



С.С. Кутателадзе

МАТЕМАТИКА И ЭКОНОМИКА Л.В. КАНТОРОВИЧА

Инвентаризация памяти

- 19 января 2012 г. столетие со дня рождения Леонида Витальевича Канторовича, всемирно известного математика и экономиста. Вундеркинд, окончивший университет в 18 лет и ставший профессором в 20, академик по математике и лауреат Нобелевской премии по экономике — редкие обстоятельства жизни, достойные некоторого внимания сами по себе.
- Однако извлечь из них полезные для себя выводы вряд ли возможно — события крайне редкие и маловероятные. Другое дело творческое наследие человека — сделанное для других остается, пока оно не забыто, испорчено или оболгано.
- Юбилейная дата — повод для инвентаризации памяти. Вспоминая вклад нашего соотечественника в культуру, мы сохраняем его духовный мир для будущего...

Вклад в науку

- Проективные множества
- Пространства Канторовича
- Линейное программирование
- Метрика Канторовича — Рубинштейна
- Рациональный раскрой
- «Канторович и Акилов»
- Оптимальные цены
- Наилучшее использование ресурсов

Истоки математики и ЭКОНОМИКИ

- Становление науки как инструмента понимания — долгий и сложный процесс. Зарождение ординального счета фиксировано палеолитическими находками, отделенными десятками тысяч лет от явления разумного и хозяйствующего человека. Экономическая практика предваряет предысторию математики, сформировавшуюся в науку доказательных вычислений в Древней Греции примерно 2500 лет тому назад.
- Целенаправленное поведение людей в условиях ограниченных ресурсов стало объектом науки совсем недавно. Датой рождения экономики как науки принято считать 9 марта 1776 г. — день публикации сочинения Адама Смита «Исследование о природе и причинах богатства народов».

Предмет математики

- Предмет математики — количественные и пространственные формы человеческого мышления.
- Математика функционирует как наука доказательных исчислений, постоянно обновляясь и наращивая объем накопленных знаний.
- Со временем меняются требования к строгости доказательств и технологиям их получения, возникает деление математики на чистую и прикладную.

Математика и экономика

- Математика изучает формы мышления. Предмет экономики – обстоятельства человеческого поведения. Математика абстрактна и доказательна, а профессиональные решения математиков не задевают обычную жизнь людей. Экономика конкретна и декларативна, а практические упражнения экономистов основательно жизнь меняют.
- Цель математики – безупречные истины и методы их получения. Цель экономики – индивидуальное благополучие и пути его достижения.
- Математика не вмешивается в личную жизнь человека. Экономика задевает его кошелек и кошелку.
- Список коренных различий математики и экономики бесконечен.

Математизация экономики

- XIX век отмечен первыми попытками применения математических методов в экономике в работах Антуана Огюста Курно, Карла Маркса, Уильяма Стенли Джевонса, Леона Вальраса и его преемника по Лозаннскому университету Вильфредо Парето.
- Математическая экономика – новация XX века. Именно тогда возникло понимание того, что экономические проблемы требуют совершенно нового математического аппарата.
- К экономической проблематике обратились математики первой величины – Джон фон Нейман и Леонид Канторович. Теория игр как аппарат изучения экономического поведения или линейное программирование как аппарат принятия решений привели к стремительной математизации экономики.

Разрывы ментальности

- Между точным и гуманитарным стилями мышления существуют принципиальные различия. Люди склонны к рассуждениям по аналогии и методу неполной индукции, рождающим иллюзию общезначимости знакомых приемов. Различия технологий не всегда выделены отчетливо, что, в свою очередь, способствует самоизоляции и вырождению громадных разделов науки.
- Разница в менталитете математиков и экономистов затрудняет их взаимопонимание и сотрудничество. Невидимы, но вездесущи перегородки мышления, изолирующие математическое сообщество от своего экономического визави.

Консолидация мышления

- Впечатляющее многообразие направлений исследований Канторовича объединяется как его личностью, так и его методическими установками. Он всегда подчеркивал внутреннее единство науки, взаимопроникновение идей и методов, необходимых для решения самых разнообразных теоретических и прикладных проблем математики и экономики.
- Характерной чертой творчества Канторовича была ориентация на наиболее трудные проблемы и самые перспективные идеи математики и экономики своего времени.

Канторович и дескрипция

- Первые работы Канторовича относились к популярной в те годы тематике дескриптивной теории множеств. Лидер этого направления Н. Н. Лузин в 1934 г. писал Канторовичу:
- *«Вы должны знать, каково мое отношение к Вам. Вас всего, как человека, я не знаю еще, но угадываю мягкий чарующий характер. Но то что я точно знаю – это размер Ваших духовных сил, которые, насколько я привык угадывать людей, представляют в науке неограниченные возможности. Я не стану произносить соответствующего слова – зачем? Талант – это слишком мало. Вы имеете право на большее...» .*

Математизация социума

- В 1920-1930 годы социальные феномены стали предметом невербальных исследований, требовавших создания специальных математических методов.
- Существенно возросла потребность в статистической обработке данных.
- Создание новых производств, внедрение передовых технологий, оборудования и материалов вызвали потребность совершенствования техники расчетов.
- Бурному развитию прикладной математики способствовала автоматизация и механизация процесса вычислений.

Союз анализа и приложений

- В 1930 годы прикладная математика стремительно сближается с функциональным анализом.
- Существенную роль в этом процессе сыграли исследования Джона фон Неймана по математическим основам квантовой механики и теории игр как аппарата экономических исследований.
- В России пионером и генератором новых синтетических идей стал Канторович.

Пространства Канторовича

- Целостность мышления проявлялась во всем творчестве Канторовича. Идеи линейного программирования были тесно связаны с его методологическими установками в области математики.
- В середине 1930 годов центральное место в математических исследованиях Канторовича занимал функциональный анализ.
- Главным своим математическим достижением в этой области Канторович считал выделение специального класса порядково полных упорядоченных векторных пространств, которые в отечественной литературе именуют K -пространствами или пространствами Канторовича, так как в своих рабочих тетрадях Канторович писал о «моих пространствах» .

Принцип Канторовича

- *«В этой заметке я определяю новый тип пространств, которые я называю линейными полуупорядоченными пространствами. Введение этих пространств позволяет изучать линейные операции одного общего класса (операции, значения которых принадлежат такому пространству) как линейные функционалы».*
- Канторович, Докл. АН СССР (1935).

Линейные неравенства

- Пространства Канторовича дали рамки для построения теории линейных неравенств, необходимой в приближенных вычислениях для оценок точности. Концепция неравенств весьма приспособлена для задач, связанных с приближенными вычислениями, где существенную роль играют разнообразные оценки точности полученных результатов.
- Поставщиком линейных неравенств была экономическая проблематика. Целесообразное и оптимальное поведение в условиях ограниченных ресурсов естественно формулировать в терминах частичного сравнения.

Место неравенств

- Концепция линейных неравенств неразрывна с выпуклостью и, стало быть, геометрией и функциональным анализом.
- Выпуклый многогранник – конечной системы линейных неравенств. В случае общего положения выпуклые множества суть решения подходящих систем линейных неравенств.
- Функциональный анализ предполагает наличие нетривиальных непрерывных линейных функционалов. Наличие такого функционала эквивалентно существованию непустого собственного открытого выпуклого множества в объемлющем пространстве.

Линейное программирование

- Линейное программирование – техника максимизации линейного функционала на множестве положительных решений системы линейных неравенств.
- Неудивительно, что открытие линейного программирования последовало вскоре за созданием основ теории пространств Канторовича.
- Термин «линейное программирование» был предложен в 1951 г. американским экономистом Т. Купмансом. В 1975 г. Канторович и Купманс получили Нобелевскую премию по экономическим наукам с формулировкой «за их вклад в теорию оптимального распределения ресурсов». Особой заслугой Купманса стала пропаганда методов линейного программирования и защита приоритета Канторовича в открытии этих методов.
- В США линейное программирование возникло только в 1947 г. в работах Джорджа Данцига.

Открытие в экономике

- С оптимальным планом любой линейной программы автоматически связаны оптимальные цены или «объективно обусловленные оценки». Последнее громоздкое словосочетание Канторович выбрал из тактических соображений для повышения «критикоустойчивости» термина.
- Концепция оптимальных цен и взаимозависимость оптимальных решений и оптимальных цен – такова краткая суть экономического открытия Канторовича.

Универсальная эвристика

- Абстрактные идеи Канторовича в теории K -пространств связаны с линейным программированием и приближенными методами анализа.
- Идеи линейного программирования имманентны теории K -пространств. Выполнение любого из принятых вариантов формулировок принципа двойственности линейного программирования в абстрактной математической структуре неизбежно приводит к тому, что исходный объект является K -пространством.

Функциональный анализ и прикладная математика

- В конце 1940 годов Канторович сформулировал и развил тезис о взаимосвязи функционального анализа и прикладной математики:
- «Установилась традиция считать функциональный анализ дисциплиной чисто теоретической, далекой от непосредственных приложений, которая в практических вопросах не может быть использована. Цель ... в известной мере разрушить эту традицию, указать на связь функционального анализа с вопросами прикладной математики...».

Три технологии

- Технологию **мажорирования** в общих упорядоченных векторных пространствах Канторович взял за основу исследования вариантов метода Ньютона в банаховых пространствах.
- **Дискретизация** – приближение бесконечномерных пространств и операторов их конечномерными аналогами - связана с удивительным универсальным пониманием вычислительной математики как науки о конечных приближениях общих компактов.
- Новизна экстремальных задач, возникающих в социальных науках, связана с наличием многомерных
- противоречивых целей, ставящих на первое место проблему согласования интересов или **скаляризацию** векторных целей.

Дискретизация

- Подводя итоги своим исследованиям по общей теории приближенных методов, Канторович писал:
- « Имеется весьма большое число различных методов для разных классов задач и уравнений, и их конструирование и исследование в каждом конкретном случае представляло немалые трудности. Поэтому возникла мысль о построении общей теории, которая позволяла бы их строить и исследовать из некоего единого источника. Эта теория основывалась на идее связи данного пространства, в котором задано исследуемое уравнение, с некоторым более простым, в которое исходное пространство отображается. На основе исследования „приближенного уравнения“ в более простом пространстве открывалась возможность строить и изучать конкретные приближенные методы в исходном пространстве...».

Гипераппроксимация

- Многообещающие возможности дискретизации открывает новый метод гипераппроксимации, связанный с идеями инфинитезимального анализа. Классическая дискретизация использует аппроксимацию бесконечномерного пространства с помощью лежащих внутри его конечномерных подпространств. В рамках нестандартной теории множеств допустимо аппроксимировать бесконечномерные векторные пространства более широкими внешними конечномерными пространствами. Разумеется, размерности таких гипераппроксимаций представляют собой актуальные бесконечно большие натуральные числа.
- Инфинитезимальные методы позволяют предложить и новые схемы гипераппроксимации общих компактных пространств. В качестве таких приближений к компактному множеству сверху могут выступать произвольные конечные внутренние множества, содержащие все стандартные элементы подлежащего аппроксимации компакта.

Скаляризация

- Специфические трудности практических задач и необходимость сведения их к числовому случаю были связаны в творчестве Канторовича с размышлениями о природе вещественных чисел. Элементы своих K -пространств он рассматривал как обобщенные числа, тем самым развивая идеи, которые в наше время принято называть **скаляризацией**.
- Скаляризация в самом общем смысле - это приведение к числу. Число представляет собой меру количества. Значит скаляризации имеет общематематическое значение.

Числа Канторовича

- Скаляризация по Канторовичу связана с одной из самых ярких страниц математики прошлого века - с проблемой континуума. Метод форсинга Коэна был упрощен в середине 1960 годов с использованием аппарата булевых алгебр и новой технологии математического моделирования, использующей нестандартные модели теории множеств.
- Прогресс возникшего на этой основе булевозначного анализа продемонстрировал фундаментальное значение расширенных K -пространств. Каждое из таких пространств, как оказалось совершенно неожиданно, служит равноправной моделью вещественной прямой и, значит, играет в математике ту же фундаментальную роль.
- Пространства Канторовича дали новые модели поля вещественных чисел и обрели бессмертие.

Уроки Канторовича

- Противоречие между блестящими достижениями и детская неприспособленностью к практической линии жизни - один из важных парадоксов, оставленных нам Канторовичем. Сама его жизнь стала ярким и загадочным гуманитарным феноменом.
- Интравертность Канторовича, очевидная в личном общении, совершенно неожиданно сочеталась с публичной экстравертностью. Отсутствие ораторского дара соседствовало с глубиной логики и особыми приемами полемики. Его внутренняя свобода и самодостаточность, мягкость, доброта и исключительная скромность стояли в одном ряду с целенаправленной жесткостью и неутомимостью на пути к поставленной цели.
- Канторович дал нам образец наилучшего использования ресурсов личности в условиях внешних и внутренних ограничений.

Мемы для будущего

- Мемы Канторовича востребованы человечеством, что видно по учебным планам любого экономического или математического факультета в мире. Аппарат математики и идея оптимальности стали подручными орудиями любого практикующего экономиста. Новые методы поставили непреодолимую планку для традиционалистов, рассматривающих экономику как полигон технологий типа маккиавелизма, лизоблюдства, здравого смысла и форсайта.
- Экономика как вечный партнер математики избежит слияния с любой эзотерической частью гуманитарных наук, политики или беллетристики. Новые поколения математиков будут смотреть на загадочные проблемы экономики как на бездонный источник вдохновения и привлекательную арену приложения и совершенствования своих безупречно строгих методов.
- **Вычисление победит гадание.**