

Численные методы для уравнения Пуассона в цилиндрической системе координат

Жердецкий Алексей Александрович

Руководитель: доктор физ.-мат. наук,
доцент, профессор кафедры численных
методов и программирования
Волков Василий Михайлович



Актуальность

- Уравнение Пуассона хорошо описывает физику некоторых процессов, происходящих в организме человека.
- Последние достижения в изучении проблем электротомографии как альтернативного способа исследования тканей головного мозга сводятся к решению прямой и обратной задач для уравнения Пуассона, описывающего пространственное распределение потенциала.
- Новые методы электротомографических исследований могут оказаться на несколько порядков экономичнее уже существующих (например, рентгеномографии) и не требуют применения дорогостоящего оборудования.



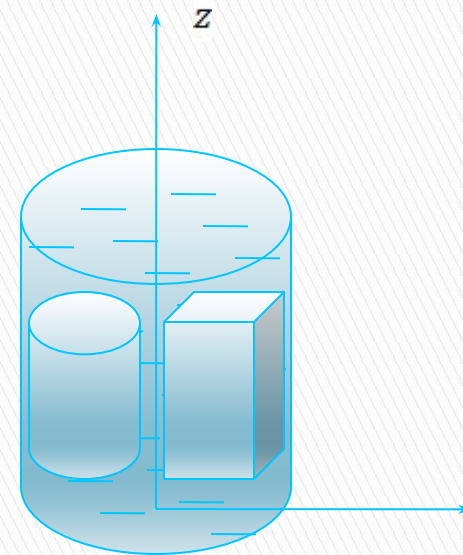
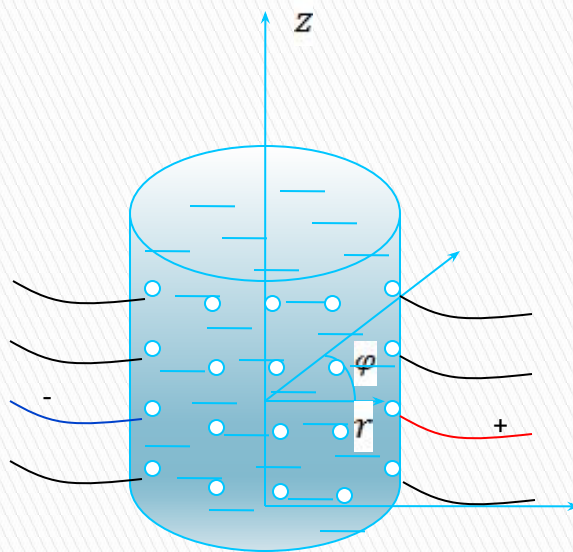
Цели и задачи

- Построение экономичных итерационных методов решения неоднородного уравнения Пуассона в цилиндрической системе координат для прямой задачи электроэнцефалографии.
- Проверка эффективности построенных методов (скорость сходимости и количество вычислительных затрат) в работе на реальных моделях.



Объект исследования

- Объектом исследования является цилиндр со встроенными электродами. Цилиндр заполняется солевым раствором (salt water) с электрической проводимостью 1.3 сименс/метр. В этот цилиндр могут помещаться физические тела с различной проводимостью. На два электрода подается ток и снимаются показания на других электродах.





Постановка задачи

- Прямая задача может быть сформулирована следующим образом: по снятым на электродах значениям токов, геометрическим размерам и электрической проводимости исследуемого тела определить распределение потенциала по поверхности цилиндра.
- Математически задача сводится к решению неоднородного уравнения Пуассона. В цилиндрических координатах оно запишется следующим образом:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \sigma(r, \varphi, z) \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sigma(r, \varphi, z) \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\sigma(r, \varphi, z) \frac{\partial u}{\partial z} \right) = f(r, \varphi, z)$$

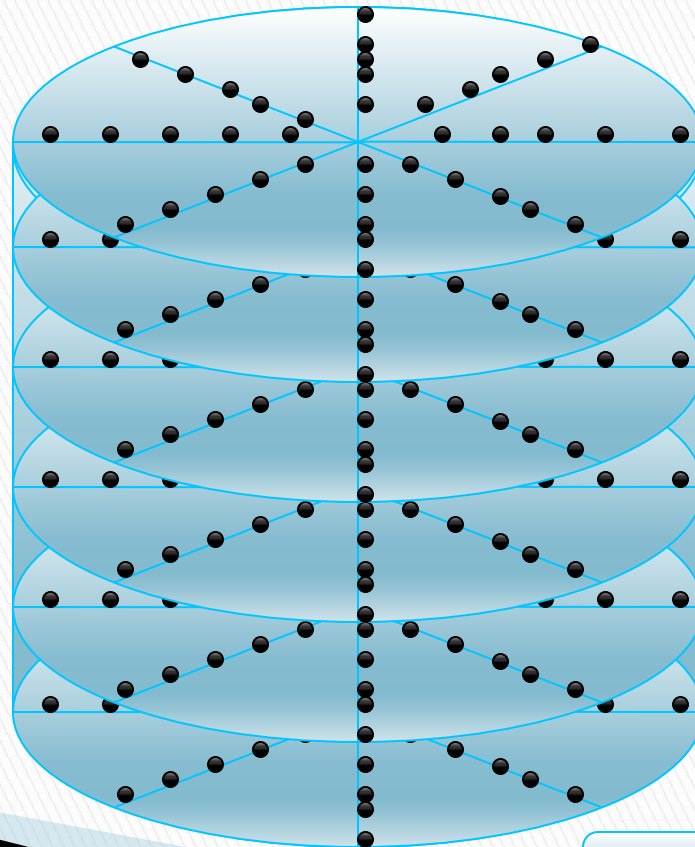
На границе области задаются краевые условия Дирихле:

$$u_{\Gamma_{\Omega}} = u_0.$$

Дискретизация цилиндрической области



- Исследуемая цилиндрическая область заменяется на цилиндрическую сетку и задача решения исходного уравнения с заданными краевыми условиями сводится к ее дискретному аналогу.



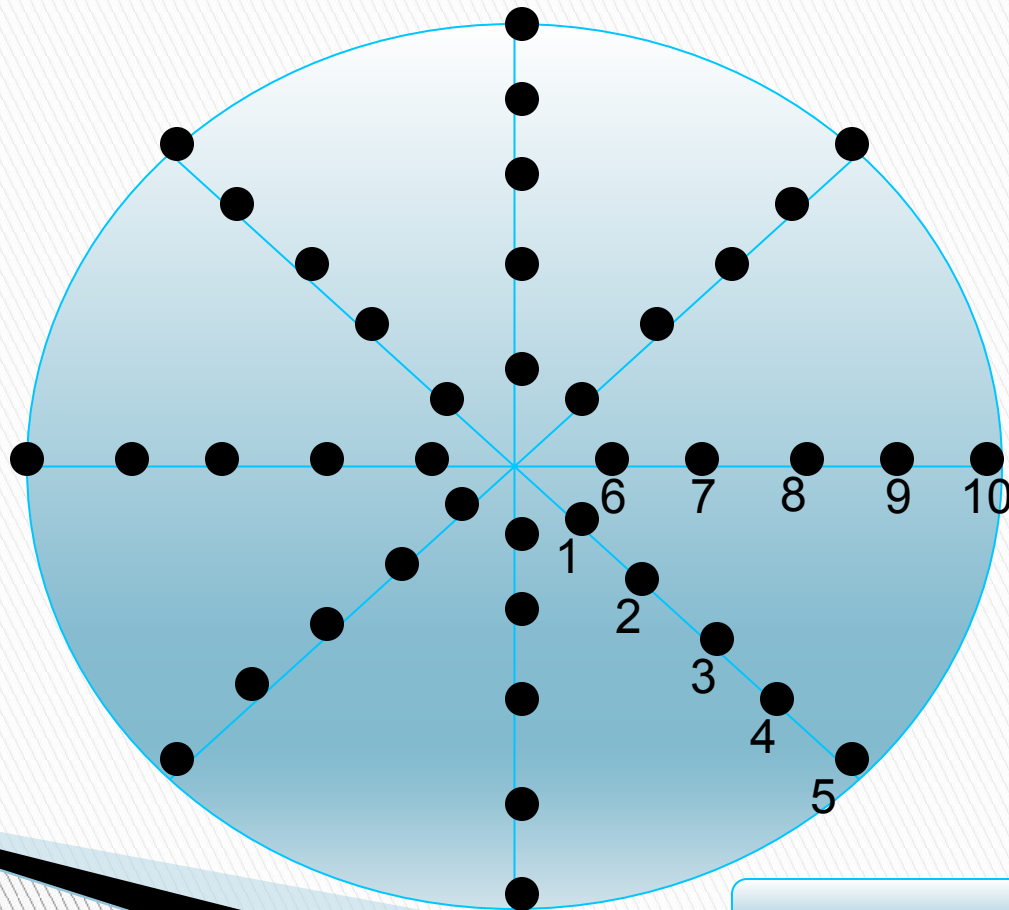
Предыдущий слайд

Следующий слайд



Упорядочение точек цилиндра

- Упорядочение точек цилиндрической сетки происходит, как показано на рисунке. После заполнения самого нижнего слоя нумерация переносится на второй слой и т. д. вплоть до исчерпания всех слоев.



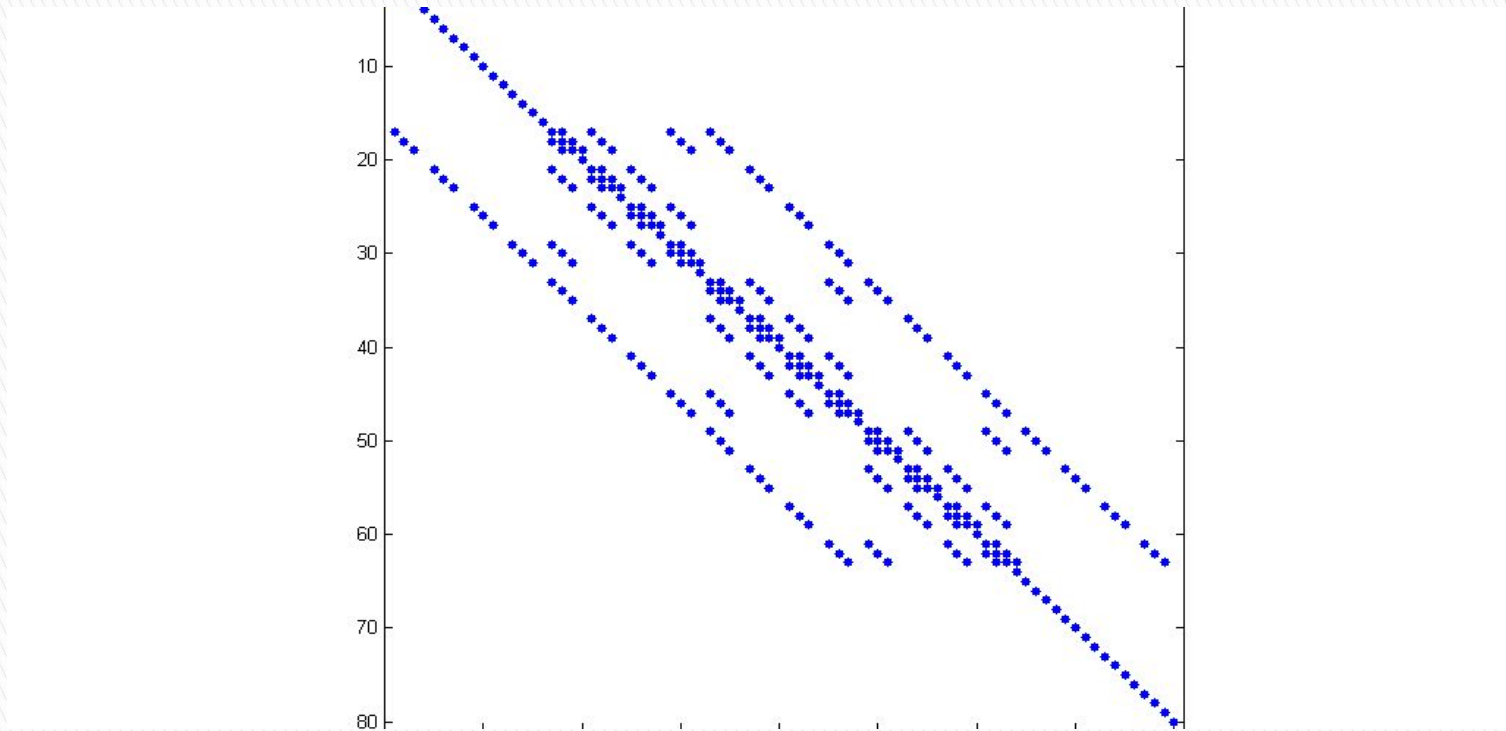
Предыдущий слайд

Следующий слайд



Матрица линейной системы

- Разреженная матрица, полученная после конечно-разностной аппроксимации исходного уравнения Пуассона и естественного упорядочения неизвестных. Аппроксимация имеет второй порядок точности.





Решение линейной системы

- Система линейных алгебраических уравнений

$$Ax = b$$

с разреженной матрицей A решается методом бисопряженных градиентов. Для увеличения скорости сходимости строятся переобуславливатели Якоби и Фурье. Далее на работе модельной задачи сравниваются результаты с применением этих переобуславливателей.

- Изначально предполагается, что решение системы методом бисопряженных градиентов с переобуславливателем Фурье требует меньшего числа итераций в сравнении работы этого же метода с переобуславливателем Якоби.



Основные результаты

- Решение линейной системы для модельной задачи на сетке

$$N_r = 128$$

$$N_\phi = 128$$

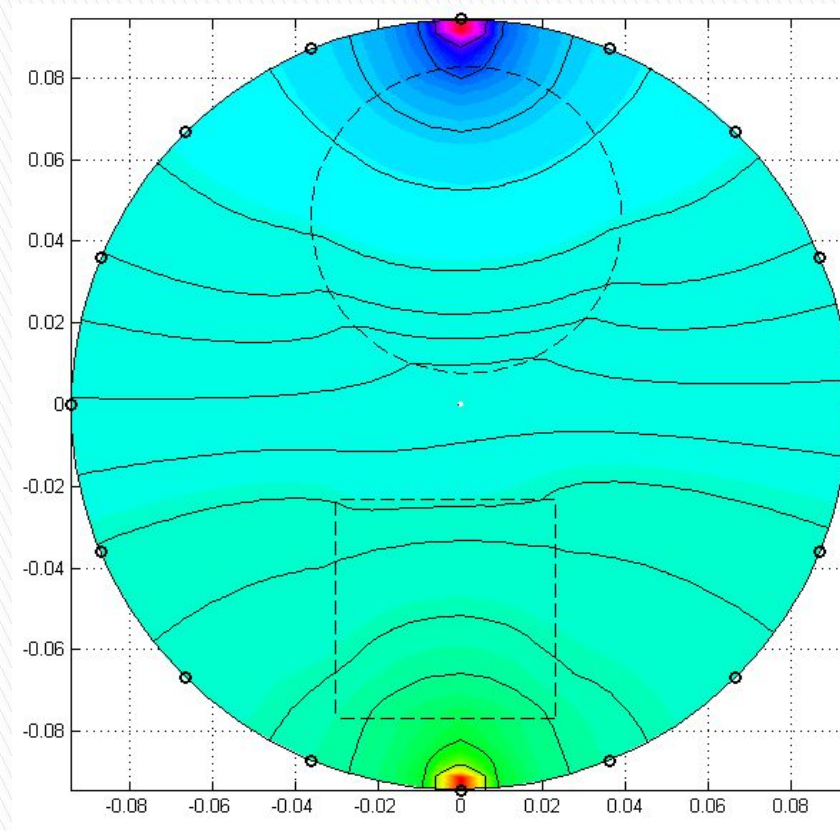
$$N_z = 72$$

с помощью встроенной в Matlab 8.0 функции `bicg` с переобуславливателем Фурье требует 34 итерации для точности 10^{-5} . Задача тестировалась и для других сеток. Число итераций практически не зависит от размерности сетки, что дает основание на то, что тестируемый солвер достаточно эффективен для сеток с большим числом узлов.



Основные результаты

- Контурный график величин потенциалов для цилиндрического слоя с одной подключенной парой электродов.



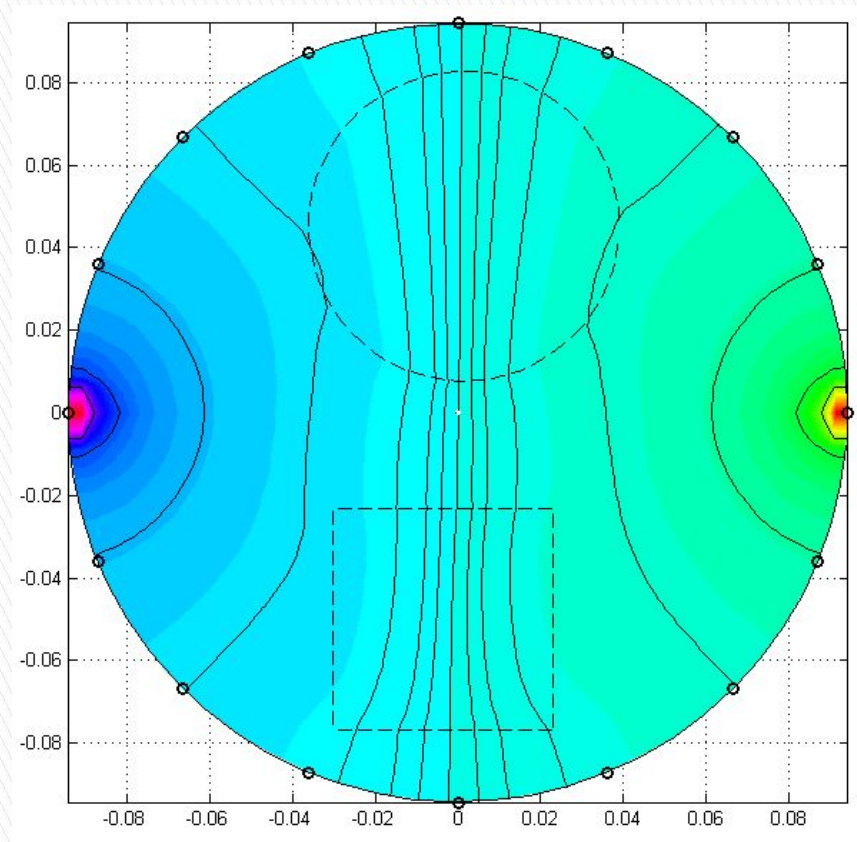
Предыдущий слайд

Следующий слайд



Основные результаты

- Контурный график величин потенциалов для цилиндрического слоя с другой подключенной парой электродов.



Предыдущий слайд

Следующий слайд



Научная новизна

- Построение новых быстрых итерационных методов решения неоднородного уравнения Пуассона, как-то метод бисопряженных градиентов с переобуславливателем Фурье, может иметь прикладное применение в медицине, в частности поможет решать обратную задачу электроэнцефалографии, состоящую из многократного решения прямой задачи.



Основные положения, выносимые на защиту

- Неоднородное уравнение Пуассона в цилиндрической системе координат.
- Матрицы линейных систем для прямой модельной задачи.
- Метод бисопряженных градиентов с переобуславливателем Фурье для решения прямой модельной задачи.
- Эффективность исследуемого метода.



Спасибо за внимание!

Начать заново

Завершить показ