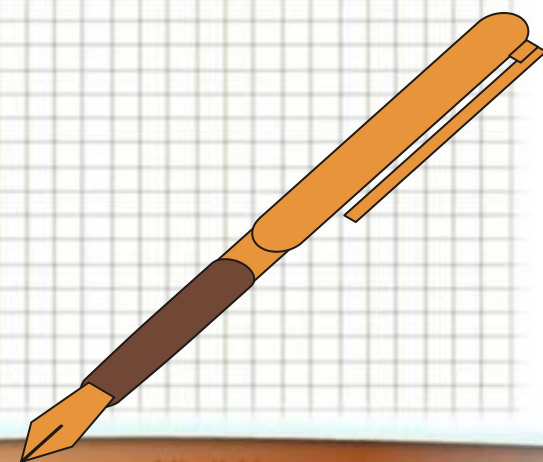




**Урок алгебры и начал анализа по теме**

**«Применение интегрального  
исчисления к решению  
прикладных задач в  
экономике»**

**(11 класс).**



# Здравствуйте!



# Интеграл

Смысл - там, где змеи интеграла  
Меж цифр и букв, меж  $d$  и  $f$ .

В.Я. Брюсов



Таблица  
первообразных

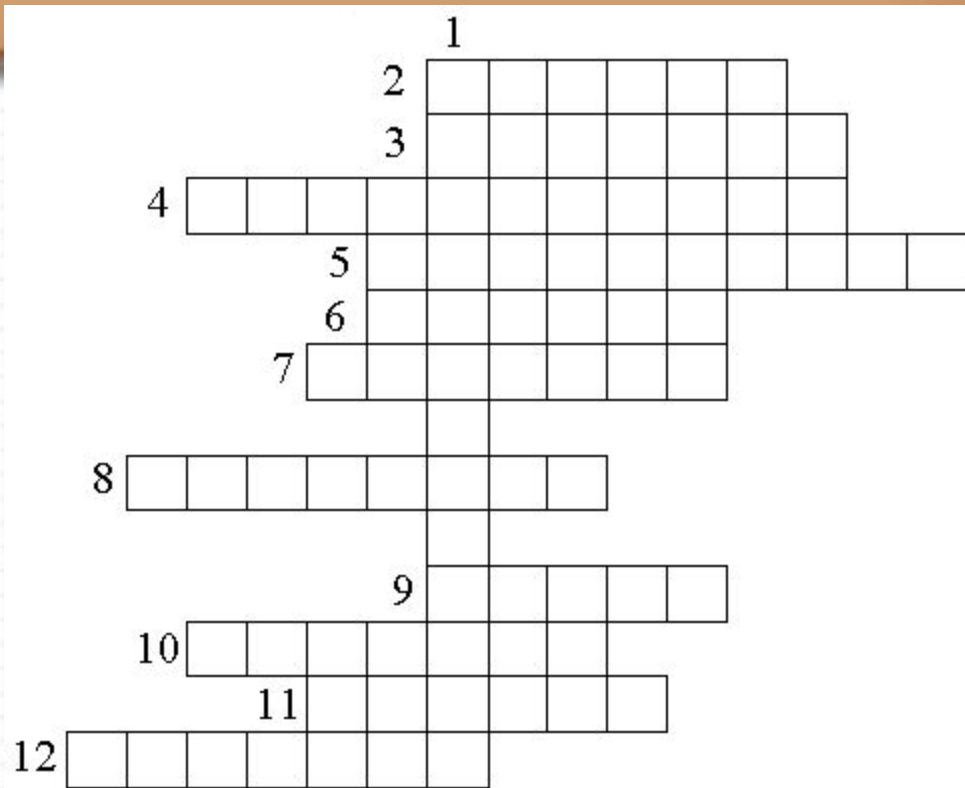
$F(x)$

**Интеграл**

Свойства  
первообразной

$S$  криволинейной  
трапеции

Правила вычисления  
первообразных



1. Как называется функция  $F(x)$  для  $f(x)$ ?

2. Что является графиком функции  $y=kx+b$ ?

3. Самая низкая школьная отметка.

4. Какой урок обычно проходит после изучения темы?

5. Синоним слова дюжина?

6. Есть в каждом слове, у растения и может быть у уравнения.

7. Что можно вычислить при помощи интеграла?

8. Одно из важнейших понятий математики.

9. Форма урока, на котором проводится проверка знаний.

10. Немецкий ученый, в честь которого названа формула, связывающая площадь криволинейной трапеции и интеграл.

11. Множество точек плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты - соответствующим значениям функции.

12. Зависимость между переменными  $X$  и  $Y$ , при которой каждому значению  $X$  соответствует единственное значение  $Y$ , носит название ....



# Верно ли что:

а)

$$\int x^5 dx = 5x^4 + c$$

б)

$$\int x^6 dx = \frac{1}{7} x^7$$



# Верны ли равенства:

$$\text{а) } \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4} \quad \text{б) } \int_0^5 x^2 dx = 2\frac{1}{3} \quad \text{в) } \int_2^4 x^2 dx = 2x$$

$$\text{г) } \int_0^3 5 dx = \frac{5x^2}{2} \Big|_0^3 = \frac{5}{2} (3^2 - 0^2) = \frac{45}{2}$$

$$\text{д) } \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} (1 - 0) = \frac{1}{3}$$





## Найти первообразные для функций:

а)  $f(x) = 10x$

$$F(x) = 5x^2 + C$$

б)  $f(x) = x^2$

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$$

в)  $f(x) = -\sin(2x)$

$$F(x) = 0,5\cos(2x) + C$$

г)  $f(x) = 5\cos x$

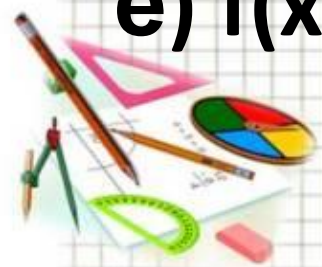
$$F(x) = 5\sin x + C$$

д)  $f(x) = 6x^2$

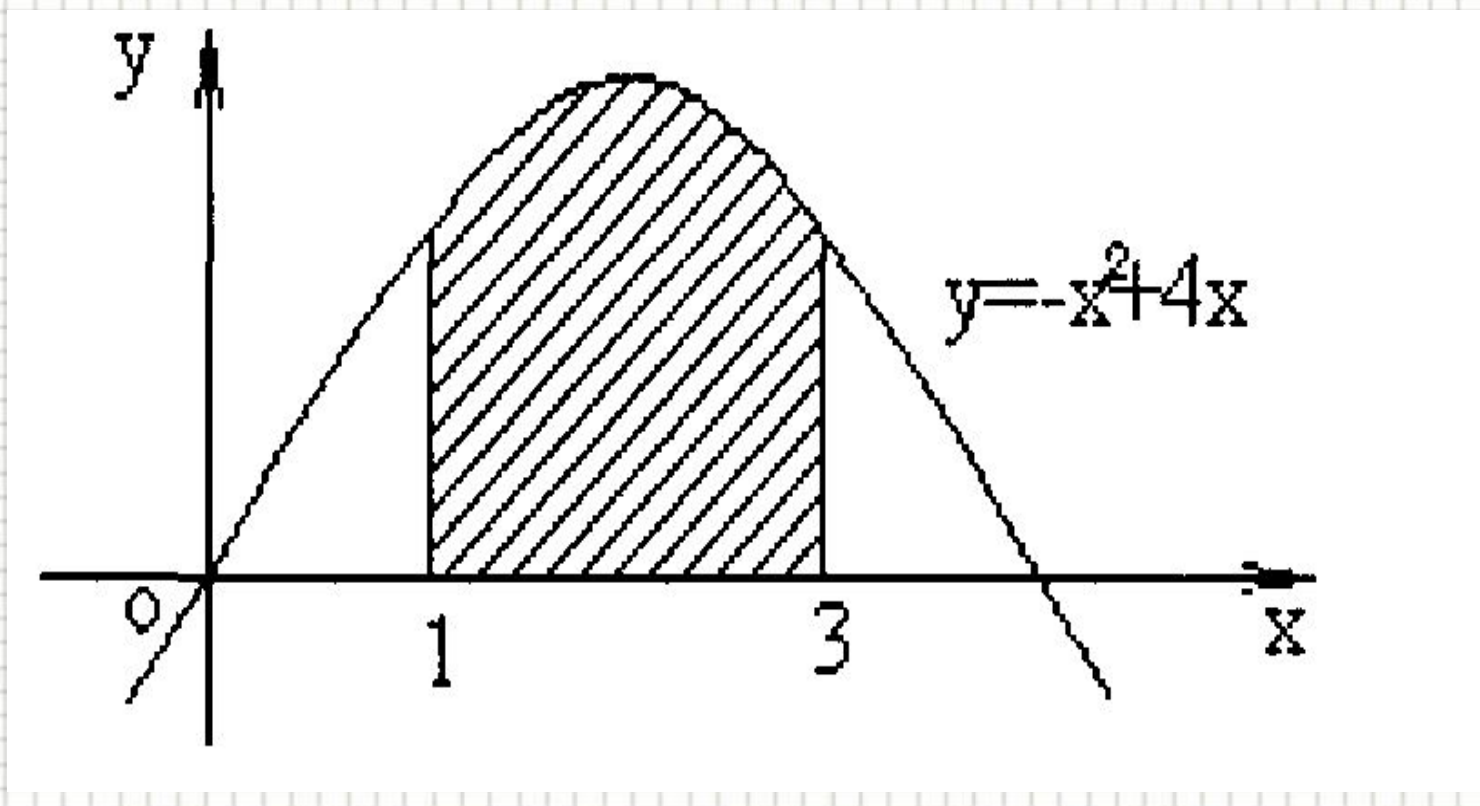
$$F(x) = 2x^3 + C$$

е)  $f(x) = 3$

$$F(x) = 3x + C$$



**Найдите с помощью интеграла  
площадь фигуры изображенной на  
рисунке:**



**Вычисление площади  
плоской фигуры в  
полярных  
координатах**

**Вычисление площади плоской  
фигуры в прямоугольных  
координатах**

**Математика**

**Вычисление  
объема тела  
вращения**

**Вычисление площади  
поверхности тела  
вращения**

**Вычисление длины дуги кривой**

$$A = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx$$

*A* - работа,  
*F* - сила,  
*N* - мощность

*S* - перемещение  
*v* - скорость  
*a* - ускорение

$$v = \int_{t_1}^{t_2} a(t) dt$$

$$A = \int_{t_1}^{t_2} N(t) dt$$

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$$

# Физика

*m* - масса тонкого  
стержня,  
*ρ* - линейная  
плотность

$$q = \int_{t_1}^{t_2} J(t) dt$$

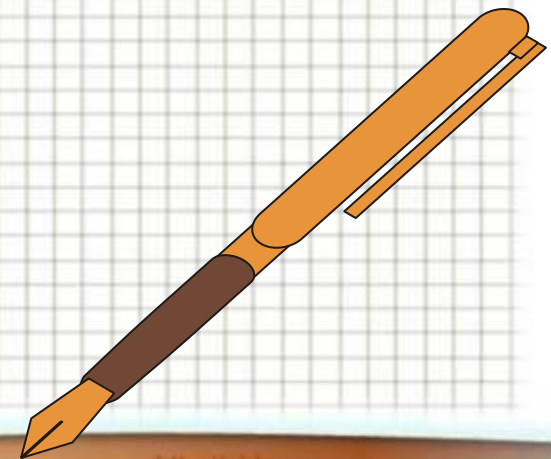
$$m = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x) dx$$

*q* - электрический  
заряд,  
*I* - сила тока

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} c(t) dt$$

*Q* - количество теплоты  
*c* - теплоемкость

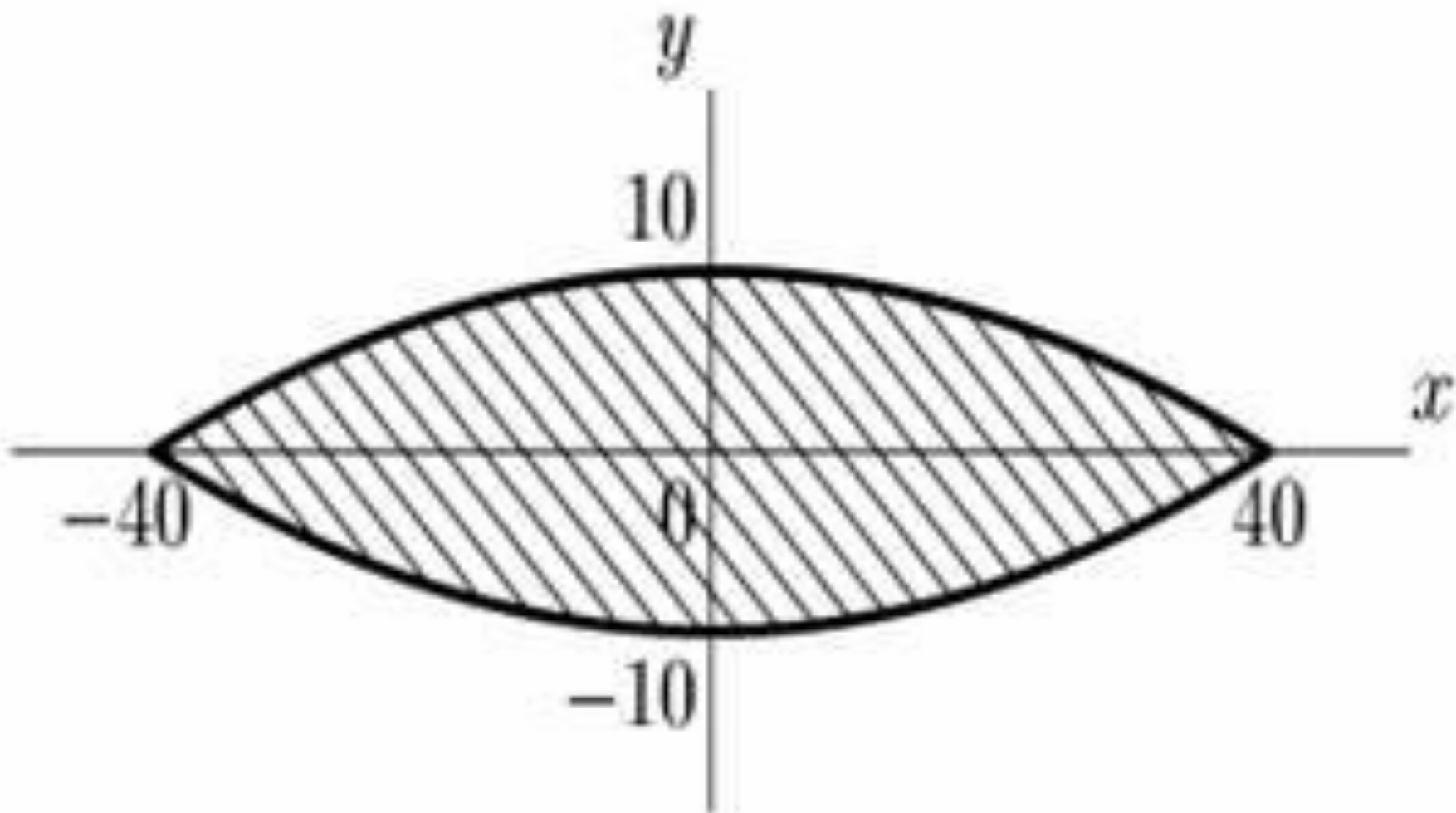
**«Применение интегрального  
исчисления к решению  
прикладных задач в  
экономике»**



## ► Прогнозирование материальных затрат

**Задача.** Палуба корабля напоминает две пересекающиеся параболы. Сколько необходимо краски для ее покрытия, если длина корабля 80 м, ширина в центре – 20 м, а на каждый квадратный метр необходимо 0,25 кг краски.





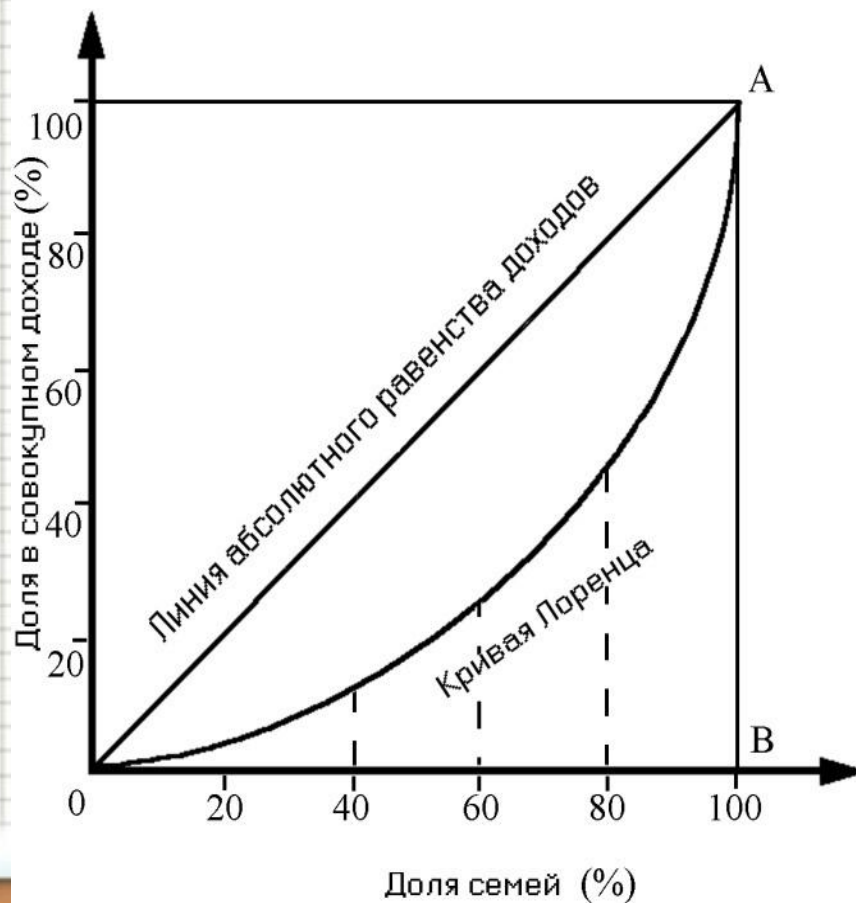
## ► Определения объема выпуска продукции

**Задача.** Определить объем продукции, произведенной рабочим за третий час рабочего дня, если производительность труда характеризуется функцией  $f(t) = 3/(3t + 1) + 4$ .



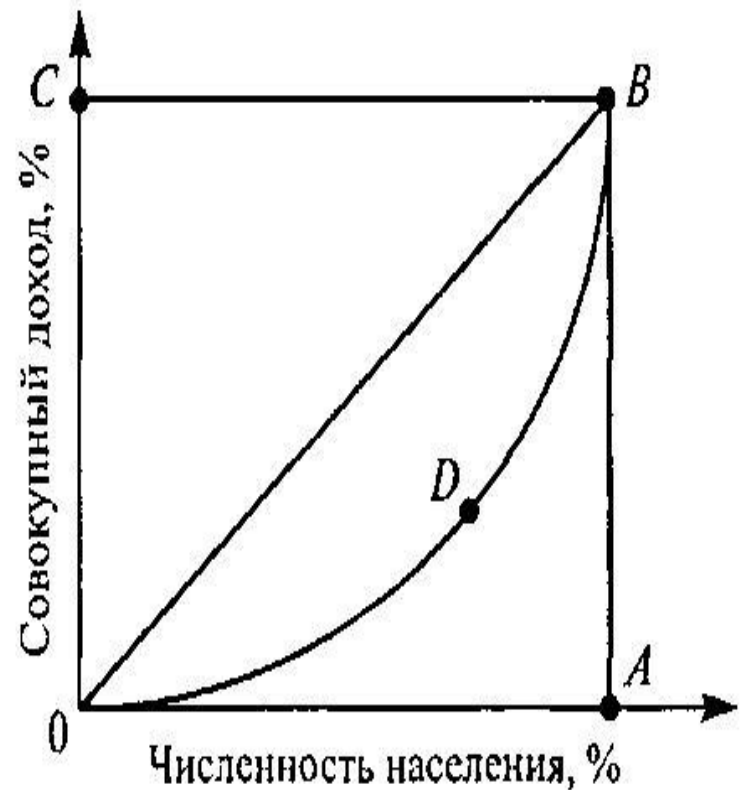


# ► «Кривая Лоренца» и «коэффициент Джини»



# ► «Кривая Лоренца» и «коэффициент Джини»

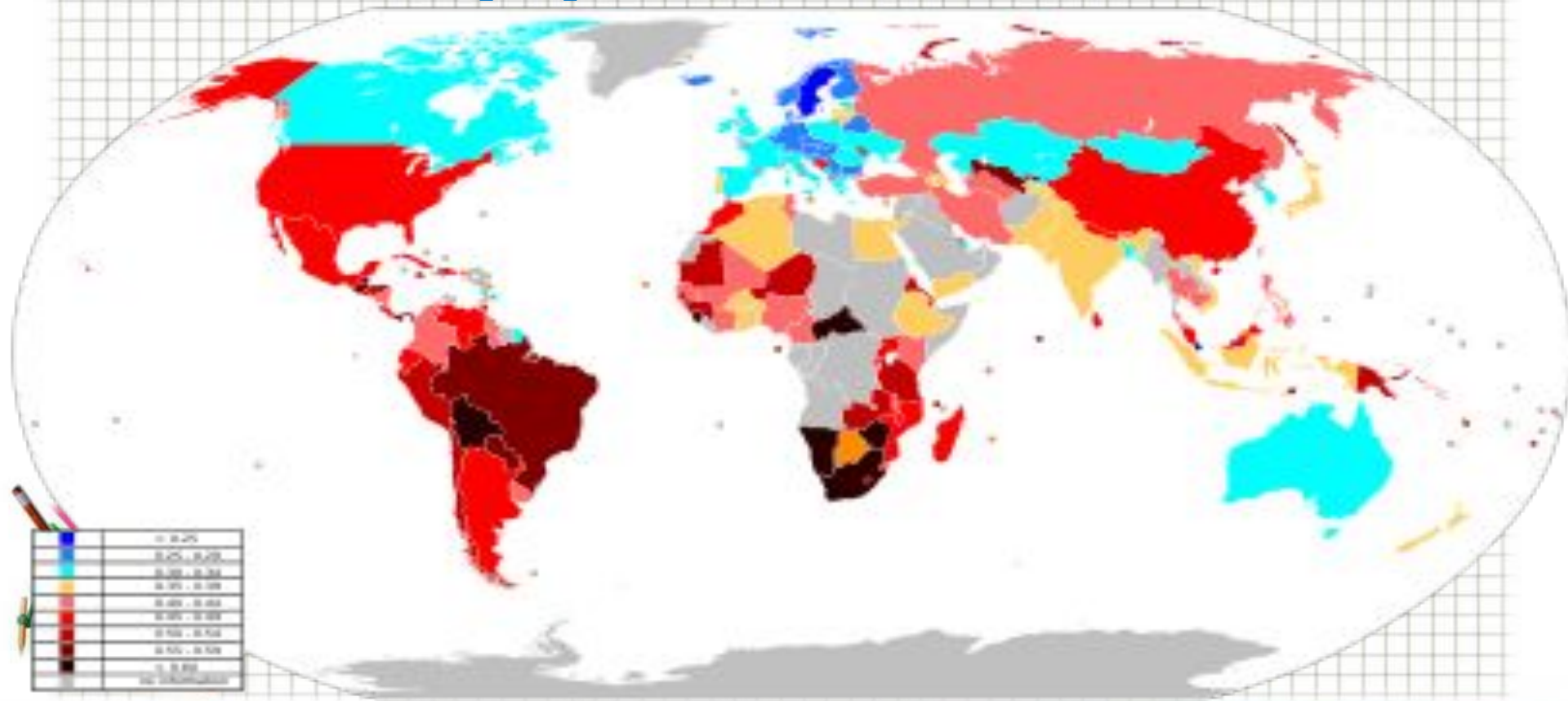
$$G = \frac{S_{ODB}}{S_{OAB}}$$

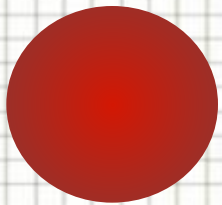


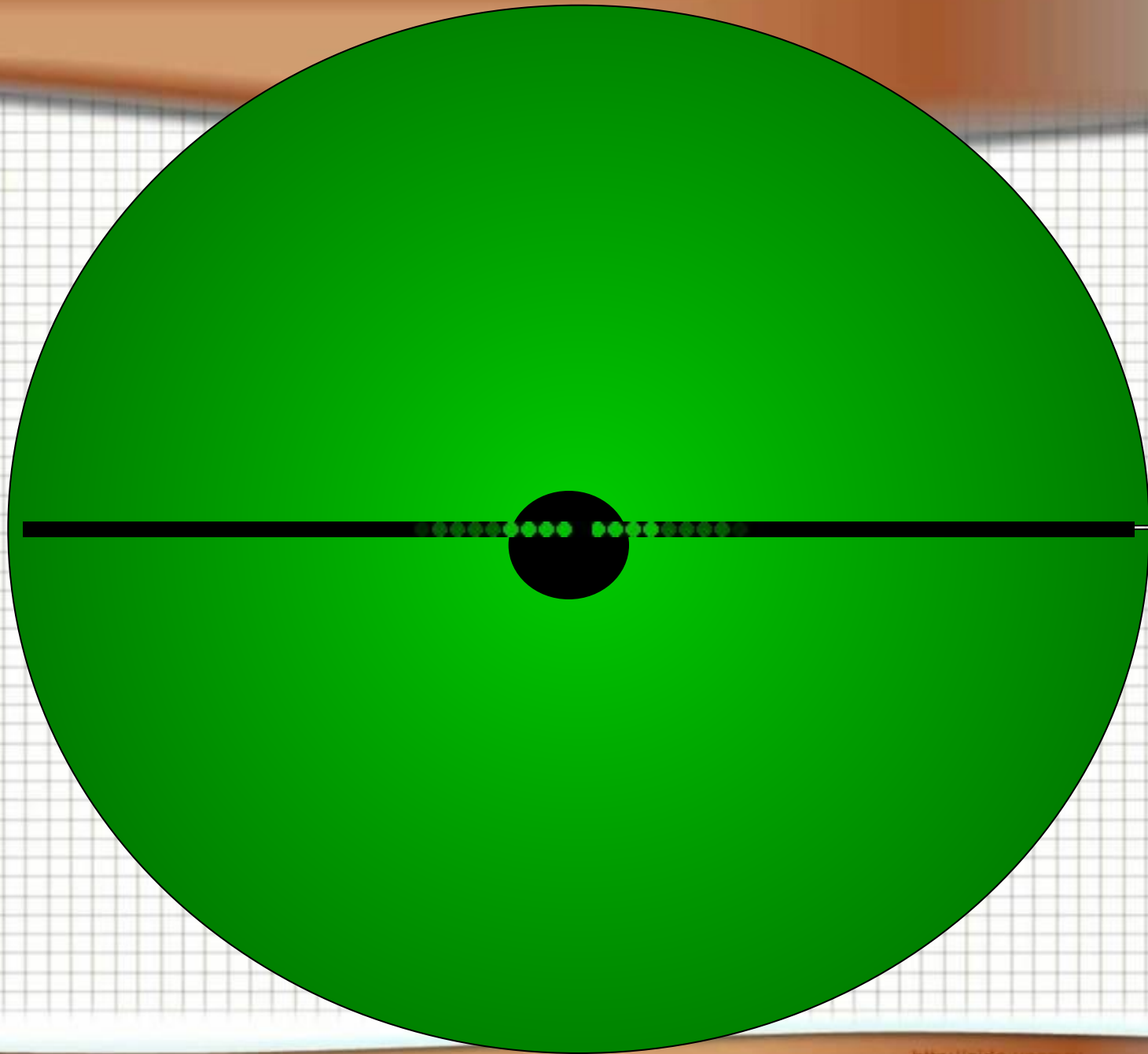
Кривая Лоренца



# ▶ «Кривая Лоренца» и «коэффициент Джини»







► **Нахождение  
потребительск  
ого  
излишка и  
излишка  
производителя**

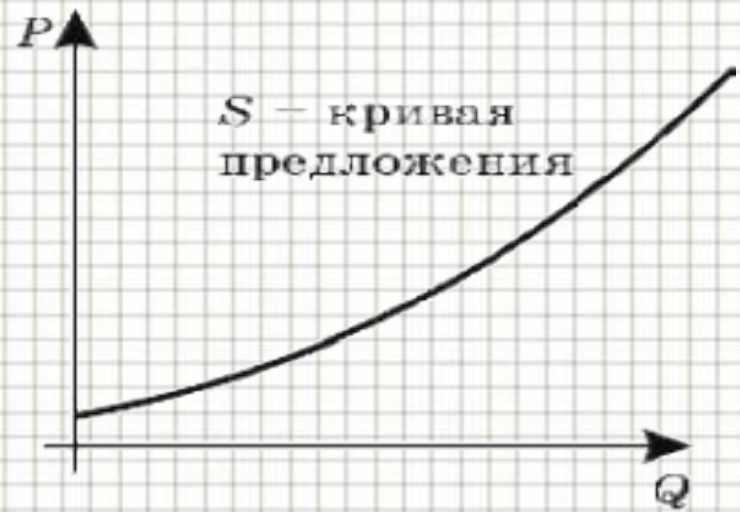
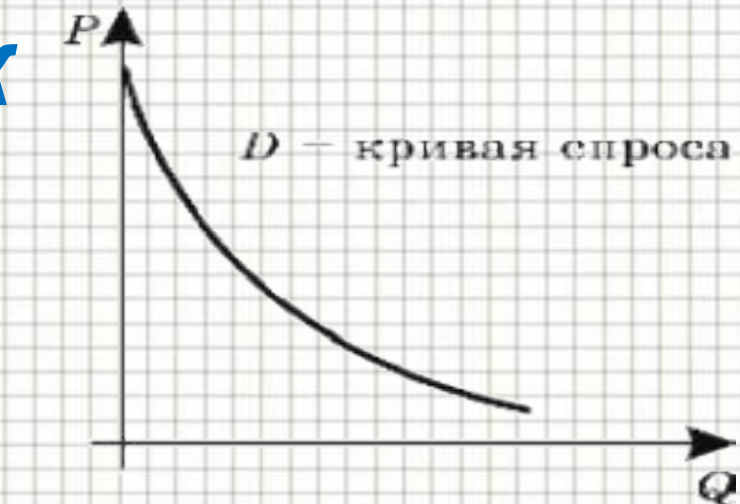


Рис. 1



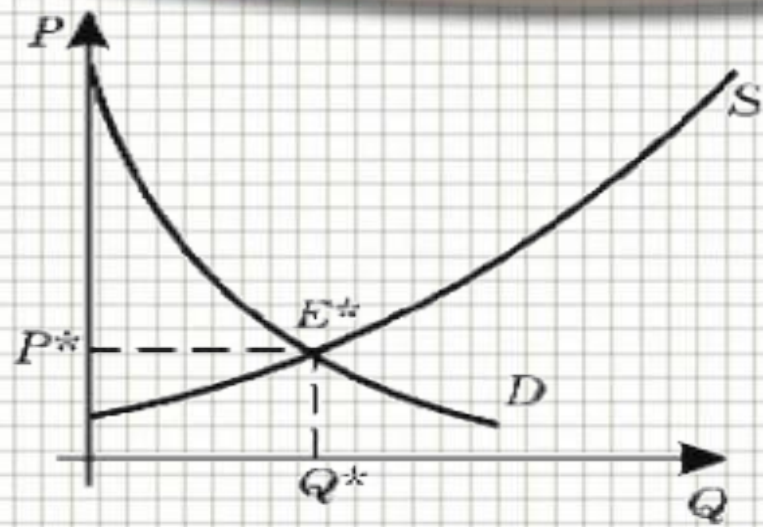


Рис. 2

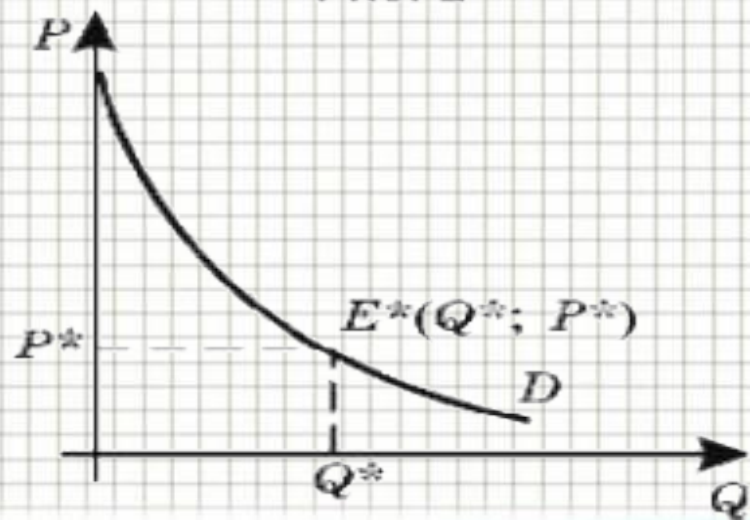


Рис. 3



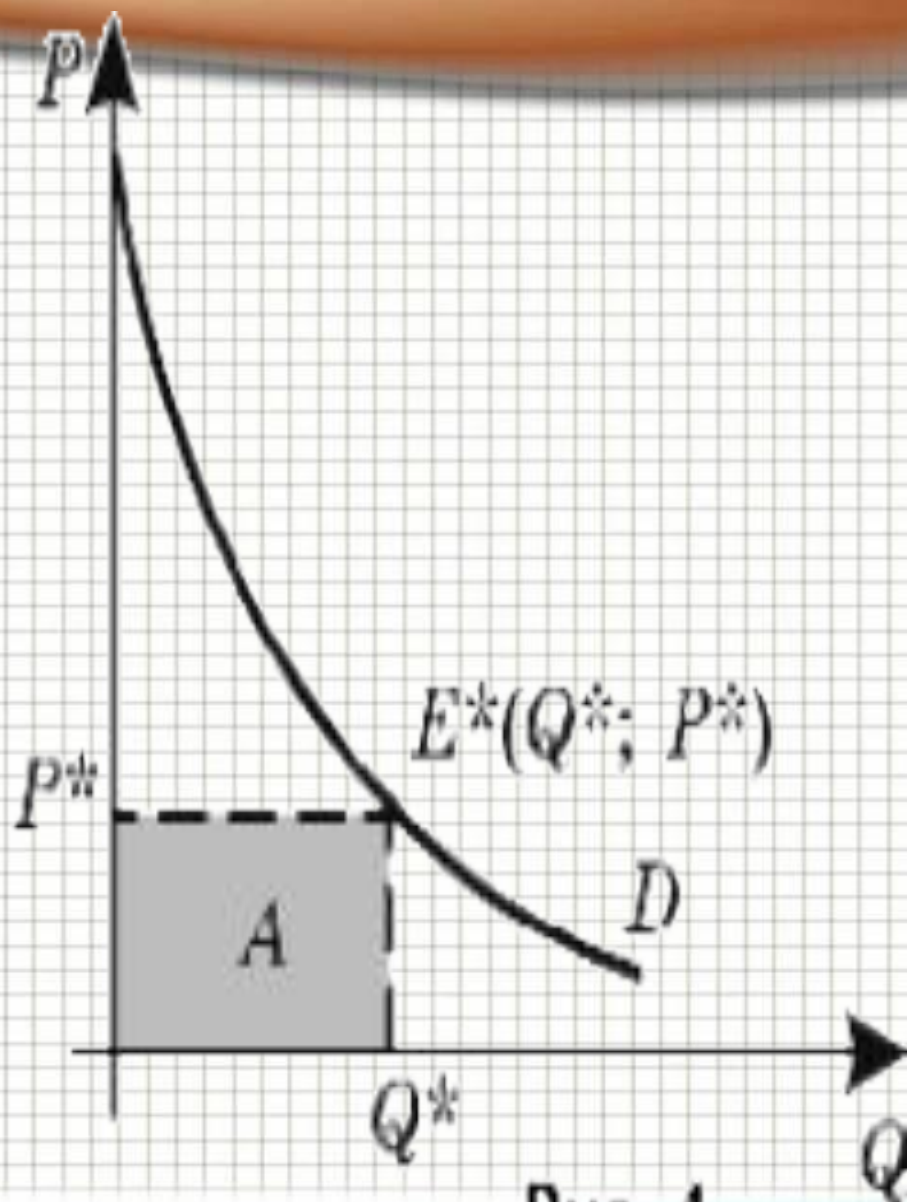
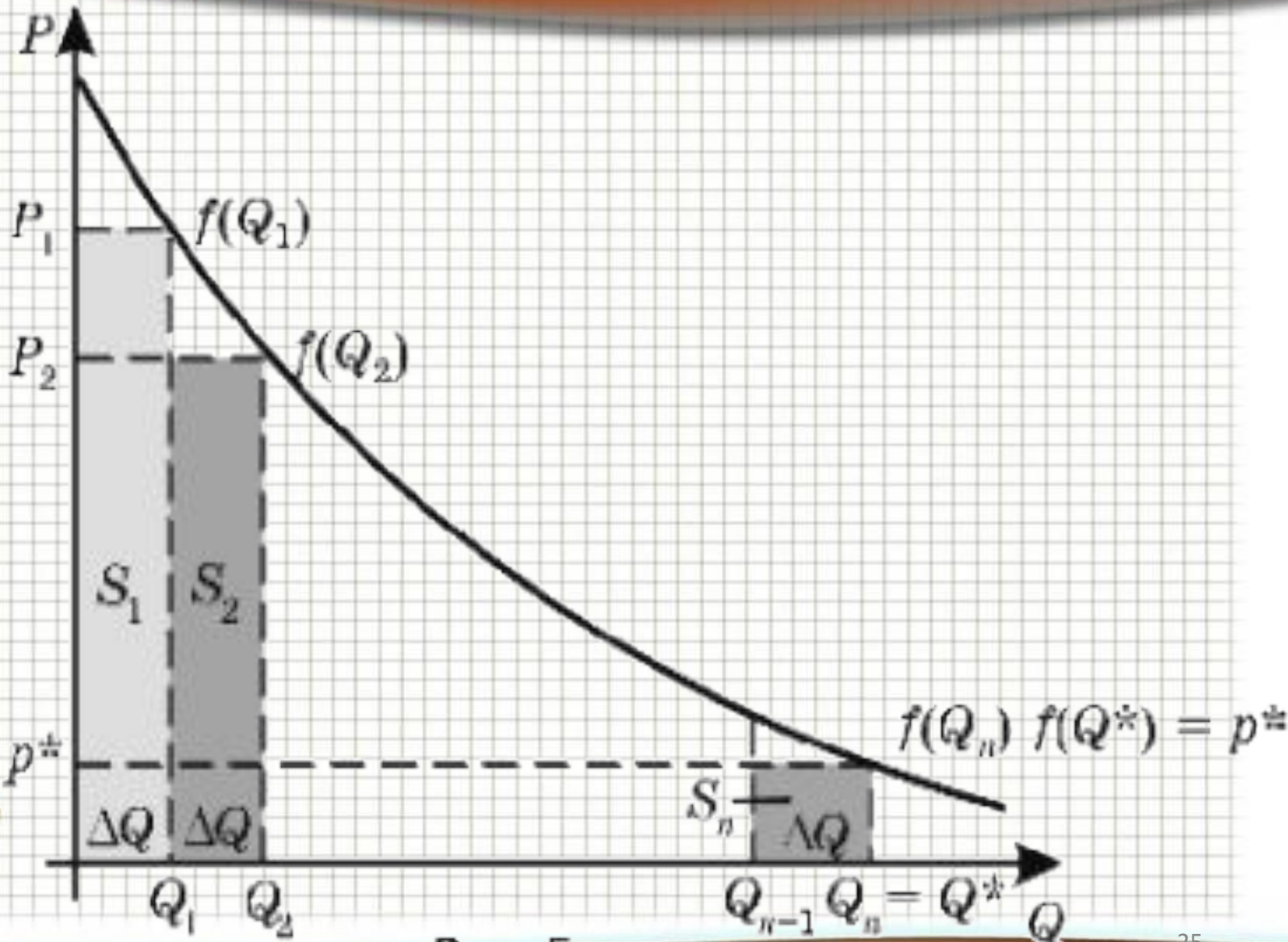


Рис. 4





12.08.2012

Рис. 5

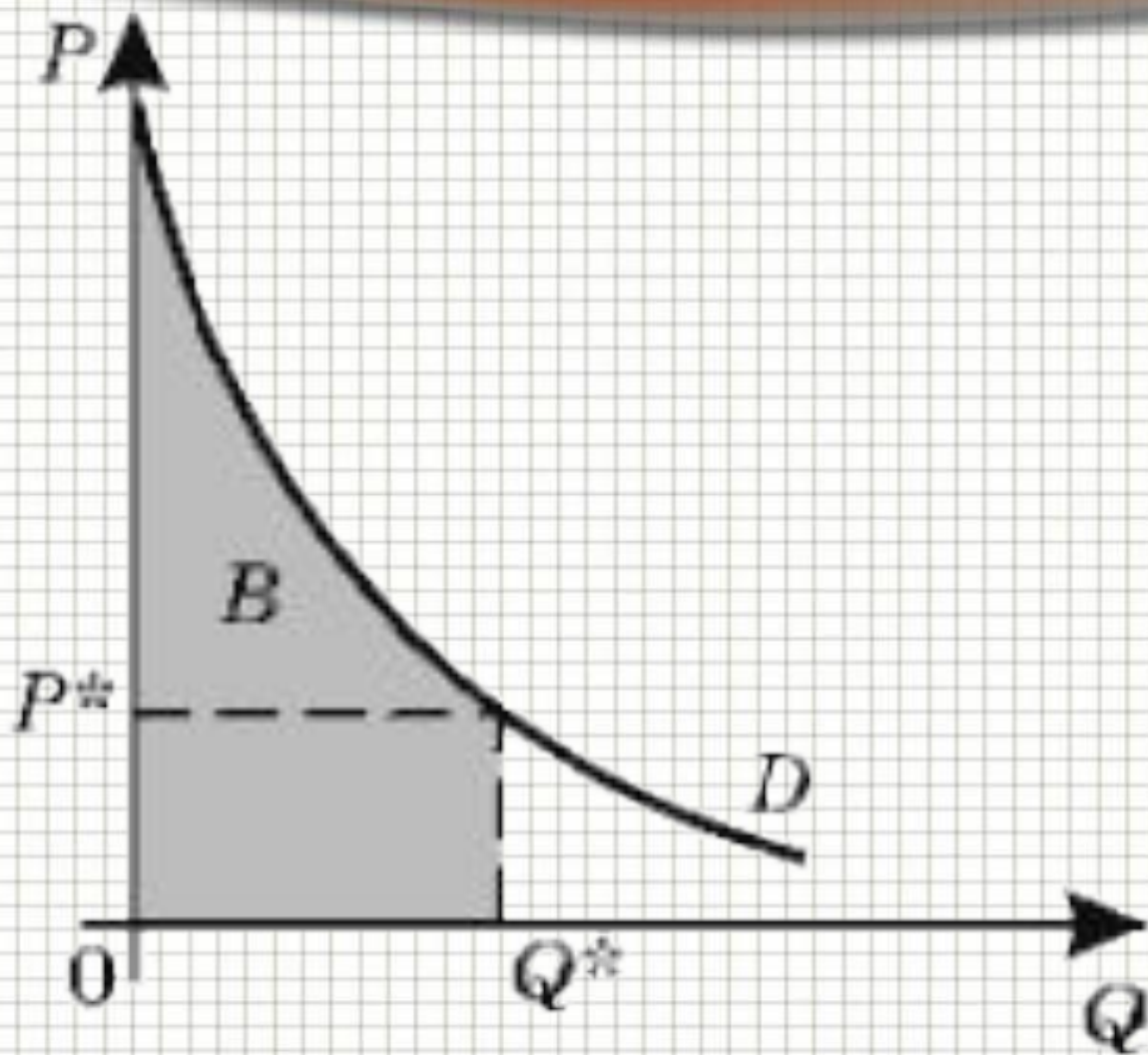
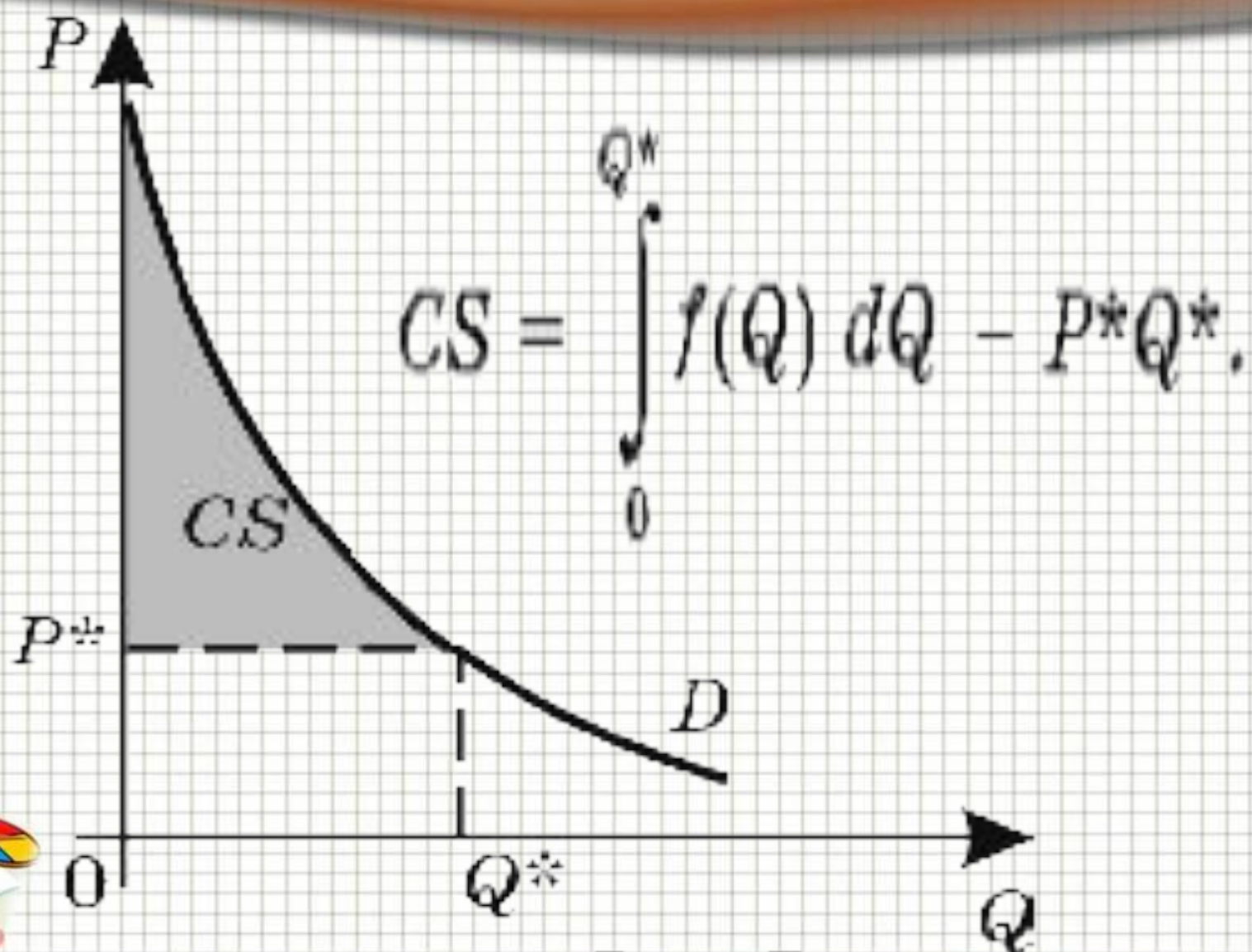


Рис. 6



$$CS = \int_0^{Q^*} f(Q) dQ - P^*Q^*$$



Рис. 7

# ▶ **Нахождение потребительского излишка**

**Задача.** Известно, что спрос на некоторый товар описывается функцией  $q = \frac{8000}{p^3}$ , а предложение данного товара характеризуется функцией  $q = 500p$ .  
Найдите величину излишка потребителя при покупке данного товара.



# ▶ **Нахождение потребительского излишка**

**Задача.** Известно, что спрос на некоторый товар задается функцией  $p = \frac{231}{q+1}$ , предложение – функцией  $p = q + 11$ . Определите величину выигрыша потребителя при покупке данного товара.



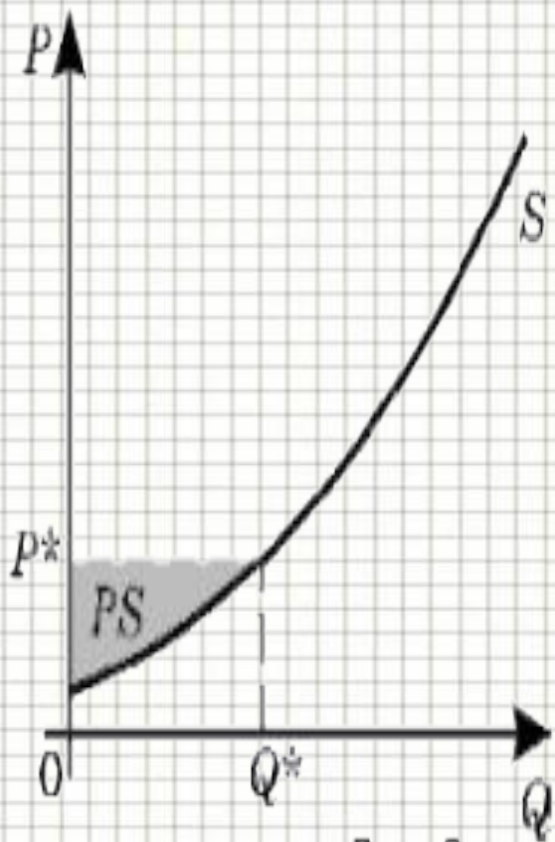


Рис. 8

$$PS = P^*Q^* - \int_0^{Q^*} f(Q) dQ.$$



## ▶ **Нахождение излишка**

### **производителя**

**Задача.** Известно, что кривая предложения некоторого товара имеет вид  $p = 4q^3 + 2$ , а равновесие на рынке данного товара достигается при объеме продаж  $Q^* = 3$ . Определите добавочную выгоду производителя при продаже такого количества продукции.



**► Нахождение  
дисконтированной  
стоимости денежного потока**

$$\Pi = \int_0^T I(t) e^{-pt} dt$$





$q$  – количество товара,  
 $p$  – цена единицы товара  
 $(p^*; q^*)$  – точка равновесия

$CS$  - потребительский излишек  
 $PS$  - излишек производителя

$$CS = \int_0^{q^*} p(q) dq - p^* q^*$$

$$PS = p^* q^* - \int_0^{q^*} p(q) dq$$

# Экономика

$G$  – коэффициент Джини

$$G = \frac{S_1}{S_1 + S_2}$$

$$V = \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt$$

$f$  - производительность,  
 $t$  - время,  
 $V$  - объём продукции

$$П = \int_0^T I(t) e^{-pt} dt$$

$П$  – дисконтированная стоимость денежного потока,  
 $I$  - скорость денежного потока,  
 $p$  - годовая процентная ставка,  
 $t$  - время

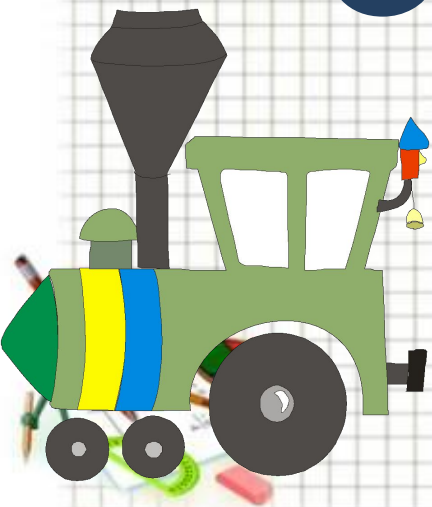
# ► Домашнее задание

- **Задача 1.** Определить запас товаров в магазине, образуемый за три дня, если поступление товаров характеризуется функцией  $f(t) = 2t + 5$ .
- **Задача 2.** Известно, что спрос на некоторый товар задается функцией  $p = 4 - q^2$ , где  $q$  – количество товара (в шт.),  $p$  – цена единицы товара (в руб.), а равновесие на рынке данного товара достигается при  $p^* = q^* = 1$ . Определите величину потребительского излишка.
- **Задача 3.** *(для тех, кто не боится трудностей при изучении математики)* Под строительство гидроэлектростанции задан непрерывный денежный поток со скоростью  $I(t) = -t^2 + 20t + 5$  (млрд руб./год) в течение 20 лет с годовой процентной ставкой  $p = 5\%$ . Найти дисконтированную стоимость этого потока.



урок

ОКОНЧЕН.



Определенный интеграл,  
Ты мне ночами начал сниться,  
Когда тебя впервые брал,  
Я ощутил твои границы.

И ограниченность твоя  
Мне придавала больше силы.

С тобой бороться должен я,  
Но должен победить красиво!

Какое счастье познал  
Я в выборе первообразной,  
Как долго я ее искал.

