



**Стебаков Е.И.**  
**ООО ЦРСАП «САПРОТОН» (г. Реутов)**

**О некоторых особенностях расчета  
железобетонных конструкций методом конечных  
элементов с учетом образования трещин**  
*(на примере расчета в NormCAD/NormFEM)*



# Нелинейный расчет по СП 52-103-2007 "Железобетонные монолитные конструкции зданий"

Из СП 52-103-2007 "Железобетонные монолитные конструкции зданий":

1. На первой стадии расчета ... нелинейную работу элементов рекомендуется учитывать путем понижения их жесткостей с помощью условных обобщенных коэффициентов (п. 6.2.5 - 6.2.6):

- 0,6 - для вертикальных сжатых элементов;
- 0,3 - для плит перекрытий (покрытий)

2. На последующих стадиях расчета ... следует вводить уточненные значения жесткостей элементов ... с учетом армирования, образования трещин и развития неупругих деформаций в бетоне и арматуре согласно указаниям действующих нормативных документов по проектированию железобетонных конструкций (п. 6.2.5)

Система нормативных документов в строительстве  
СВОД ПРАВИЛ  
ПО ПРОЕКТИРОВАНИЮ И СТРОИТЕЛЬСТВУ

ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫЕ МОНОЛИТНЫЕ  
КОНСТРУКЦИИ ЗДАНИЙ

**СП 52-103-2007**

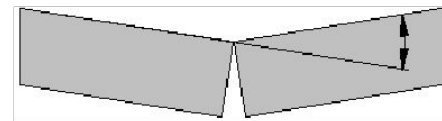
Москва  
2007



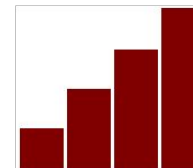
# Нелинейный расчет по СП 52-103-2007

Ограничения/недостатки метода СП 52-103-2007:

- не учитывается скачок угла поворота в сечениях с максимальными пластическим деформациями (в пластических шарнирах)



- не предусмотрено монотонное увеличение интенсивности воздействий



- не учитываются деформации сдвига (наклонные трещины; сдвиг в зоне сцепления арматуры с бетоном)

Система нормативных документов в строительстве  
СВОД ПРАВИЛ  
ПО ПРОЕКТИРОВАНИЮ И СТРОИТЕЛЬСТВУ

ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫЕ МОНОЛИТНЫЕ  
КОНСТРУКЦИИ ЗДАНИЙ

СП 52-103-2007

Москва  
2007



# Методы расчета Eurocode (EN 1992-1-1)

## Методы расчета железобетонных конструкций Eurocode (EN 1992-1-1):

### - **линейно-упругий** расчет (п. 5.4):

с учетом уменьшения жесткости сечений с трещинами

### - **линейно-упругий** расчет с **ограниченным перераспределением моментов** (п. 5.5):

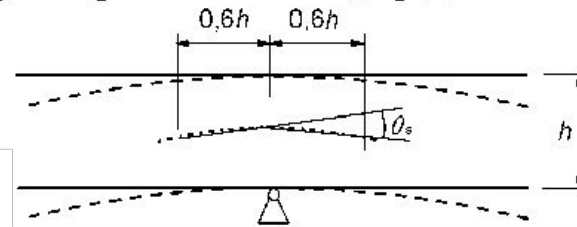
моменты могут быть перераспределены с сохранением равновесия с приложенными нагрузками

### - **пластический** расчет (п. 5.6), включая модели стержневые - «распорки и тяжи» (п. 5.6.4):

исключительно для проверки предельного состояния по несущей способности

влияние предыдущих приложений нагрузки может не учитываться, и принимается монотонное увеличение интенсивности воздействий

ограничивается угол поворота в пластическом шарнире (проверка способности к повороту участков длиной, примерно составляющей 1,2-кратную высоту поперечного сечения; предполагается, что данные участки первыми испытывают пластическую деформацию)



### - **нелинейный** расчет (п. 5.7):

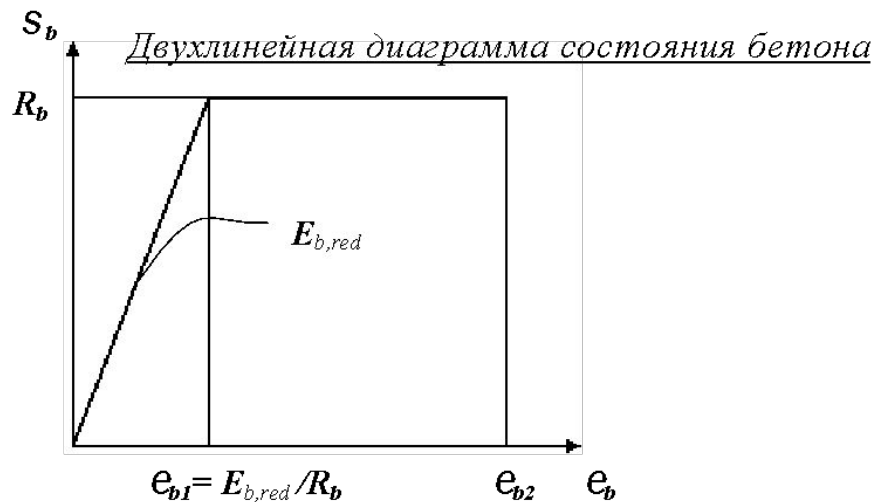
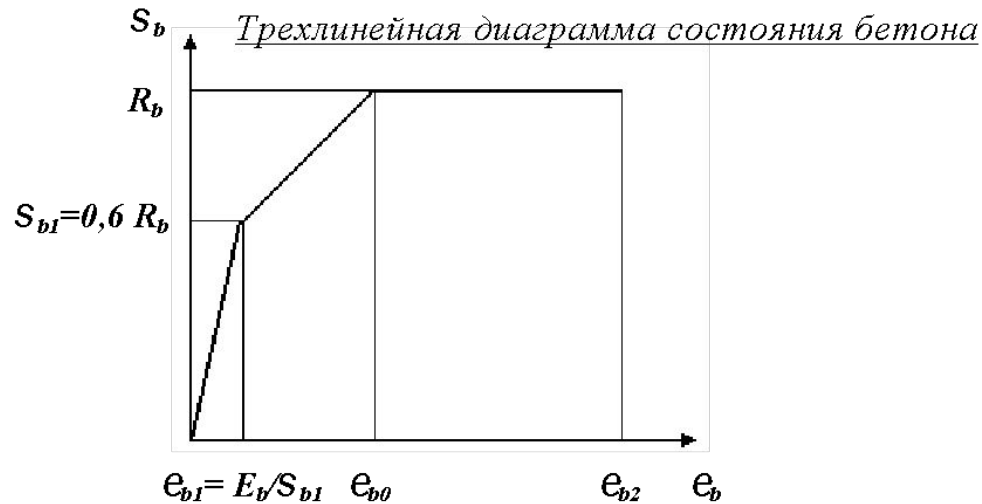
нелинейные методы расчета используются для проверки предельных состояний по несущей способности и эксплуатационной пригодности

влияние предыдущих приложений нагрузки может не учитываться, и принимается монотонное увеличение интенсивности воздействий

должны применяться такие характеристики материалов, которые отражают реальную жесткость и учитывают погрешности разрушения



# Диаграммы состояния бетона (по СП 52-101)



Предпочтительно использование **трехлинейной** диаграммы.

Как наиболее простая в ряде случаев может быть использована **двухлинейная** диаграмма:

- при расчете прочности;
- при расчете образования трещин для оценки напряженно-деформированного состояния растянутого бетона при упругой работе сжатого бетона;
- при расчете деформаций при наличии трещин.



# Деформационная модель СП 52-101

Основная система уравнений:

$$M_x = D_{11} \cdot \frac{1}{r_x} + D_{12} \cdot \frac{1}{r_y} + D_{13} \cdot \varepsilon_o$$

$$M_y = D_{12} \cdot \frac{1}{r_x} + D_{22} \cdot \frac{1}{r_y} + D_{23} \cdot \varepsilon_o$$

$$N = D_{13} \cdot \frac{1}{r_x} + D_{23} \cdot \frac{1}{r_y} + D_{33} \cdot \varepsilon_o$$

Полученные из решения этой системы уравнений деформации не должны превышать предельных значений:  $|\varepsilon_{b,\max}| \leq \varepsilon_{b,ult}$        $\varepsilon_{s,\max} \leq \varepsilon_{s,ult}$

Жесткостные характеристики  $D_{11} - D_{33}$  определяются с помощью процедуры численного интегрирования по участкам сечения с использованием диаграмм состояния бетона и арматуры.



## Жесткостные характеристики

Жесткостные характеристики  $D_{ij}$  определяются по формулам:

$$D_{11} = \sum_i A_{bi} \cdot Z_{bxi}^2 \cdot E_b \cdot v_{bi} + \sum_j A_{sj} \cdot Z_{sxj}^2 \cdot E_{sj} \cdot v_{sj}$$

$$D_{22} = \sum_i A_{bi} \cdot Z_{byi}^2 \cdot E_b \cdot v_{bi} + \sum_j A_{sj} \cdot Z_{syj}^2 \cdot E_{sj} \cdot v_{sj}$$

$$D_{12} = \sum_i A_{bi} \cdot Z_{bxi} \cdot Z_{byi} \cdot E_b \cdot v_{bi} + \sum_j A_{sj} \cdot Z_{sxj} \cdot Z_{syj} \cdot E_{sj} \cdot v_{sj}$$

$$D_{13} = \sum_i A_{bi} \cdot Z_{bxi} \cdot E_b \cdot v_{bi} + \sum_j A_{sj} \cdot Z_{sxj} \cdot E_{sj} \cdot v_{sj}$$

$$D_{23} = \sum_i A_{bi} \cdot Z_{byi} \cdot E_b \cdot v_{bi} + \sum_j A_{sj} \cdot Z_{syj} \cdot E_{sj} \cdot v_{sj}$$

$$D_{33} = \sum_i A_{bi} \cdot E_b \cdot v_{bi} + \sum_j A_{sj} \cdot E_{sj} \cdot v_{sj}$$

Значения коэффициентов  $v_{bi}$  и  $v_{sj}$  определяются по формулам:

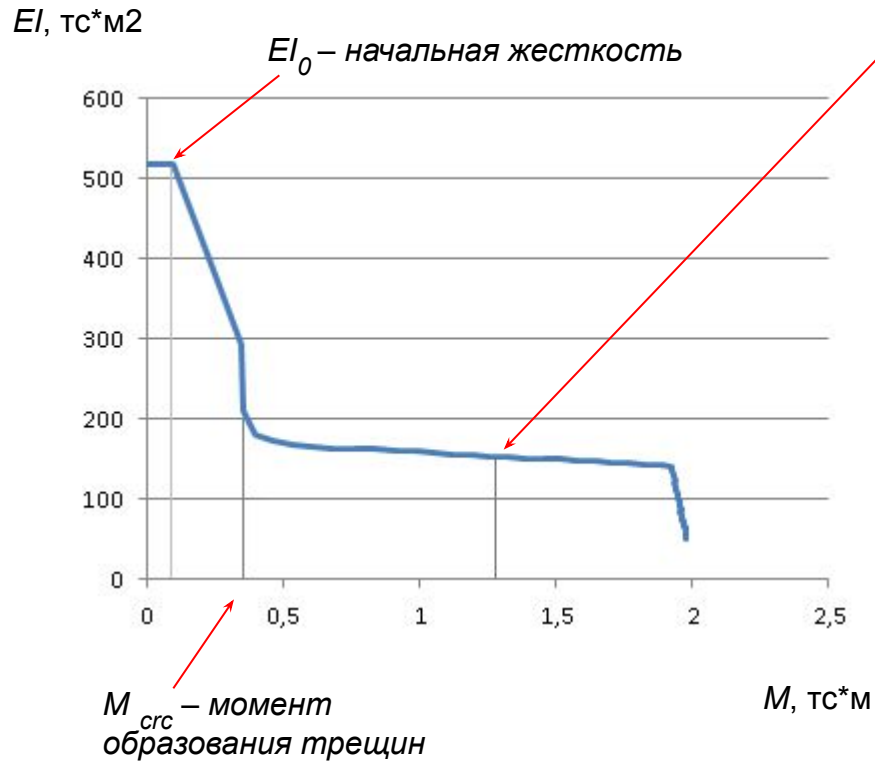
$$v_{bi} = \frac{\sigma_{bi}}{E_b \cdot \varepsilon_{bi}} \qquad v_{sj} = \frac{\sigma_{sj}}{E_{sj} \cdot \varepsilon_{sj}}$$

с учетом диаграмм состояния бетона и арматуры.

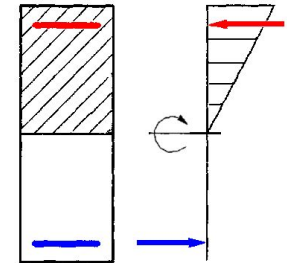
Расчет ведется итерационно, принимая на первом этапе упругую работу материала.



# Диаграмма Момент - Жесткость



$EI_{red}$  – жесткость для расчета прогиба (при длительных нормативных нагрузках)



где  $I_{red}$  – приведенный момент инерции с учетом площади сечения арматуры и только сжатой зоны бетона  
при  $E_b = E_{b,red}$  – приведенный модуль деформации сжатого бетона





Из СП 52-101-2003:

## Определение кривизны железобетонных элементов на основе нелинейной деформационной модели

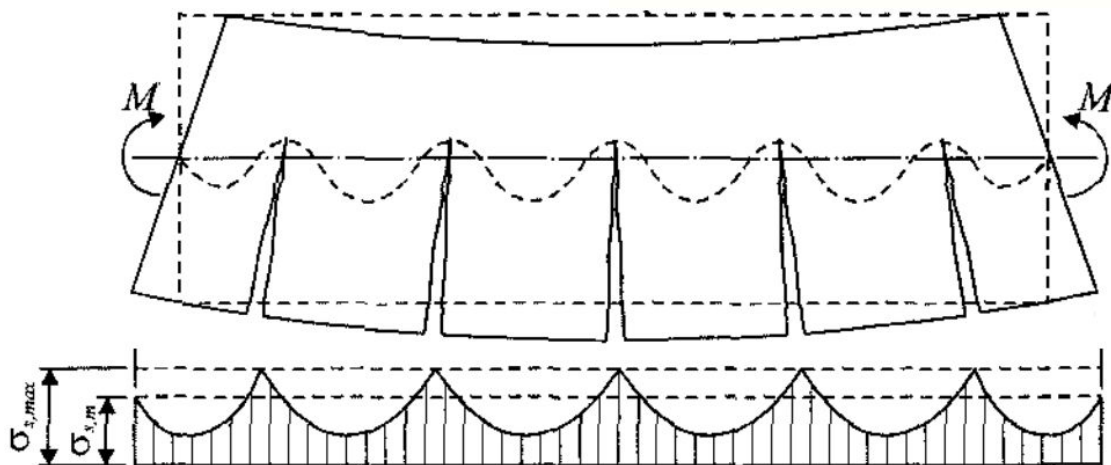
7.3.16 Значения кривизны, входящие в формулы (7.28) и (7.29), определяют из решения системы уравнений (6.36)-(6.40). При этом для элементов с нормальными трещинами в растянутой зоне напряжение в арматуре, пересекающей трещины, определяют по формуле

$$\sigma_{sj} = \frac{E_{sj} \nu_{sj} \varepsilon_{sj}}{\psi_{sj}} \quad (7.51)$$

где

$$\psi_{sj} = \frac{1}{1 + 0.8 \frac{\varepsilon_{sj,cr}}{\varepsilon_{sj}}} \quad (7.52)$$

Распределение напряжений в арматуре





## Из СП 52-101-2003:

### **Определение момента образования трещин на основе нелинейной деформационной модели:**

Из п. 7.2.11 СП 52-101-2003:

Значение  $M_{срс}$  определяют из решения системы уравнений, представленных в 6.2.2 - 6.2.31, принимая относительную деформацию бетона  $\epsilon_{bt,max}$  у растянутой грани элемента от действия внешней нагрузки равной предельному значению относительной деформации бетона при растяжении  $\epsilon_{bt,ult}$

$$\epsilon_{bt,max} = \epsilon_{bt,ult}$$



$$M_{срс}$$



# Определение коэффициента $\gamma_s$

$$\psi_{sj} = 1 / (1 + 0,8 \varepsilon_{sj,cre} / \varepsilon_{sj})$$

где  $\varepsilon_{sj,cre} = Z_{sxj} \frac{1}{r_{x,cre}} + Z_{syj} \cdot \frac{1}{r_{y,cre}} + \varepsilon_{o,cre}$  - деформации в арматуре

в момент образования трещин

Определяем  $\frac{1}{r_{x,cre}}$ ,  $\frac{1}{r_{y,cre}}$ ,  $\varepsilon_{o,cre}$  из решения системы уравнений,

принимая максимальную относительную деформацию растяжения бетона равной  $\varepsilon_{bt,ult}$ :

$$\varepsilon_{bt,ult} = Z_{bx} \cdot \frac{1}{r_{x,cre}} + Z_{by} \cdot \frac{1}{r_{y,cre}} + \varepsilon_{o,cre}$$

$$0 = D_{11} \cdot \frac{1}{r_{x,cre}} + D_{12} \cdot \frac{1}{r_{y,cre}} + D_{13} \cdot \varepsilon_{o,cre} - M_x k_{cre}$$

$$0 = D_{12} \cdot \frac{1}{r_{x,cre}} + D_{22} \cdot \frac{1}{r_{y,cre}} + D_{23} \cdot \varepsilon_{o,cre} - M_y k_{cre}$$

$$N = D_{13} \cdot \frac{1}{r_{x,cre}} + D_{23} \cdot \frac{1}{r_{y,cre}} + D_{33} \cdot \varepsilon_{o,cre}$$

$$\begin{aligned} \text{где } k_{cre} &= M_{cre} / M = \\ &= M_{cre} / \sqrt{M_x^2 + M_y^2} \end{aligned}$$



# Приведенные жесткости конечных элементов

Приведенные жесткости конечных элементов:

$$EI_x = D_{11} - (D_{12}^2 D_{33} + D_{13}^2 D_{22} - 2D_{12} D_{13} D_{23}) / (D_{22} D_{33} - D_{23}^2)$$

$$EI_y = D_{22} - (D_{12}^2 D_{33} + D_{23}^2 D_{11} - 2D_{12} D_{13} D_{23}) / (D_{11} D_{33} - D_{13}^2)$$

$$EA = D_{33} - (D_{23}^2 D_{11} + D_{13}^2 D_{22} - 2D_{12} D_{13} D_{23}) / (D_{11} D_{22} - D_{12}^2)$$

## Вывод уравнений для приведенных жесткостей

$EI_x$  определяем из решения системы уравнений:

$$M_x = EI_x \cdot \frac{1}{r_x}$$

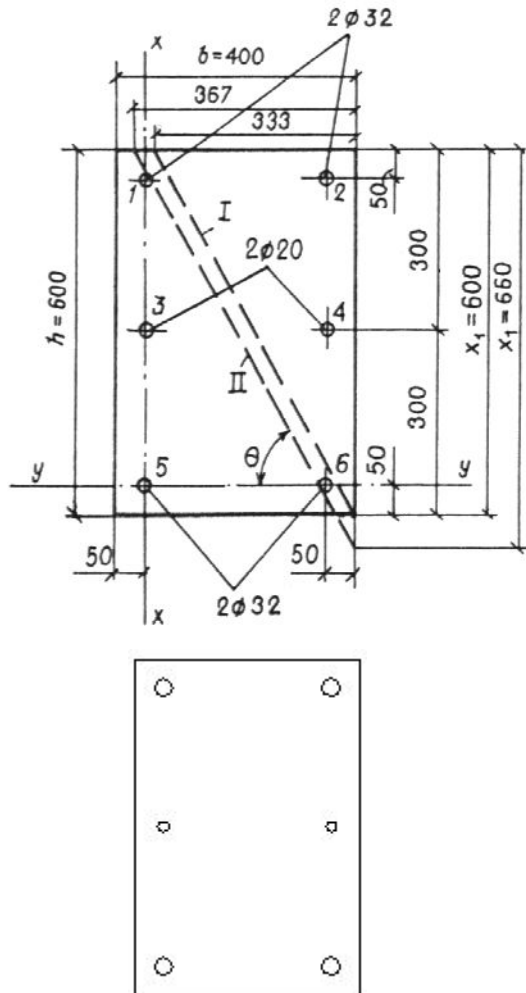
$$M_x = D_{11} \cdot \frac{1}{r_x} + D_{12} \cdot \frac{1}{r_y} + D_{13} \cdot \varepsilon_o$$

$$0 = D_{12} \cdot \frac{1}{r_x} + D_{22} \cdot \frac{1}{r_y} + D_{23} \cdot \varepsilon_o$$


$$0 = D_{13} \cdot \frac{1}{r_x} + D_{23} \cdot \frac{1}{r_y} + D_{33} \cdot \varepsilon_o$$



## Пример расчета в программе Деформационная модель (с данными из примера 40 Пособия к СНиП 2.03.01-84).



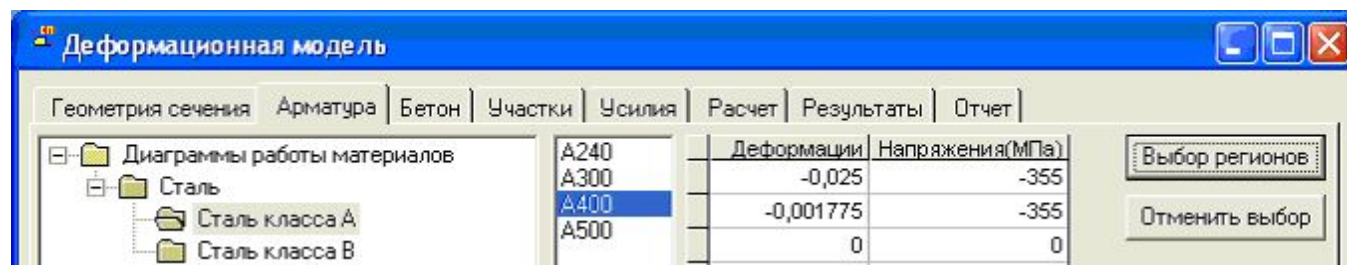
Последовательность действий в программе «Деформационная модель»:

1. В программе AutoCAD создается чертёж контуров сечения бетона и арматуры. (Все размеры задаются в мм.)
2. Запускаем программу «Деформационная модель».
3. Преобразуем замкнутые контуры в регионы, с помощью кнопки , указывая их на чертеже.



## Последовательность действий в программе «Деформационная модель».

4. Задаем свойства арматуры и кнопкой **Выбор регионов** указываем регионы арматуры на чертеже (они отмечаются синим цветом).

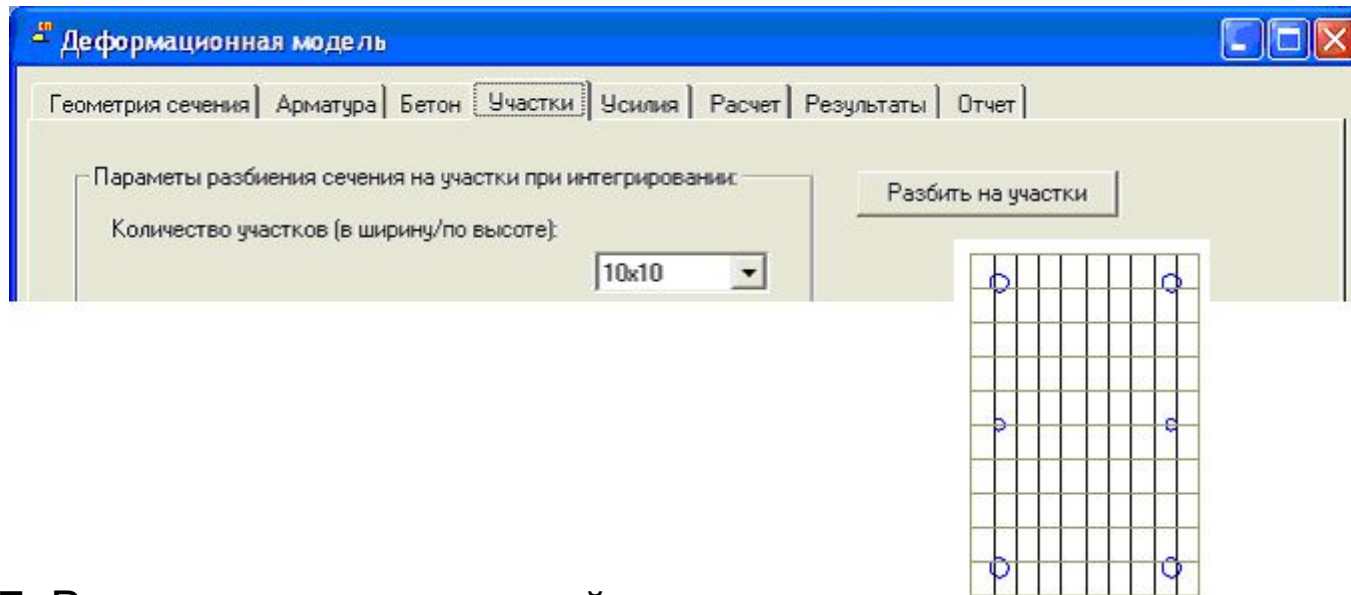


5. Аналогично задаем свойства бетона и указываем соответствующий регион на чертеже (выбранный регион отмечается красным цветом).

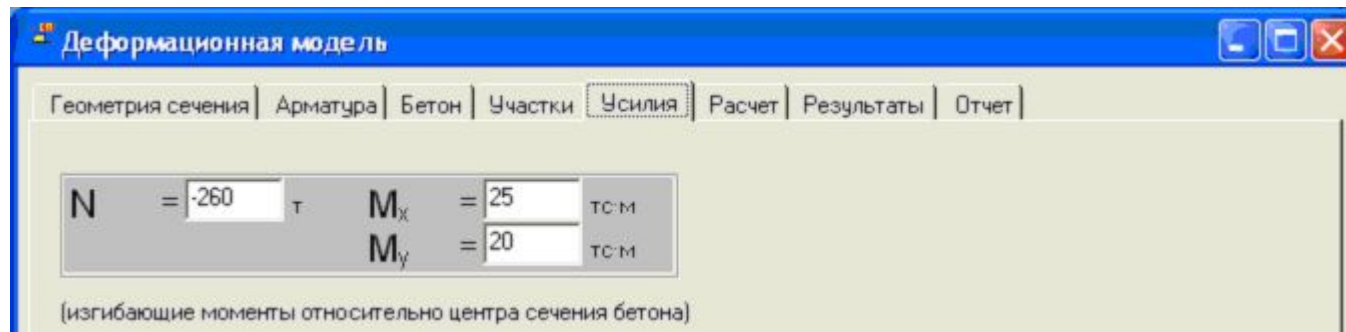


## Последовательность действий в программе «Деформационная модель».

6. Производим разбиение сечения на участки:



7. Вводим значения усилий.

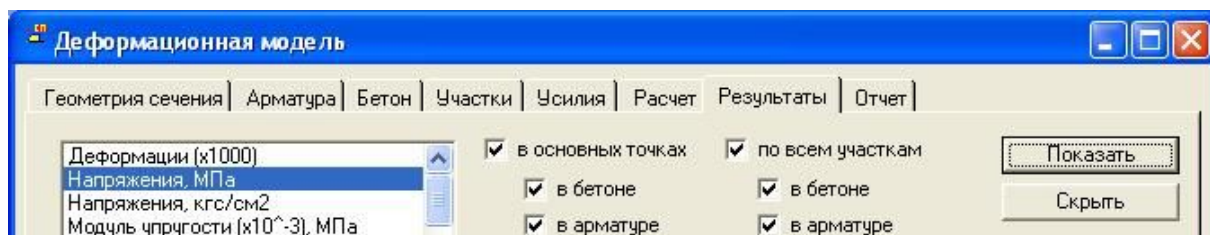




# Последовательность действий в программе «Деформационная модель».

8. Нажмем кнопку **Вычислить**.

9. Установим просмотр значений напряжений в основных точках и в центре каждого участка:



Расчетная схема:



-10,968	-10,318	-9,255	-5,969	0,814	0	0	0	0	0	213,13
-11,714	-10,291	-9,987	-9,128	-4,805	1,02	0	0	0	0	213,13
-12,446	-11,582	-10,799	-9,655	-8,992	-3,642	1,05	0	0	0	213,13
-13,178	-12,314	-11,451	-10,287	-9,724	-8,88	-2,478	0	0	0	213,13
-13,919	-13,046	-12,122	-11,019	-10,455	-9,592	-8,728	-1,314	0	0	213,13
-14,6	-13,778	-12,814	-12,091	-11,187	-10,324	-9,46	-7,788	-0,1505	0	213,13
-14,5	-14,5	-13,646	-12,783	-11,919	-11,056	-10,192	-9,329	-6,624	0,6979	213,13
-14,3	-14,3	-14,378	-13,315	-12,621	-11,788	-10,924	-10,061	-9,197	-5,461	213,13
-14,5	-14,5	-14,5	-14,247	-13,383	-12,52	-11,656	-10,793	-9,929	-9,066	213,13
-14,3	-14,3	-14,3	-14,113	-13,212	-12,352	-11,488	-11,525	-10,651	-9,798	213,13
-14,5	-14,5	-14,5	-14,113	-13,212	-12,352	-11,488	-11,525	-10,651	-9,798	213,13





## Последовательность действий в программе «Деформационная модель».

10. Перейдем на вкладку **Отчет** и ознакомимся с результатами выполнения проверок.

Текст отчета с помощью кнопки **Скопировать отчет** можно скопировать в буфер обмена для последующего использования.

Приведем окончание отчета с результатами выполнения проверок:

Предельные значения относительной деформации арматуры и бетона:

$$e_{s,ult} = 0,025; e_{b,ult} = 0,0035.$$

Максимальные значения относительной деформации арматуры и бетона:

$$e_{s,max} = 0,002642; |e_{b,max}| = 0,00314.$$

Следовательно, условия прочности выполняются. Запас **10,28%**.

Напомним, что в примере 40 Пособия к СНиП 2.03.01-84 запас прочности составил **9,7%**.



# NormFEM – МКЭ - модуль в составе пакета NormCAD

## Программа NormFEM

для расчета усилий в элементах конструкций  
методом конечных элементов  
и передачи в NormCAD таблиц усилий



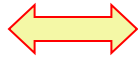
### *Основные возможности NormFEM:*

- статический расчет плоских и пространственных конструкций
- подбор сочетаний нагрузок и воздействий с учетом требований СНиП "Нагрузки и воздействия", СНиП "Строительство в сейсмических районах" и др.
- передача сочетаний усилий и соответствующих коэффициентов условий работы в программу NormCAD для проверок в соответствии с нормативными документами
- учет физической нелинейности (по деформационной модели СП 52-101-2003)
- учет геометрической нелинейности (при предположении малых деформаций)
- расчет пластин ведется на основе использования модели перекрестной сети из стержневых элементов (что упрощает учет физической нелинейности по СП 52-101-2003)
- расчетная схема элементов задается во внешнем графическом редакторе (AutoCAD или ZWCAD)



# NormFEM

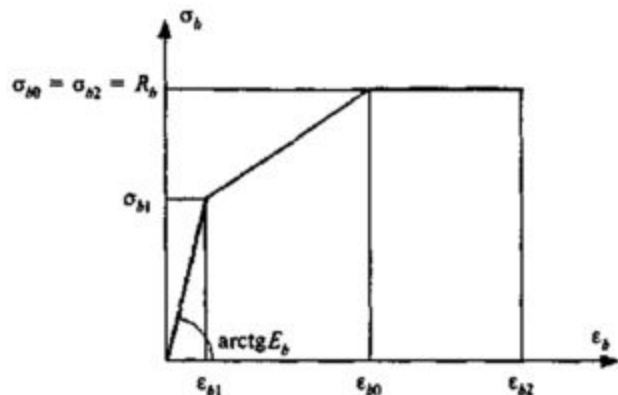
## Основные преимущества NormFEM:



$\gamma_{b1}$   $\gamma_{b2}$   
 $m_{кр}$



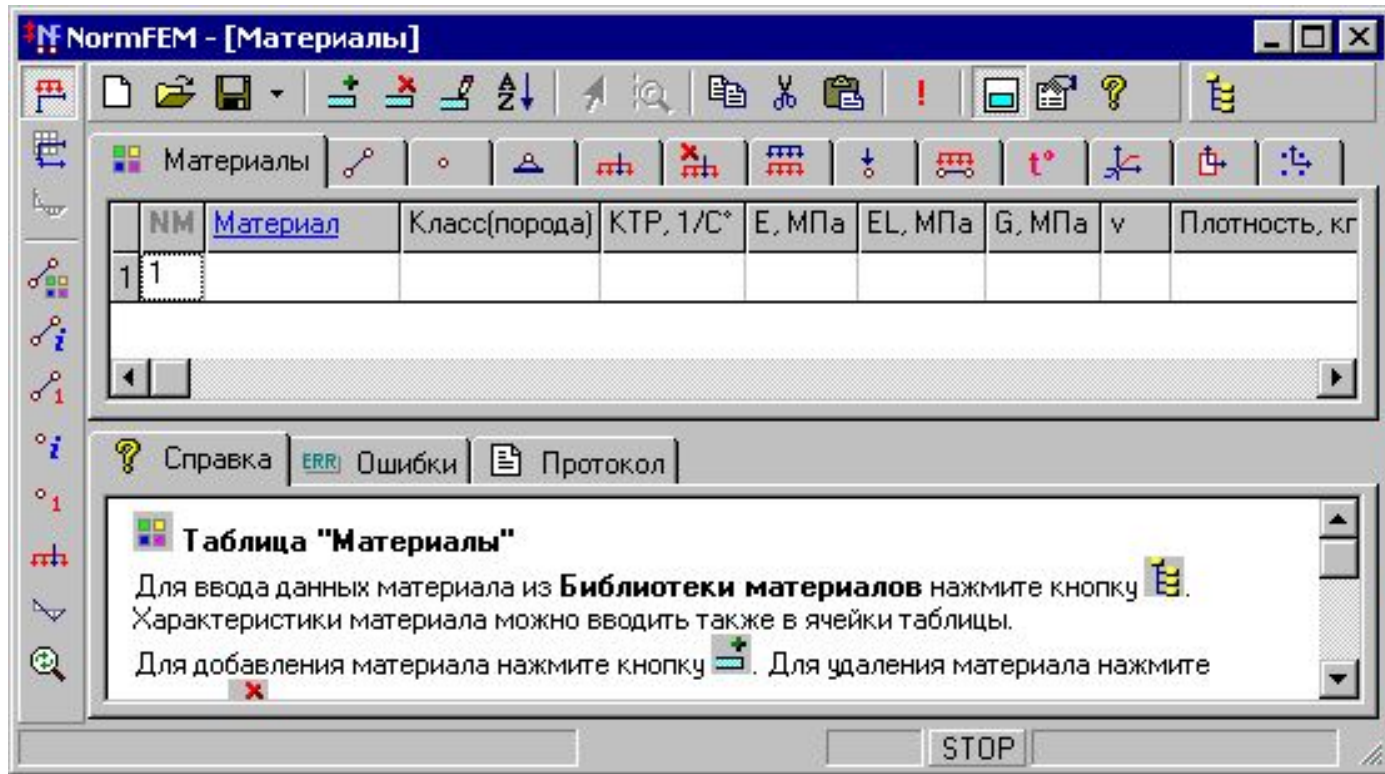
- NormFEM - единственная программа, позволяющая напрямую передавать усилия в NormCAD (без промежуточных действий пользователя)
- Автоматически составляются сочетания нагрузок и воздействий с учетом требований норм
- из NormFEM в NormCAD передаются не только усилия, но и коэффициенты условий работы, учитывающие наличие в сочетаниях кратковременных и сейсмических нагрузок (по СНиП "Нагрузки и воздействия", СНиП "Строительство в сейсмических районах" и др.)
- простой и надежный способ учета физической нелинейности на основе деформационной модели СП 52-101-2003 для стержневых элементов





# NormFEM

## Основное окно программы NormFEM



— панели инструментов с кнопками

— верхняя панель с вкладками

— нижняя панель с вкладками

— кнопка STOP

Режим показа:

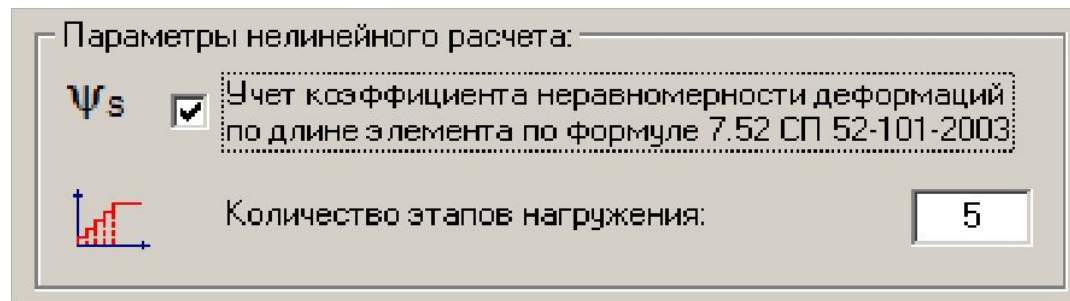
- 1) исходных данных
- 2) информации об узлах и элементах
- 3) результатов расчета

! - запуск на расчет



# Учет физической нелинейности в NormFEM

- За основу взяты положения СП 52-101-2003 и СП 52-103-2007.
- Реализован учет коэффициента неравномерности деформаций по длине элемента  $\Psi_s$  по формуле 7.52 СП 52-101-2003.
- Возможно задать монотонное увеличение интенсивности воздействий – количество этапов нагружения.



- Введены диаграммы материалов по СП 52-101-2003. Возможно подключение других диаграмм.



# Учет физической нелинейности в NormFEM

Таблицы для учета физической нелинейности

Библиотека диаграмм



Диаграммы работы материала



Участки сечения



Участки сечения арматуры

NormFEM - [40] - [Диаграммы работы материала]

Диаграммы работы материала

	NM	Класс	Деформации	Напряжения, МПа	$\epsilon_{\text{до}}$	Деформации длит.	Напряжения длит., МПа	$\epsilon_{\text{до}I}$
1	1	B25	-0,0035; -0,002	-14,5; -14,5; -8,7; 0; 0	0,002	-0,0048; -0,0034; -0,0017	-13,05; -13,05; -7,83; 0; 0,51	0,0034
2	2	A-III	-0,025; -0,0017	-355; -355; 0; 355; 355	0,002	-0,025; -0,001775; 0; 0,0017	-355; -355; 0; 355; 355	

Участки сечения

	NE	Гр. элементов	b, см	h, см	Xo, см	Yo, см	Сетка
1	1		40	60	0	0	10x10

Участки сечения арматуры

	NE	Гр. элементов	NM	Марка материала	A, см <sup>2</sup>	Xo, см	Yo, см
1	1		2	A-III	8,04	-15	25
2	1		2	A-III	8,04	-15	-25
3	1		2	A-III	8,04	15	-25
4	1		2	A-III	8,04	15	25
5	1		2	A-III	3,14	-15	0
6	1		2	A-III	3,14	15	0



# Учет физической нелинейности в NormFEM



## Библиотека диаграмм

Диagramмы

Диagramма для основного материала (бетона) | Арматура

Диagramмы работы материалов

- Бетон
  - С бетонированием в вертикальном положении
    - Влажность выше 75 процентов
    - Влажность ниже 40 процентов
    - Влажность от 40 до 75 процентов
  - С бетонированием в горизонтальном положении
    - Влажность выше 75 процентов
    - Влажность ниже 40 процентов
    - Влажность от 40 до 75 процентов

В25

При кратковременном нагружении:	
Деформации	Напряжения(МПа)
-0,0035	-14,5
-0,002	-14,5
-0,00029	-8,7
0	0
0,000021	0,63
0,0001	1,05

При длительном нагружении:

Деформации	Напряжения(МПа)
-0,0048	-13,05
-0,0034	-13,05
-0,0009135	-7,83
0	0
0,00006615	0,567
0,00024	0,945

Файлы диаграмм ...

OK Отмена



# Последовательность расчета в NormFEM

**Упрощенный алгоритм расчета**  
(использовался в первых версиях NormFEM)

Упругие жесткости



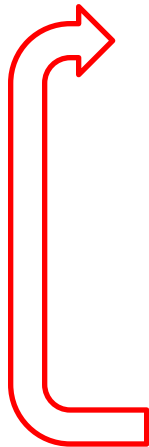
Расчет МКЭ



Усилия



Жесткости  
(по усилиям из статически  
определимой схемы)



**Алгоритма с учетом  
расчетных деформаций**

Упругие жесткости



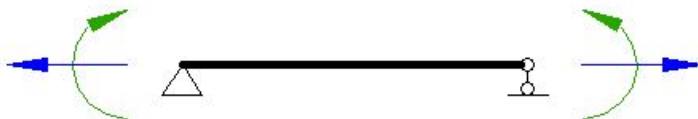
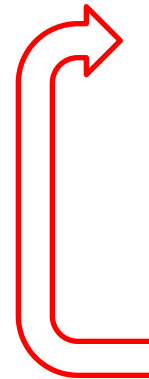
Расчет МКЭ



Деформации



Жесткости



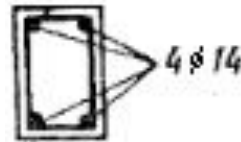
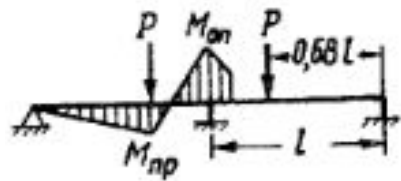
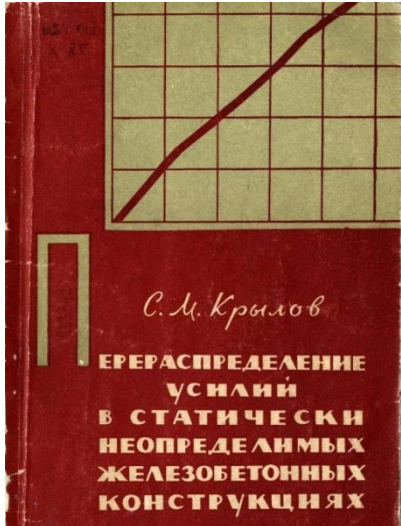
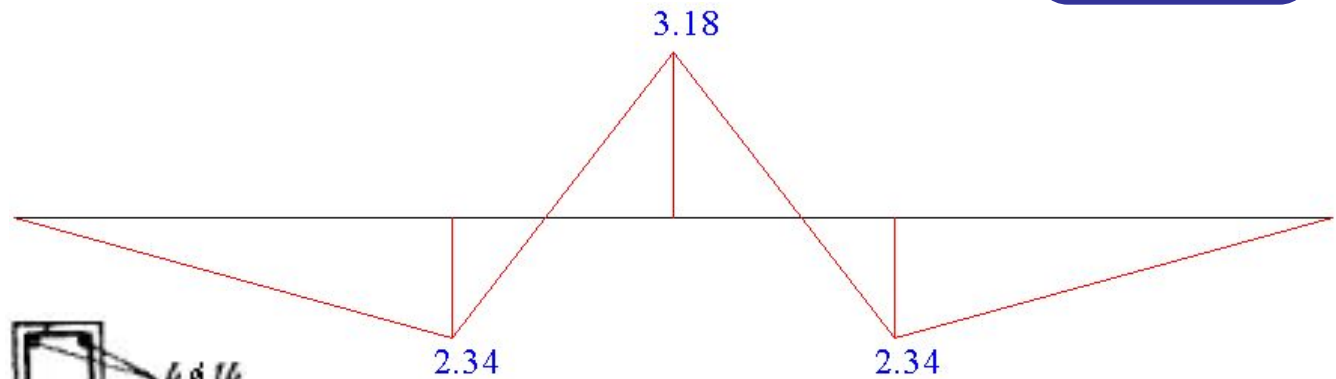




# Результаты расчета в NormFEM

Результаты расчета  
в NormFEM  
М, тс·м

$$\frac{M_{on}}{M_{np}} = 1,35$$



Результаты  
эксперимента



Уточнение алгоритма расчета позволяет  
получать результаты, лучше  
согласующиеся с экспериментом



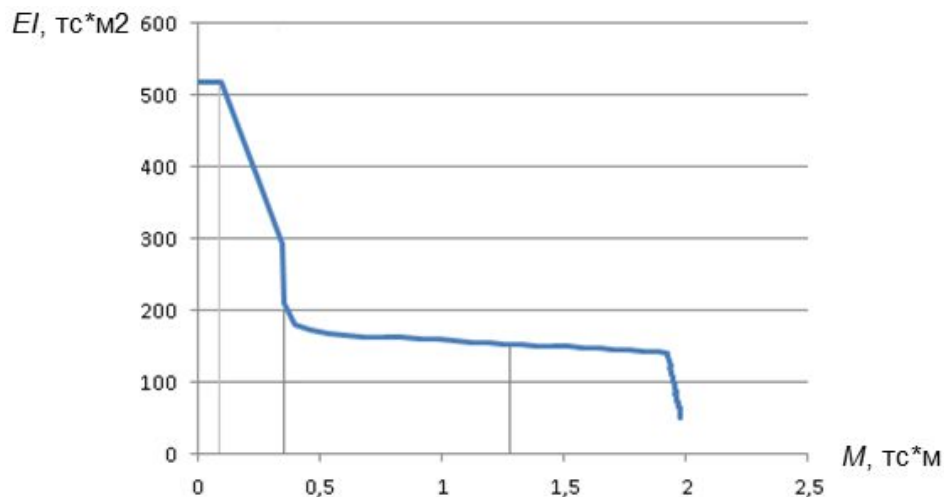
# Диаграмма Момент - Жесткость не работает в зоне пластических шарниров

М. Тихий, И. Ракошник

## РАСЧЕТ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ РАМНЫХ КОНСТРУКЦИЙ В ПЛАСТИЧЕСКОЙ СТАДИИ. ПЕРЕРАСПРЕДЕЛЕНИЕ УСИЛИЙ

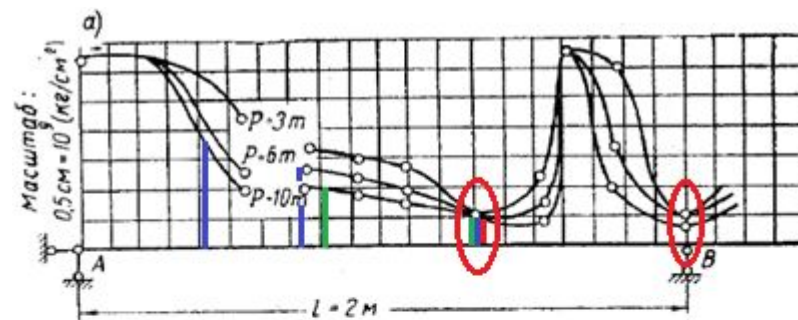
Допустим, что поворот  $\theta$  сосредоточен в критическом сечении; тогда получим здесь *пластический шарнир*.

... шарнир воспринимает приращение изгибающего момента вплоть до разрушения. Такой шарнир назовем *несовершенным* в отличие от пластического шарнира *совершенного*, в котором предполагается, что он, начиная с определенного изгибающего момента, будет еще в состоянии нести приращения деформаций, но ни в коей степени не приращение моментов.

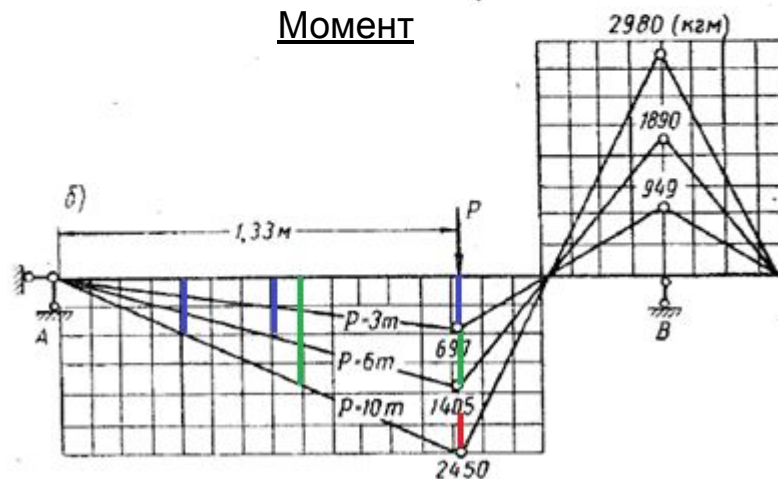


### Результаты эксперимента

#### Жесткость



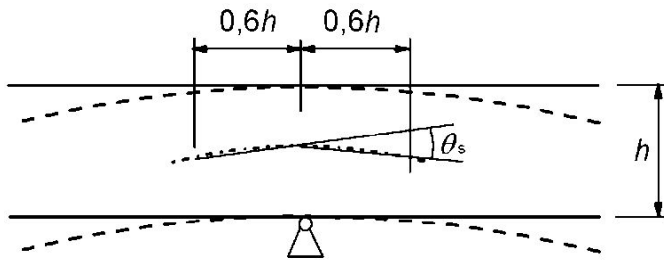
#### Момент





# Модель с ограниченной зоной пластических деформаций

По EN 1992-1-1 при пластическом расчете ограничивается угол поворота участков длиной  $1,2 h$



$$Dl = De_{pmi}$$

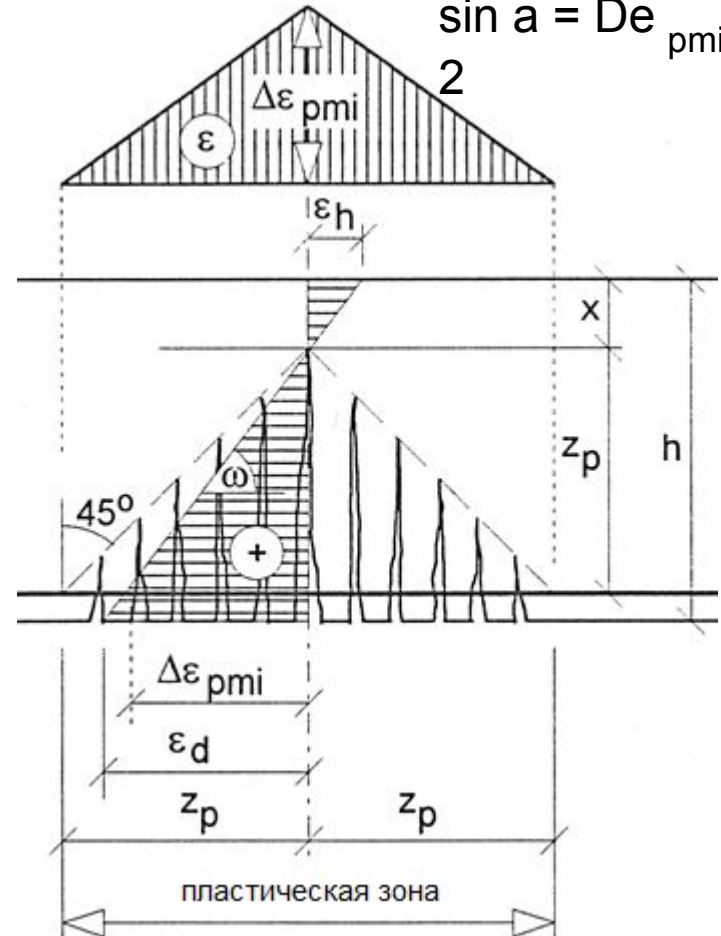
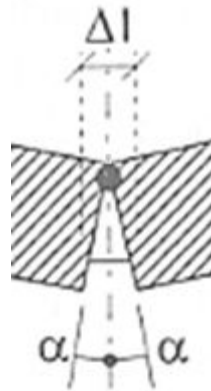
$$z \sin a = Dl / (2 z_p)$$

$$\sin a = De_{pmi} / 2$$

**PREDPÄTÝ BETÓN**  
 NAVRHOVANIE PODĽA SPOLOČNÝCH  
 EURÓPSKYCH NÓRIEM

IVAN HARVAN

STU SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE

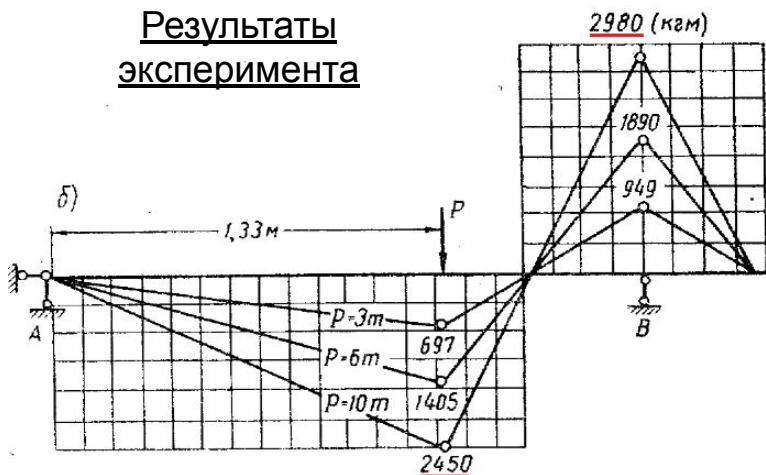




# Модель с ограниченной зоной пластических деформаций в NormFEM

№	NN	Группа эл.	NM	Класс(порода)	Профиль	Vx, см	Vy, см	A, см <sup>2</sup>	Jx, см <sup>4</sup>	Jy, см <sup>4</sup>	Jt, см <sup>4</sup>	Угол	Плита	X	Y	физ.нелин.
1	1		1	B20		17	22	374	15084,6	9007,16	36028,6		<input type="checkbox"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	1-без учета
2	2		1	B20		17	22	374	15084,6	9007,16	36028,6		<input type="checkbox"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	0-с учетом

Результаты эксперимента



Результаты расчета в NormFEM  
M, тс·м

$$\frac{M_{on}}{M_{np}} = 1,22$$

