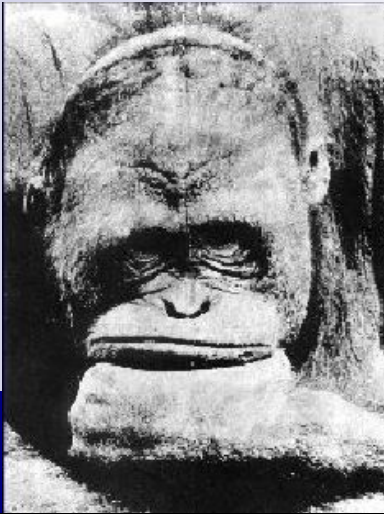
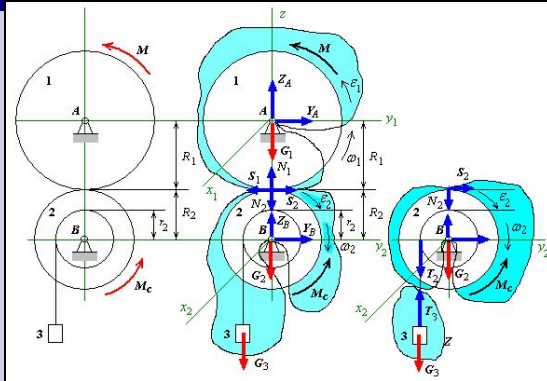


Бондаренко А.Н.



Курс лекций по теоретической механике

Динамика (I часть)



Электронный учебный курс написан на основе лекций, читавшихся автором для студентов, обучавшихся по специальностям СЖД, ПГС и СДМ в НИИЖТе и МИИТе (1974-2006 гг.). Учебный материал соответствует календарным планам в объеме трех семестров.
Для полной реализации анимационных эффектов при презентации необходимо использовать средство просмотра Power Point не ниже, чем встроенный в Microsoft Office операционной системы Windows-XP Professional.
Замечания и предложения можно послать по e-mail: bond@miit.ru.

Москва - 2007

■ Лекция 8.

Законы сохранения. Элементы теории моментов инерции. Кинетический момент твердого тела.

Дифференциальное уравнение вращения твердого тела.

Пример решения задачи на использование теоремы об изменении момента количества движения системы. Элементарная теория гироскопа.

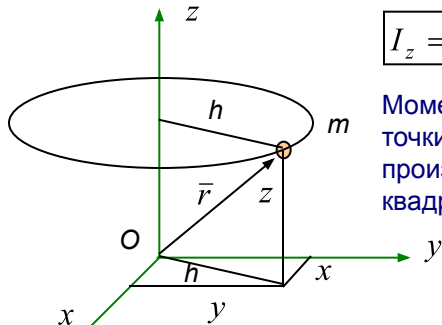
Лекция 8

Следствия из теоремы об изменении момента количества движения системы (законы сохранения):

1. Если в интервале времени $[t_1, t_2]$ вектор главного момента внешних сил системы относительно некоторого центра равен нулю, $M_O^e = 0$, то вектор момента количества движения системы относительно этого же центра постояен, $K_O = \text{const}$ – закон сохранения момента количества движения системы).
2. Если в интервале времени $[t_1, t_2]$ главный момент внешних сил системы относительно оси x равен нулю, $M_x^e = 0$, то момент количества движения системы относительно оси x постояен, $K_x = \text{const}$.
Аналогичные утверждения справедливы для осей y и z .

■ **Элементы теории моментов инерции** – При вращательном движении твердого тела мерой инерции (сопротивления изменению движения) является момент инерции относительно оси вращения. Рассмотрим основные понятия определения и способы вычисления моментов инерции.

1. Момент инерции материальной точки относительно оси:



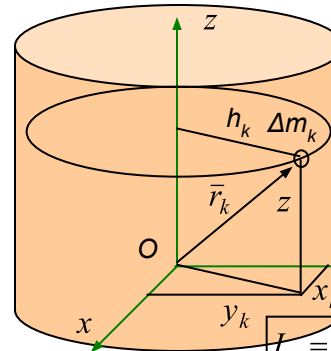
$$I_z = mh^2 = m(x^2 + y^2)$$

Момент инерции материальной точки относительно оси равен произведению массы точки на квадрат расстояния точки до оси.

Кроме осевого момента инерции твердого тела существуют другие виды моментов инерции:

$$I_{xy} = \int xy dm$$
 - центробежный момент инерции твердого тела.

2. Момент инерции твердого тела относительно оси:



$$I_z = \sum \Delta m_k h_k^2 = \sum \Delta m_k (x_k^2 + y_k^2)$$

Момент инерции твердого тела относительно оси равен сумме произведений массы каждой точки на квадрат расстояния этой точки до оси.

При переходе от дискретной малой массы к бесконечно малой массе точки предел такой суммы определяется интегралом:

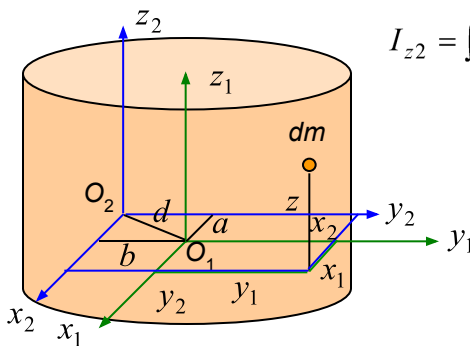
$$I_z = \int h^2 dm = \int (x^2 + y^2) dm$$

-осевой момент инерции твердого тела.

$$I_O = \int r^2 dm = \int (x^2 + y^2 + z^2) dm$$

- полярный момент инерции твердого тела.

3. Теорема о моментах инерции твердого тела относительно параллельных осей – формула перехода к параллельным осям:



$$I_{z_2} = \int (x_2^2 + y_2^2) dm = \int ((x_1 + a)^2 + (y_1 + b)^2) dm = \int (x_1^2 + y_1^2) dm + 2a \int x_1 dm + 2b \int y_1 dm + (a^2 + b^2) \int dm.$$

Момент инерции относительно исходной оси I_{z_1}

Таким образом:
$$I_{z_2} = I_{z_1} + 2aS_{y_1} + 2bS_{x_1} + d^2M.$$

Если ось z_1 проходит через центр масс, то статические моменты равны нулю:

$$I_{z_2} = I_{z_C} + d^2M.$$

Статические моменты инерции относительно исходных осей

Масса тела

d^2

Расстояние между осями z_1 и z_2

Лекция 8 (продолжение 8.2)

4. Момент инерции однородного стержня постоянного сечения относительно оси:

Выделим элементарный объем $dV = Adx$ на расстоянии x :

Элементарная масса: $dm = \rho Adx$

$$I_z = \int_0^L x^2 dm = \int_0^L x^2 \rho Adx = \rho A \frac{x^3}{3} \Big|_0^L = \rho A \frac{L^3}{3} = \frac{ML^2}{3}$$

Для вычисления момента инерции относительно центральной оси (проходящей через центр тяжести) достаточно изменить расположение оси и задать пределы интегрирования $(-L/2, L/2)$. Здесь продемонстрируем формулу перехода к параллельным осям:

$$I_z = I_{zC} + d^2 M. \quad \Rightarrow \quad \frac{ML^2}{3} = I_{zC} + \left(\frac{L}{2}\right)^2 M.$$

$$I_{zC} = \frac{ML^2}{3} - \left(\frac{L}{2}\right)^2 M = \frac{ML^2}{12}.$$

6. Момент инерции тонкого цилиндра относительно оси симметрии ($t \ll R$):

В силу малости толщины цилиндра считаем, что все точки находятся на одинаковом расстоянии R до оси и интегрирование не требуется. Объем $V = 2\pi R t H$. (тонкий цилиндр радиуса R с толщиной стенки t).

$$I_z = R^2 \rho 2\pi R t H = MR^2.$$

То же самое можно получить с использованием формулы для толстостенного цилиндра, учитывая малость t :

$$I_z = \frac{M((R^2 + (R-t)^2))}{2} = \frac{M(2R^2 - 2Rt + t^2)}{2} \ll 2R^2.$$

5. Момент инерции однородного сплошного цилиндра относительно оси симметрии:

Выделим элементарный объем $dV = 2\pi r dr H$ (тонкий цилиндр радиуса r):

Элементарная масса: $dm = \rho 2\pi r dr H$

$$I_z = \int_0^R r^2 dm = \int_0^R r^2 \rho 2\pi r dr H = \rho 2\pi H \frac{r^4}{4} \Big|_0^R = \rho 2\pi H \frac{R^4}{4} = \frac{MR^2}{2}$$

Здесь использована формула объема цилиндра $V = \pi R^2 H$. Для вычисления момента инерции пустотелого (толстого) цилиндра достаточно задать пределы интегрирования от R_1 до R_2 ($R_2 > R_1$):

$$I_z = \rho 2\pi H \frac{r^4}{4} \Big|_{R_1}^{R_2} = \rho 2\pi H \left(\frac{R_2^4}{4} - \frac{R_1^4}{4} \right) = \frac{M(R_2^2 + R_1^2)}{2}.$$

Поскольку высота цилиндров в результате не входит в формулы моментов инерции, то они остаются справедливыми для тонкого сплошного диска и обода колеса (тонкого кольца).

Кинетический момент твердого тела

Выделим дискретный малый объем массы Δm_i :

$$\Delta K_{zi} = h_i \Delta m_i v_i = h_i \Delta m_i \omega_z h_i = \omega_z h_i^2 \Delta m_i.$$

$$K_z = \sum \Delta K_{zi} = \omega_z \sum h_i^2 \Delta m_i = \omega_z I_z.$$

Или переходя к бесконечно малым:

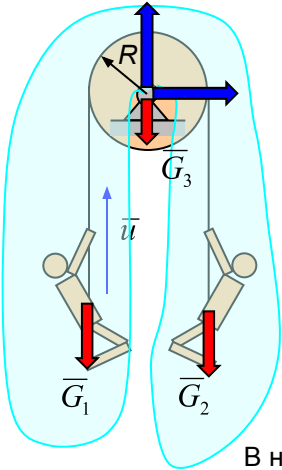
$$dK_z = h dm v = h dm \omega_z h = \omega_z h^2 dm.$$

$$K_z = \int dK_z = \omega_z \int h^2 dm = \omega_z I_z.$$

Кинетический момент вращающегося тела равен произведению угловой скорости на момент инерции относительно оси вращения.

Лекция 8 (продолжение 8.3)

Пример: Два человека одинакового веса $G_1 = G_2$ висят на канате, переброшенном через сплошной блок весом $G_3 = G_1/4$. В некоторый момент один из них начал подниматься по канату с относительной скоростью u . Определить скорости подъема каждого из людей.



1. Выбираем объект движения (блок с людьми):
2. Отбрасываем связи (опорное устройство блока):
3. Заменяем связь реакциями (подшипника):
4. Добавляем активные силы (силы тяжести):
5. Записываем теорему об изменении кинетического момента системы относительно оси вращения блока:

$$\frac{dK_z}{dt} = M_z^e = G_1 R - G_2 R = 0.$$

Так как момент внешних сил равен нулю, то кинетический момент должен оставаться постоянным:

$$K_z = const. \quad \Rightarrow \quad K_{z0} = K_z.$$

В начальный момент времени $t = 0$ было равновесие и $K_{z0} = 0$.

После начала движения одного человека относительно каната вся система пришла в движение, но кинетический момент системы должен остаться равным нулю: $K_z = 0$. Кинетический момент системы складывается из кинетических моментов обоих людей и блока:

$$K_z = K_{z1} + K_{z2} + K_{z3} = -\frac{G_1}{g}(u - v_2)R + \frac{G_2}{g}v_2 R + I_3 \omega_3 = 0.$$

Здесь v_2 – скорость второго человека, равная скорости троса,

$$I_z = \frac{M_3 R^2}{2} = \frac{G_3 R^2}{2g} = \frac{G_1 R^2}{4 \cdot 2g}. \quad \omega_3 = \frac{v_2}{R}.$$

$$-\frac{G_1}{g}(u - v_2)R + \frac{G_1}{g}v_2 R + \frac{G_1 R^2}{4 \cdot 2g} \frac{v_2}{R} = 0.$$

$$v_2 = \frac{8u}{17}.$$

$$v_1 = u - \frac{8u}{17} = \frac{9u}{17}.$$

Дифференциальное уравнение вращения твердого тела относительно оси:

Запишем теорему об изменении кинетического момента твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси:

$$\frac{dK_z}{dt} = M_z^e.$$

Кинетический момент вращающегося твердого тела равен:

$$K_z = \omega_z I_z.$$

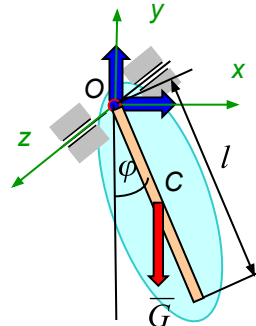
Момент внешних сил относительно оси вращения равен вращающему моменту (реакции и сила тяжести моментов не создают):

$$M_z^e = M_z = M_{\text{вращ}}.$$

Подставляем кинетический момент и вращающий момент в теорему

$$\frac{d(\omega_z I_z)}{dt} = M_z = M_{\text{вращ}}. \quad \Rightarrow \quad I_z \ddot{\varphi} = M_z = M_{\text{вращ}}.$$

Пример: Определить период малых свободных колебаний однородного стержня массы M и длиной l , подвешенного одним концом к неподвижной оси вращения.



$$I_z \ddot{\varphi} = M_z = -Mg \frac{l}{2} \sin \varphi.$$

$$\text{Или: } \ddot{\varphi} + \frac{Mg l}{I_z} \sin \varphi = 0.$$

В случае малых колебаний $\sin \varphi \approx \varphi$:

$$\ddot{\varphi} + \frac{Mgl}{2I_x} \varphi = 0 \quad \text{или} \quad \ddot{\varphi} + k^2 \varphi = 0, \quad k = \sqrt{\frac{Mgl}{2I_x}}$$

$$\text{Период колебаний: } T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{2I_x}{Mgl}}.$$

Момент инерции стержня:

$$I_z = \frac{Ml^2}{3}.$$

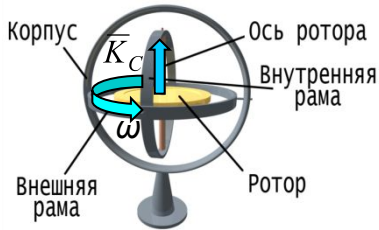
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2l}{3g}}.$$

Лекция 8 (продолжение 8.4 – дополнительный материал)

■ Элементарная теория гироскопа:

Гироскоп – твердое тело, вращающееся вокруг оси материальной симметрии, одна из точек которой неподвижна.

Свободный гироскоп – закреплен так, что его центр масс остается неподвижным, а ось вращения проходит через центр масс и может принимать любое положение в пространстве, т.е. ось вращения изменяет свое положение подобно оси собственного вращения тела при сферическом движении.



Основное допущение приближенной (элементарной) теории гироскопа – вектор момента количества движения (кинетический момент) ротора считается направленным вдоль собственной оси вращения. Таким образом, несмотря на то, что в общем случае ротор участвует в трех вращениях, принимается в расчет только угловая скорость собственного вращения $\omega = d\varphi/dt$. Основанием для этого является то, что в современной технике ротор гироскопа вращается с угловой скоростью порядка 5000-8000 рад/с (около 50000-80000 об/мин), в то время как две другие угловые скорости, связанные с прецессией и нутацией собственной оси вращения в десятки тысяч раз меньше этой скорости.

Основное свойство свободного гироскопа – ось ротора сохраняет неизменное направление в пространстве по отношению к инерциальной (звездной) системе отсчета (демонстрируется маятником Фуко, сохраняющим неизменной по отношению к звездам плоскость качания, 1852 г.).

Это вытекает из закона сохранения кинетического момента относительно центра масс ротора при условии пренебрежения трением в подшипниках осей подвески ротора, внешней и внутренней рамы:

$$\frac{d\bar{K}_C}{dt} = \bar{M}_C^e = 0; \quad \Rightarrow \quad \bar{K}_C = \text{const.}$$

Действие силы на ось свободного гироскопа.

В случае действия силы, приложенной к оси ротора, момент внешних сил относительно центра масс не равен нулю:

$$\frac{d\bar{K}_C}{dt} = \bar{M}_C^e = \bar{r} \times \bar{F}; \quad |\bar{M}_C^e| = Fh.$$

Производная кинетического момента по времени равна скорости конца этого вектора (теорема Резаля): $\frac{d\bar{K}_C}{dt} = \bar{v}_K$; $(\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{v})$. $\Rightarrow \quad \bar{v}_K = \bar{M}_C^e$.

Это означает, что ось ротора будет отклоняться не в сторону действия силы, а в сторону вектора момента этой силы, т.е. будет поворачиваться не относительно оси x (внутренняя подвеска), а относительно оси y (внешняя подвеска).

При прекращении действия силы ось ротора останется в неизменном положении, соответствующем последнему моменту времени действия силы, т.к. с этого момента времени момент внешних сил вновь становится равным нулю. В случае кратковременного действия силы (удара) ось гироскопа практически не меняет своего положения.

Таким образом, быстрое вращение ротора сообщает гироскопу способность противодействовать случайным воздействиям, стремящимся изменить положение оси вращения ротора, а при постоянном действии силы сохраняет положение плоскости, перпендикулярной действующей силе, в которой лежит ось ротора. Эти свойства используются в работе инерциальных систем навигации.

