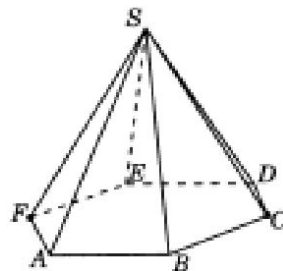


№13

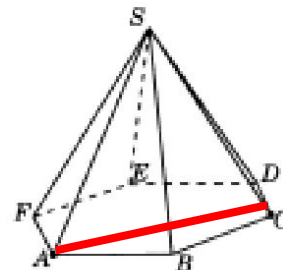
$BE$  – большая диагональ  
правильного шестиугольника

$$BE = 2a = 2 \cdot 1 = 2$$

14. В правильной шестиугольной пирамиде  $SABCDEF$ , стороны основания которой равны 1, найдите расстояние между точками  $C$  и  $F$ .



15. В правильной шестиугольной пирамиде  $SABCDEF$ , стороны основания которой равны 1, найдите расстояние между точками  $A$  и  $C$ .



№15

$AC$  – малая диагональ  
правильного шестиугольника

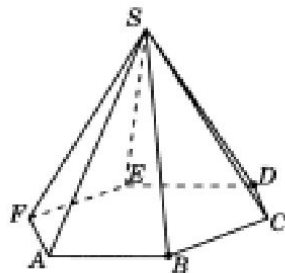
$$AC = a\sqrt{3} = 1 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3}$$

# РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ТОЧКАМИ

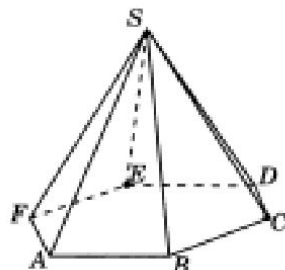
№18



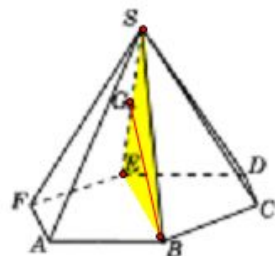
16. В правильной шестиугольной пирамиде  $SABCDEF$ , стороны основания которой равны 1, найдите расстояние между точками  $B$  и  $D$ .



17. В правильной шестиугольной пирамиде  $SABCDEF$ , стороны основания которой равны 1, найдите расстояние между точками  $C$  и  $E$ .



18. В правильной шестиугольной пирамиде  $SABCDEF$ , стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, точка  $G$  — середина ребра  $SE$ . Найдите расстояние между точками  $B$  и  $G$ .



№18

Искомый отрезок  $EG$  – высота р/с  $\triangle SBE$

1.  $BE$  – большая диагональ  
правильного шестиугольника

$$BE = 2a = 2 \cdot 1 = 2$$

2.  $\triangle BES$  – равносторонний

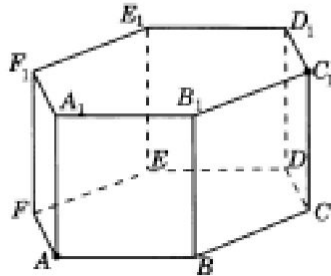
$$BG = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

# РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ТОЧКАМИ

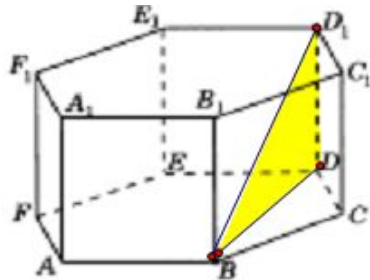
## №26



25. В правильной шестиугольной призме  $A...F_1$ , все ребра которой равны 1, найдите расстояние между точками  $A$  и  $C_1$ .

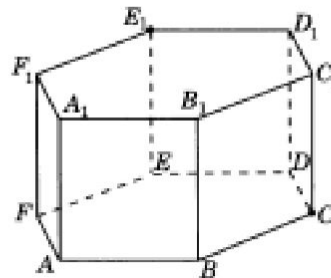


26. В правильной шестиугольной призме  $A...F_1$ , все ребра которой равны 1, найдите расстояние между точками  $B$  и  $D_1$ .



№26

27. В правильной шестиугольной призме  $A...F_1$ , все ребра которой равны 1, найдите расстояние между точками  $C$  и  $E_1$ .



1.  $BD$  – меньшая диагональ правильного шестиугольника

$$BD = a\sqrt{3} = 1 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3}$$

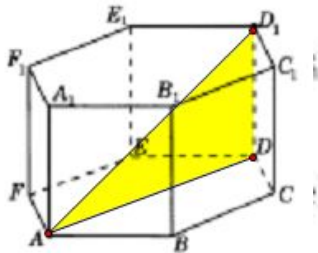
2.  $\triangle BDD_1$  – прямоугольный

$$BD_1 = \sqrt{BD^2 + DD_1^2} = \sqrt{3+1} = 2$$





28. В правильной шестиугольной призме  $A...F_1$ , все ребра которой равны  $\sqrt{5}$ , найдите расстояние между точками  $A$  и  $D_1$ .



№28

1.  $AD$  – большая диагональ правильного шестиугольника

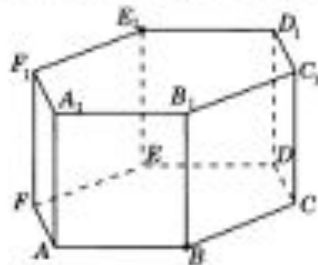
$$AD = 2a = 2 \cdot \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

2.  $\triangle ADD_1$  – прямоугольный

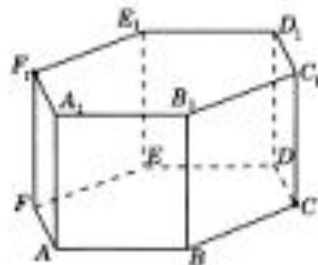
$$AD_1 = \sqrt{AD^2 + DD_1^2}$$

$$AD_1 = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5})^2} = \sqrt{4 \cdot 5 + 5} = 5$$

29. В правильной шестиугольной призме  $A...F_1$ , все ребра которой равны  $\sqrt{5}$ , найдите расстояние между точками  $B$  и  $E_1$ .

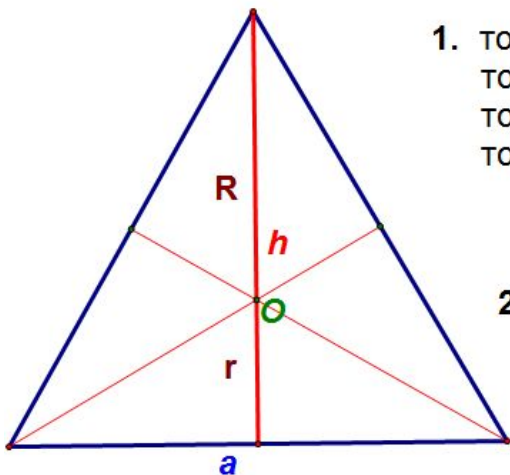


30. В правильной шестиугольной призме  $A...F_1$ , все ребра которой равны  $\sqrt{5}$ , найдите расстояние между точками  $C$  и  $F_1$ .



# Свойства треугольника

## Свойства правильного треугольника

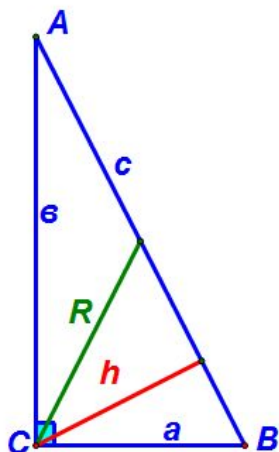


1. точка пересечения медиан (центр тяжести)  
 точка пересечения биссектрис (центр вписанной окружности)  
 точка пересечения серединных перпендикуляров (центр описанной окружности)  
 точка пересечения высот (ортоцентр)

Все эти центры  
совпадают

$$2. \quad h = \frac{a\sqrt{3}}{2}; \quad S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}; \quad R = 2r; \quad r = \frac{a\sqrt{3}}{6}; \quad R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

## Свойства прямоугольного треугольника



1. Теорема Пифагора  $c^2 = a^2 + b^2$

2.  $\sin A = \frac{\text{противолежащий катет}}{\text{гипотенуза}}$

$$\cos A = \frac{\text{прилежащий катет}}{\text{гипотенуза}}$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{\text{противолежащий катет}}{\text{прилежащий катет}}$$

3.  $S = \frac{ab}{2}; \quad S = \frac{ch}{2}$

4. Медиана, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы и равна радиусу описанной окружности

Центр описанной окружности лежит на середине гипотенузы

5. Формула связи радиуса вписанной окружности и сторон треугольника  $r = \frac{a + b - c}{2}$

6. Формулы связи сторон и углов

треугольника

$$a = c \cdot \sin A = b \cdot \operatorname{tg} A = c \cdot \cos B = b \cdot \operatorname{ctg} B$$

$$b = c \cdot \sin B = a \cdot \operatorname{tg} B = c \cdot \cos A = a \cdot \operatorname{ctg} A$$

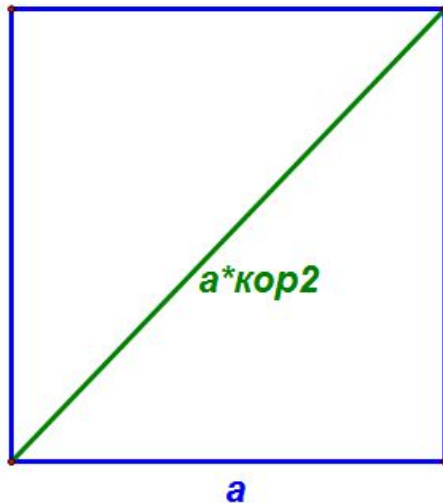
$$c = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\cos A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\cos B}$$

# Свойства правильного четырехугольника



## Свойства правильного четырехугольника

равных



1. диагоналями разбивается на 2 прямоугольных равнобедренных треугольника

2. диагональ в  $\sqrt{2}$  раз больше стороны  
сторона в  $\sqrt{2}$  раз меньше диагонали

3.  $S = a^2$  ;  $S = \frac{d^2}{2}$

4. Формулы связи радиусов вписанной и описанной окружностей и стороны квадрата

$$r = \frac{a}{2} \quad R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

5. Диагонали равны, взаимно перпендикулярны, являются биссектрисами углов, точкой пересечения делятся пополам

# Свойства правильного шестиугольника



1. сторона равна радиусу описанной окружности

2. диагоналями разбивается на 6 равносторонних треугольников

3. все внутренние углы по  $120^\circ$

4. большая диагональ в 2 раза больше стороны

5. малая диагональ в  $\sqrt{3}$  раз больше стороны

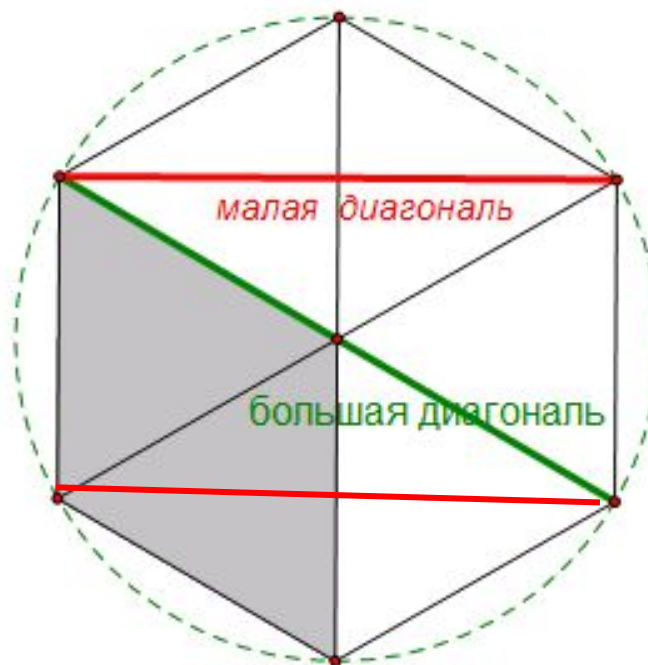
6. малая диагональ делит большую в отношении 1:3

7. все ромбы

--- с углом  $60^\circ$  и  $120^\circ$

--- меньшей диагональю, равной стороне

--- большей диагональю, равной  $a\sqrt{3}$



8. Параллельные малые диагонали «вырезают» прямоугольник во сторонами  $a$  и  $a\sqrt{3}$