

ВЫБОР ПУТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

**Развитие креативного мышления в
процессе обучения математике**

- Проблема выбора пути решения – это одна из важнейших методологических и логических характеристик исследовательского процесса
- Следует различать такие пути, такие намерения, идеи, которые ведут к решению с одной стороны и такие, которые оказываются тупиковыми, с другой.
- Парадоксальность исследовательского процесса состоит в том, что те и другие активизируют и стимулируют поисковую деятельность, побуждают исследователя к осуществлению тех или иных действий, которые в той или иной степени могут все-таки оказаться продуктивными

- ▣ Педагогически неверно давать задачу с требованием решить ее именно таким способом, если возможен иной, более короткий и красивый и не очень замаскированный способ ее решения.

Задача

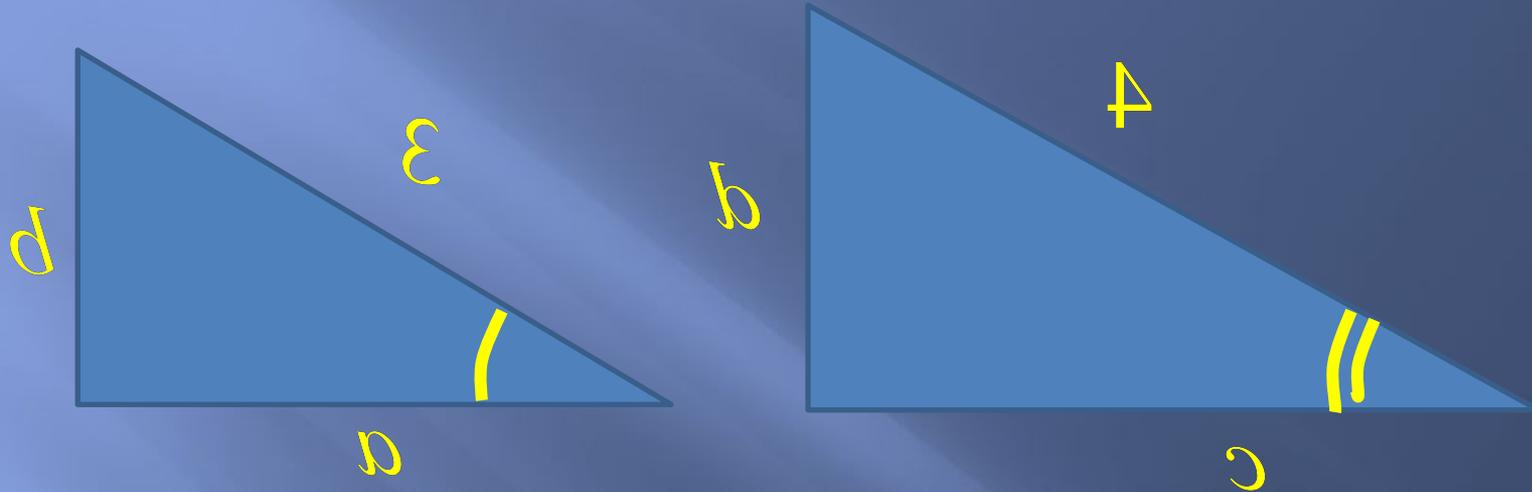
МГУ. Экономический факультет

- Среди решений системы найдите
$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 9 \\ c^2 + d^2 = 16 \\ ad + bc \geq 12 \end{cases}$$
- те, при которых выражение $b + d$ принимает наибольшее значение.

1 решение

Геометрия

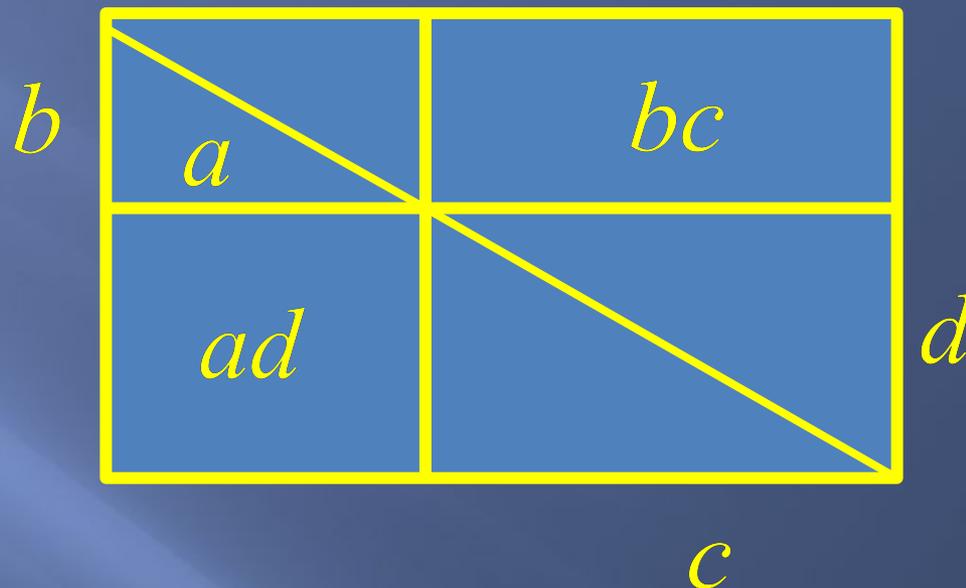
- Уравнения системы твердо ассоциируются с теоремой Пифагора,



что приводит к рассмотрению двух прямоугольных треугольников с гипотенузами 3 и 4.

Неравенство системы ассоциируется в таком случае с некоторыми геометрическими фигурами, подобными приведенной на рисунке.

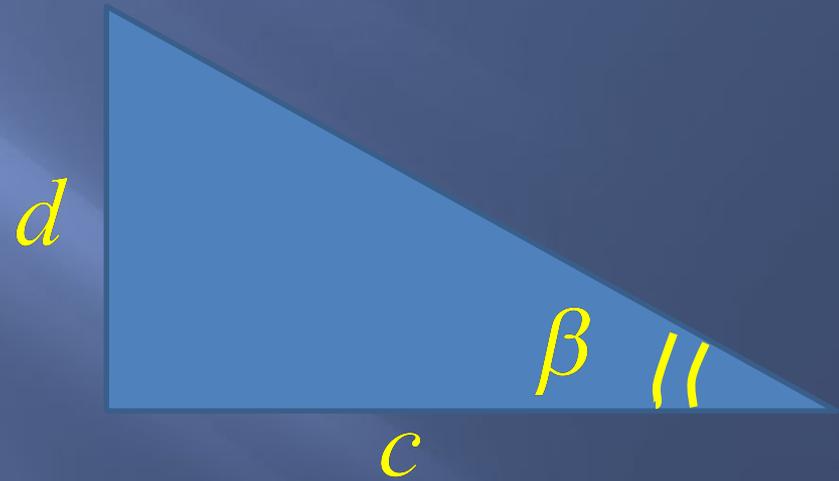
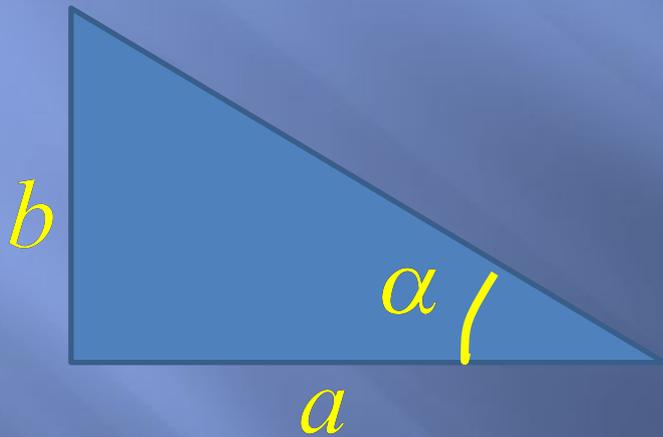
Однако пути решения не видно.



2 решение

Тригонометрия

Введение тригонометрических функций



$$a = 3 \cos \alpha, \quad b = 3 \sin \alpha, \quad c = 4 \cos \beta, \quad d = 4 \sin \beta$$

$$ad + bc = 12(\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta) = 12 \sin(\alpha + \beta)$$

Учитывая, что $2 \sin(\alpha + \beta) \leq 12$, и то, что

$$0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$$

получим, что $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, т.е. рассматриваемые нами треугольники подобны.

Получим, что $b + d = 3 \sin \alpha + 4 \cos \alpha \leq 5$

и максимальное значение достигается, если

$$\alpha = \arcsin \frac{3}{5}$$

Тогда:

$$a = \frac{12}{5}, b = \frac{9}{5}, c = \frac{12}{5}, d = \frac{16}{5}$$

3 решение

Теория чисел.

Теорема и формула Эйлера

Теорема Эйлера.

Произведение двух чисел, каждое из которых есть сумма двух квадратов, также представимо в виде суммы двух квадратов.

Формула Эйлера.

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ad + bc)^2 + (ac - bd)^2$$

Имеем, что $144 = (ad + bc)^2 + (ac - bd)^2$, и, таким

образом, получаем, что $ac - bd = 0 \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{d}{c} = x$

Из уравнений системы получим, что

$$b^2 = \frac{9}{1+x^2}, d^2 = \frac{16x^2}{1+x^2}, (b+d)^2 = b^2 + d^2 + 2bd = \frac{(3+4x)^2}{1+x^2}$$

Последнее выражение достигает максимума

при

$$x = \frac{4}{3}$$

Подставив найденное значение, получим, что

$$b + d = 25,$$

и одновременно находим искомые значения

$$a = \frac{12}{5}, b = \frac{9}{5}, c = \frac{12}{5}, d = \frac{16}{5}$$

К решению задачи нас привел непростой, сложный путь.

Однако после этого вдруг может стать ясно, что к тому же

результату ведет и более короткий путь, но его нахождение

Размышление о поиске пути решения в яркой
форме выразил Г.Гельмгольц:

«Я могу сравнить себя с путником, который
предпринял восхождение на гору, не зная дороги;
долго и с трудом взбирается он, часто должен
возвращаться назад, ибо дальше нет прохода. То
размышление, то случай открывают ему новые
тропинки, они ведут его несколько далее, и,
наконец,
когда цель достигнута, он, к своему стыду, находит
широкую дорогу, по которой мог бы подняться,
если
бы умел верно отыскать начало»

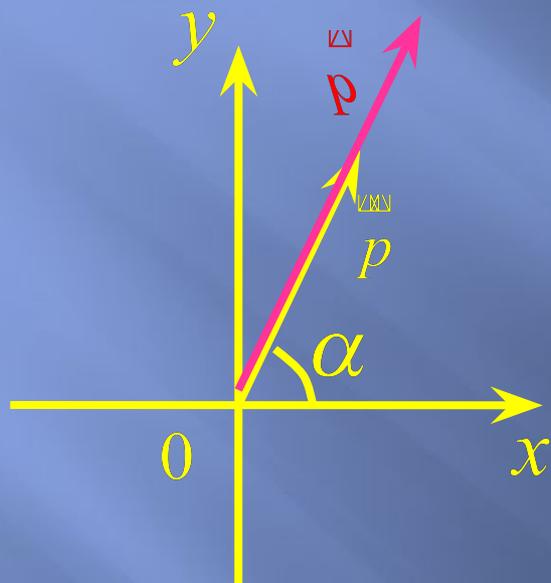
4 решение

Векторы

Рассмотрим векторы $\vec{p}(a; b), \vec{q}(d; c)$

Система запишется в виде
$$\begin{cases} |\vec{p}| = 3 \\ |\vec{q}| = 4 \\ \vec{p} \cdot \vec{q} \geq 12 \end{cases}$$

Но из величины скалярного произведения имеем, что $\vec{p} \cdot \vec{q} = |\vec{p}| \cdot |\vec{q}|$, откуда следует, что векторы коллинеарны и сонаправлены.



Отложив векторы от начала координат и обозначив угол, составленный векторами с осью абсцисс, снова получим, что

$$b + d = 3 \sin \alpha + 4 \cos \alpha \leq 5$$

Как и в предыдущих случаях получим, что

$$a = \frac{12}{5}, b = \frac{9}{5}, c = \frac{12}{5}, d = \frac{16}{5}$$

Спасибо за внимание

В.Мирошин