

# Жизнь по законам математики

# Цели урока

- Изучить историю возникновения тригонометрии и понять, как зарождались математические понятия, связанные с ней
- Узнать, в каких сферах жизни применяется тригонометрия
- Научиться использовать знания, полученные на уроках математики, в задачах с практическим содержанием

«Великая книга природы может быть прочтена только теми, кто знает язык, на котором она написана, и ЭТОТ ЯЗЫК — МАТЕМАТИКА.»



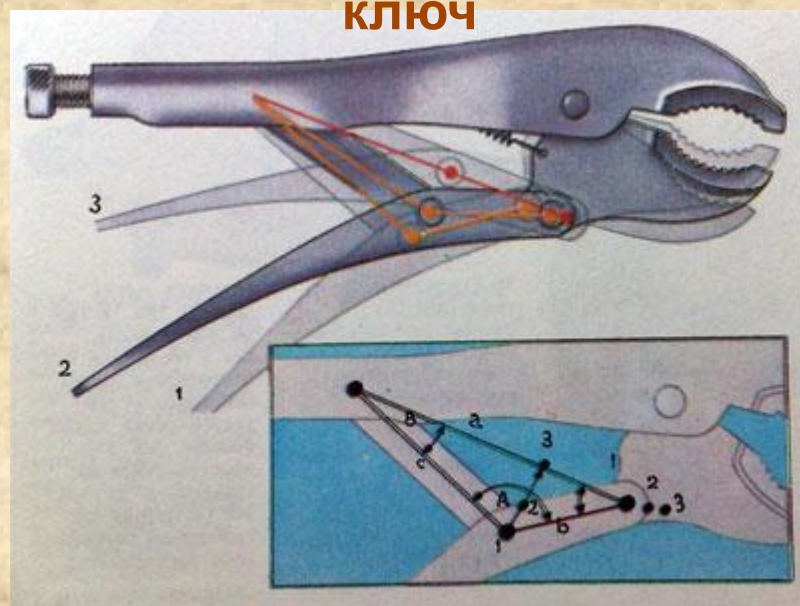
Галилео Галилей  
(1564 – 1642)

**Какие житейские ситуации  
повлияли на  
возникновение  
тригонометрических  
функций?**

## Геодезическая съёмка местности

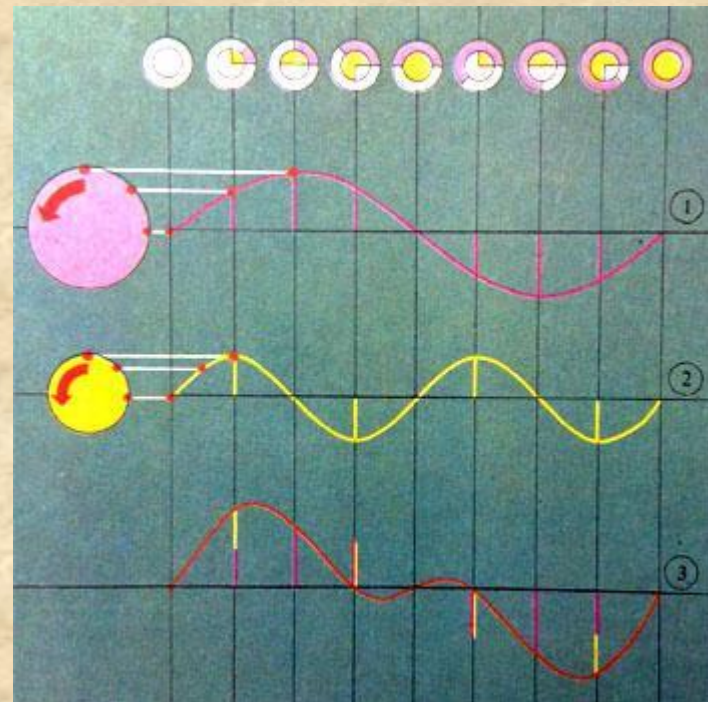
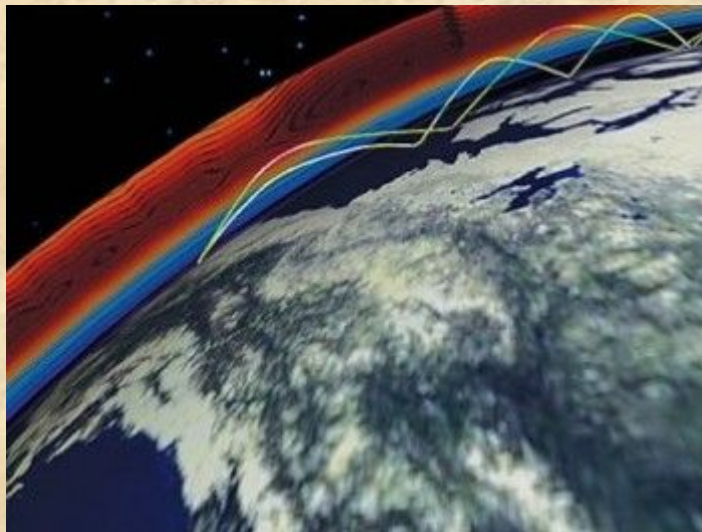
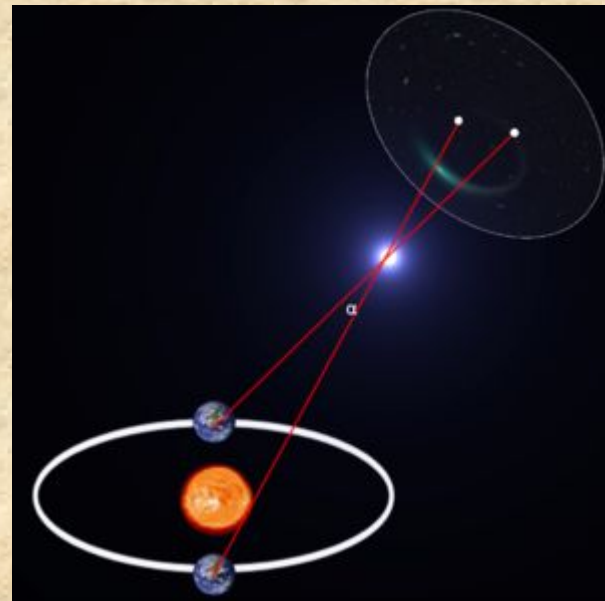


## Самозахватывающий ключ





Квадрант



Пучок

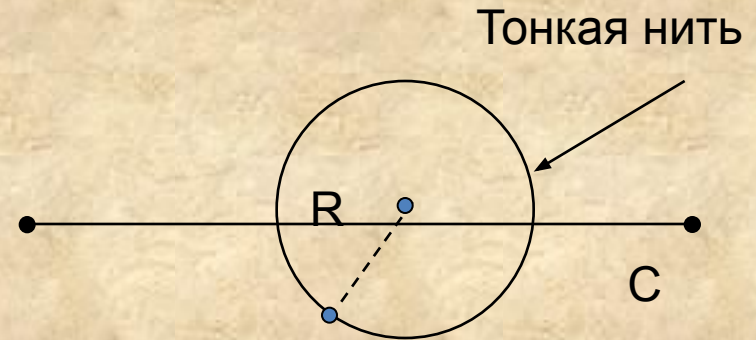
Современные инженеры и техники, создающие различные машины и механизмы, в которых происходит преобразование круговых движений в прямолинейные и обратно, должны знать теорию тригонометрических функций любых углов.

Для начала рассмотрим модель:

**Длина  
окружности**

# Длина окружности

Представим себе нить в форме окружности. Разрежем её и растянем за концы.



Длина полученного отрезка и есть длина окружности.



Задача 1. Вообразите, что вы обошли землю по экватору. На сколько при этом верхушка вашей головы прошла более длинный путь, чем кончик вашей ноги?

Решение.

- 1) Ноги прошли путь  $2\pi R$ , где  $R$  радиус земного шара.
- 2) Верхушка головы  $2\pi(R + 1,7)$ , где 1,7м рост человека.
- 3) Разность путей равна  $2\pi(R + 1,7) - 2\pi R = 2\pi \cdot 1,7 = 10,7\text{м}$ .  
Итак голова прошла путь на 10,7 м больше, чем ноги.

Ответ: 10,7 м.

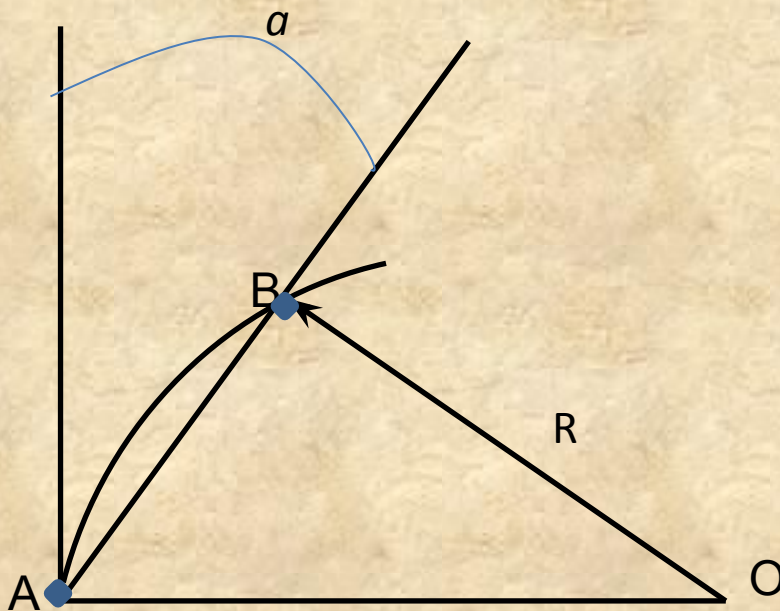


**Задача 2.** Вечером автобус на повороте радиусом закругления  $R = 100$  м освещает дорогу светом, расходящимся от фар, под углом  $\alpha \sim 2^\circ$  к направлению движения. Какова длина дороги, обозримой водителем на повороте?

Решение.

1. Пусть автомобиль находится в точке А. Тогда фары освещают дугу АВ, длину которой и требуется найти.
2. Соединим точки А и В с центром окружности О. Угол  $\alpha$  образован касательной к окружности и хордой. Поэтому его величина равна половине угловой величины дуги АВ, тогда:

$$l = \frac{2\pi R}{360} \cdot 4 \approx 7 \text{ м}$$

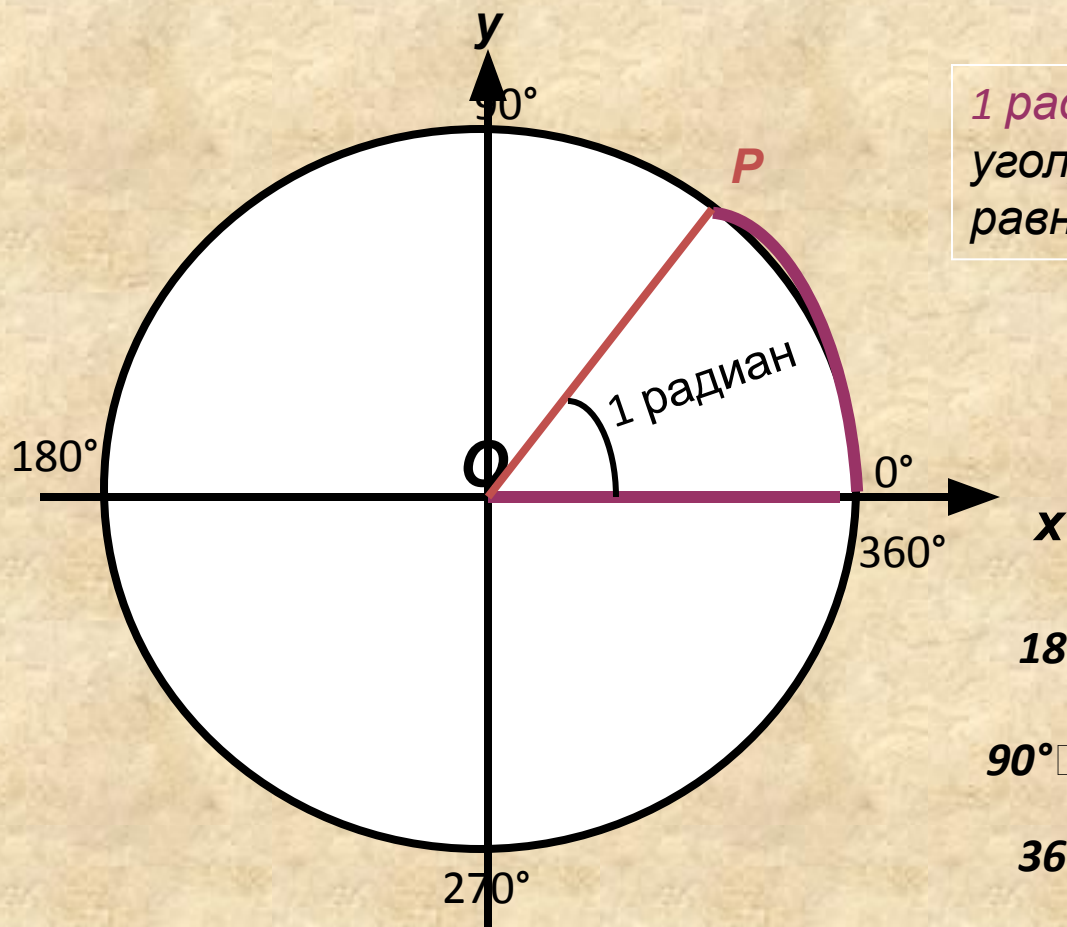


## Модель 2. Радианное измерение дуг и углов

Существуют различные способы измерения дуг и углов. Механики чаще измеряют углы, образуемые при вращательных движениях. Всем известно выражение «обороты двигателя». Астроном – углы, образуемые при вращении Земли вокруг оси (долгота). Землемеры – измеряет углы в градусных величинах.

Наиболее удобной мерой измерения углов и дуг, связанных с вращательными движениями оказалась радианная мера.

## Радианная мера угла



1 радиан это центральный угол, длина дуги которого равна радиусу окружности

$$1 \text{ радиан} \approx 57^\circ$$

$$180^\circ = \pi \text{ рад}$$

$$180^\circ \square \text{ развёрнутый угол} \square \pi$$

$$90^\circ \square \text{ прямой угол} \square \frac{\pi}{2}$$

$$360^\circ \square \text{ полный угол} \square 2\pi$$

Формула перехода от градусной меры к радианной:

$$\alpha \text{ рад} = \frac{\pi}{180} \cdot \alpha^\circ$$

Формула перехода от радианной меры к градусной:

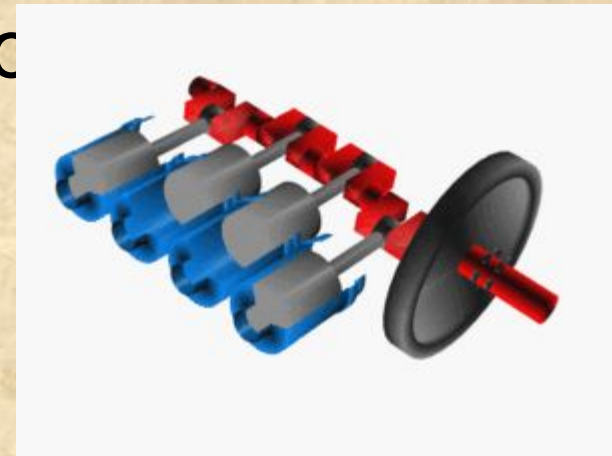
$$\alpha^\circ = \frac{180}{\pi} \cdot \alpha \text{ рад}$$

**Задача 2.** Маховик трактора имеет в диаметре 0,5 м и делает 1980 оборотов в минуту.

а) Выразите в радианной мере угловую скорость  $\omega$  маховика.

б) Выразите в радианах, а затем в метрах длину дуги  $l$ , описанную за  $t$  часов точкой, взятой на ободу маховика.

в) Найдите линейную скорость точки.

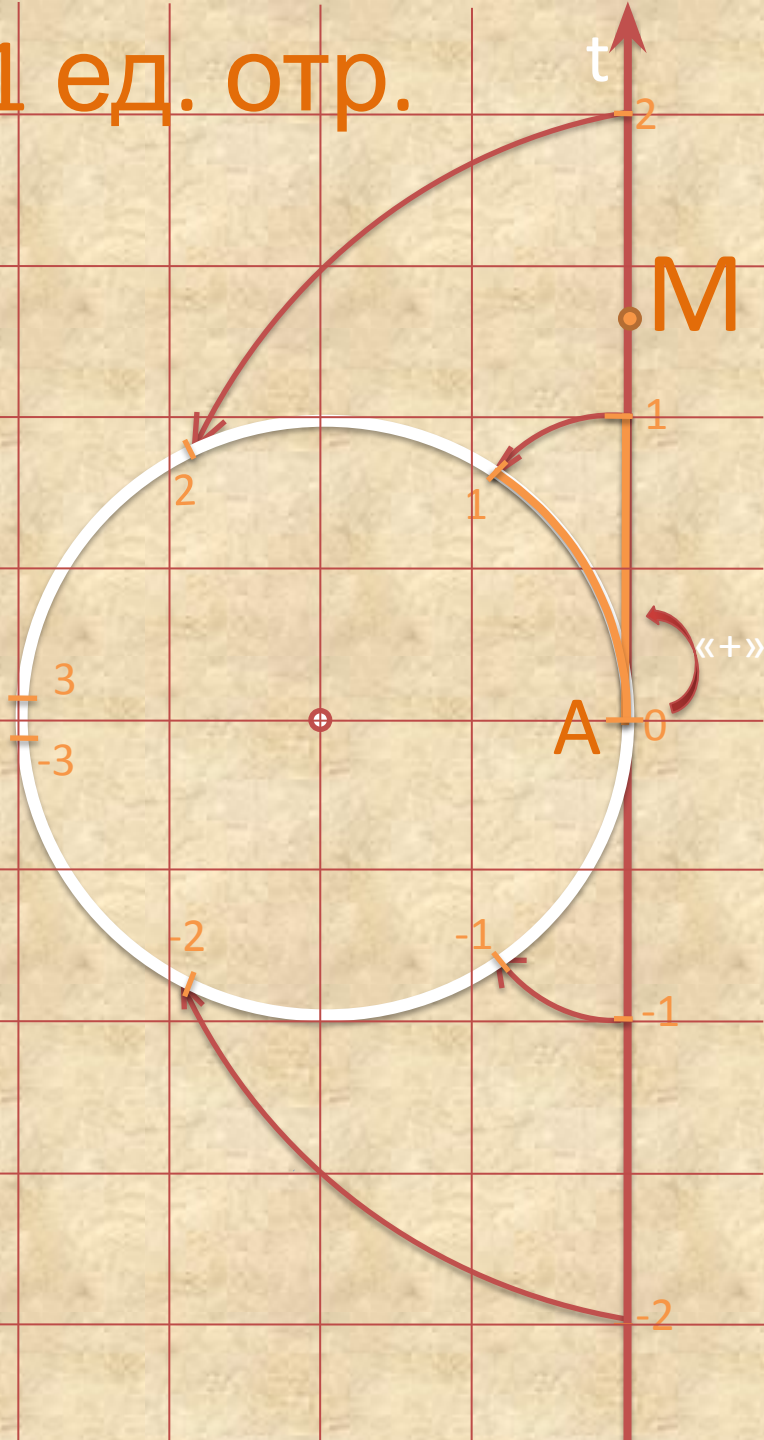


Периодический характер имеют многие световые, звуковые, электромагнитные явления, а также целый ряд явлений, наблюдаемых нами в самой природе (движение планет, смена дня и ночи, смена времен года и т.д.) и в организме человека (работа сердца).

Закономерности периодических явлений описываются функциями. Изучение таких функций значительно облегчает установление соответствия между действительными числами и точками окружности.

## **Модель 3. Координатная окружность**

$R=1$  ед. отр.



Каждой точке числовой  
прямой соответствует  
единственная точка  
числовой окружности.

Длина дуги равна  
длине  
единичного отрезка

## Задача.

Колесо автомобиля вращается с угловой скоростью  $\pi$  рад/с.

Найти число оборотов:

а) за 25с

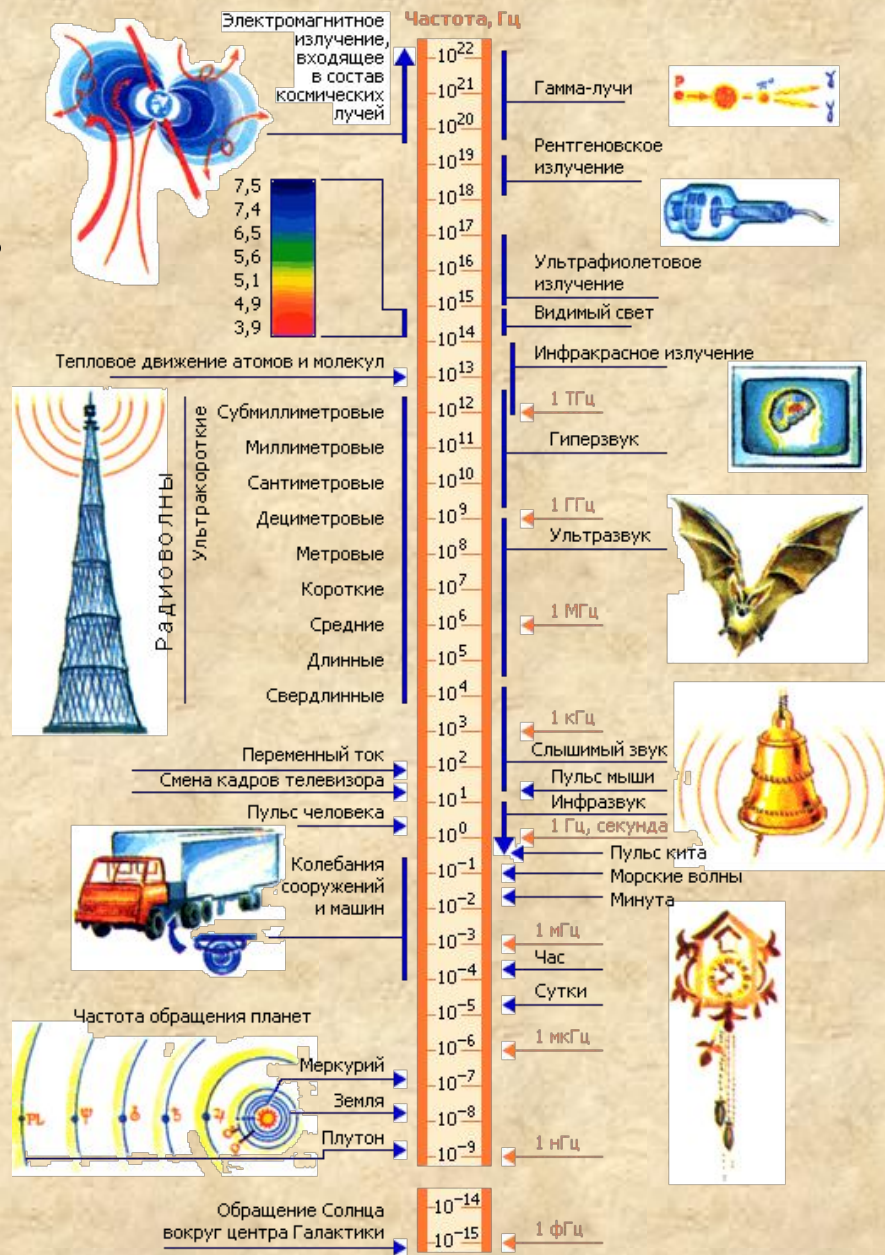
б) за 1 мин 10 с



# Колебания

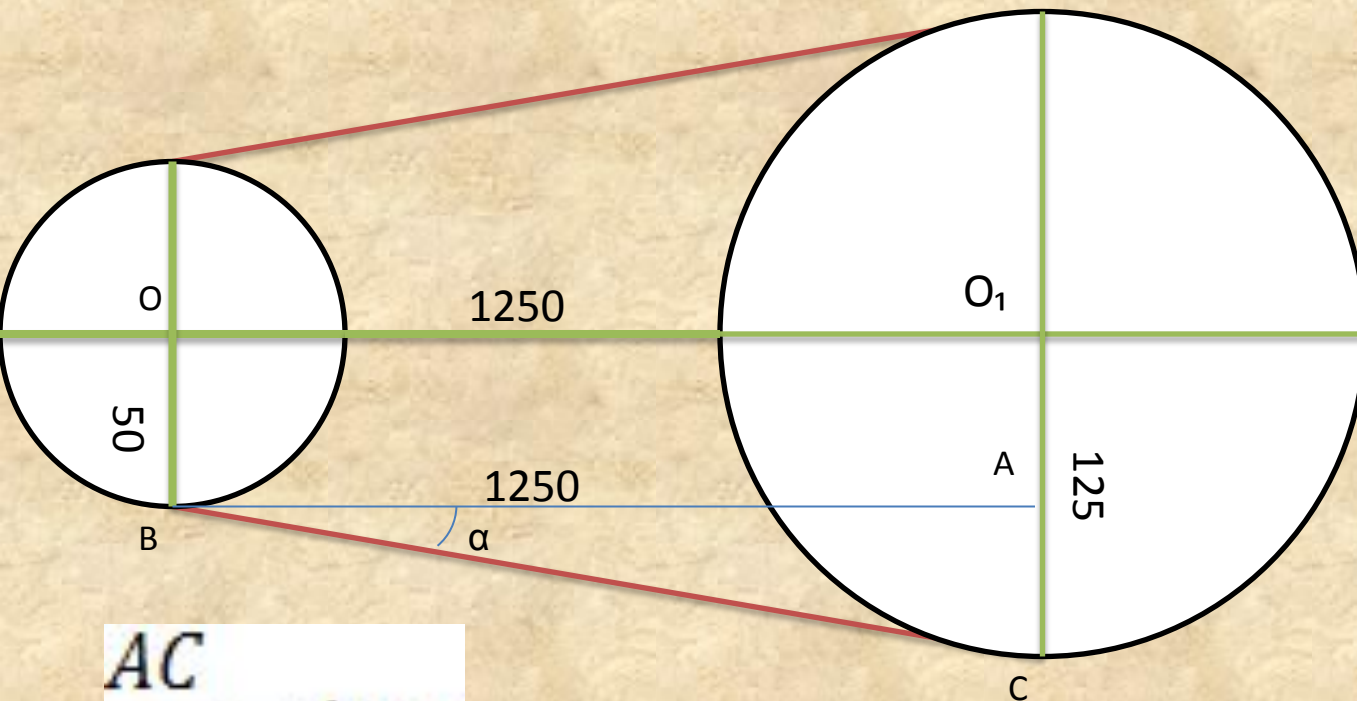
– один из самых распространенных процессов в природе и технике.

Даже наше каждодневное хождение на работу и возвращение домой попадает под определение колебаний, которые трактуются как процессы, точно или приблизительно повторяющиеся через равные промежутки времени.



Задача. Для двух шкивов, соединенных ременной передачей вычислите углы  $\alpha$  при прямой передаче и  $\beta$  при перекрестной, если диаметры шкивов  $D=250$  мм и  $d = 100$  мм, а расстояние между центрами шкивов  $l=1250$  мм

# Случай 1



Дано:

$$OO_1 = 1250 \text{ мм}$$

$$OB = 50 \text{ мм}$$

$$O_1C = 125 \text{ мм}$$

Найти

$\alpha$ -?

$$\frac{AC}{AB} = \operatorname{tg} \alpha$$

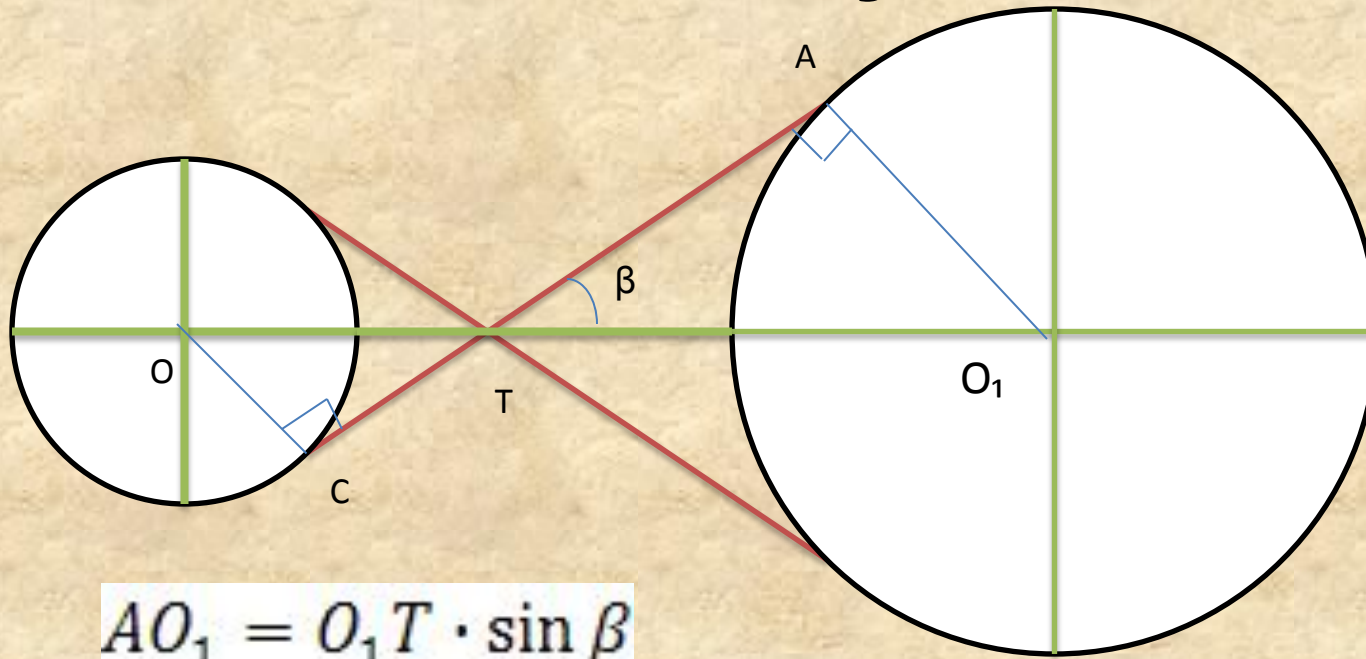
$$AB = l$$

$$AC = R - r$$

$$\operatorname{tg} \alpha = 0,06$$

$$\alpha = 3^\circ 26'$$

# Случай 2



Дано:

$$OO_1 = 1250 \text{ мм}$$

$$OC = 50 \text{ мм}$$

$$O_1A = 125 \text{ мм}$$

Найти

$\beta$ -?

$$AO_1 = O_1T \cdot \sin \beta$$

$$\begin{cases} R = O_1T \cdot \sin \beta, \\ r = OT \cdot \sin \beta; \end{cases}$$

$$R + r = (O_1T + OT) \cdot \sin \beta, \quad O_1T + OT = l$$

$$R + r = l \cdot \sin \beta$$

$$\sin \beta = 0,14$$

$$\beta = 8^\circ$$

Ответ  $3^\circ 26'; 8^\circ$

Простые гармонические колебания описываются с помощью функций синус и

$$y = A \cdot \overset{\text{косинус:}}{\cos}(\omega x + \varphi)$$

$$y = A \cdot \sin(\omega x + \varphi)$$

$A$  – амплитуда,  $\omega$  – частота,  $\varphi$  – начальная фаза колебаний

Существует легенда о том, что еще в древнем Китае монахи день за днем вели наблюдения за человеком, записывая параметры его физической активности, умственных способностей и эмоционального состояния. В результате многолетних исследований они пришли к выводу, что эти три функции являются периодическими с периодами для физической активности 23 дня, эмоциональной – 28 дней и интеллектуальной – 33 дня.

Функции состояния человека в момент его рождения равны нулю, затем начинают возрастать, и каждая за свой период принимает одно максимальное положительное и одно минимальное отрицательное значения.

Проанализировав эту информацию, можно построить следующую модель:

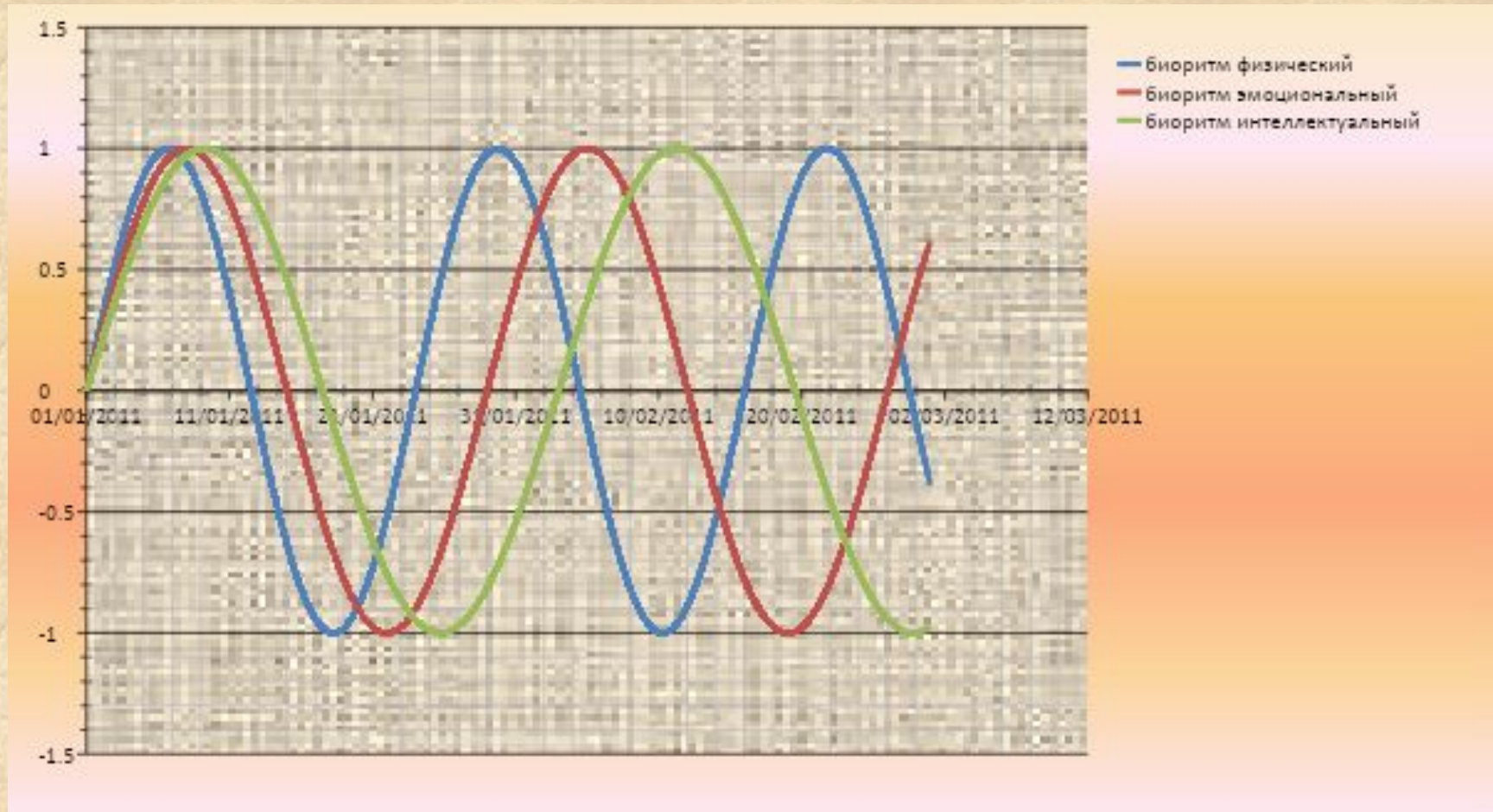
$$f(x) = \frac{\sin(2\pi \cdot (t - t_0))}{T_r}$$

где  $t$  – время,  $T_r$  – периоды,  $r$  – номер периода.  
Началом всех трех кривых является день рождения  $t=t_0$ ,  $\sin(0)=0$ .

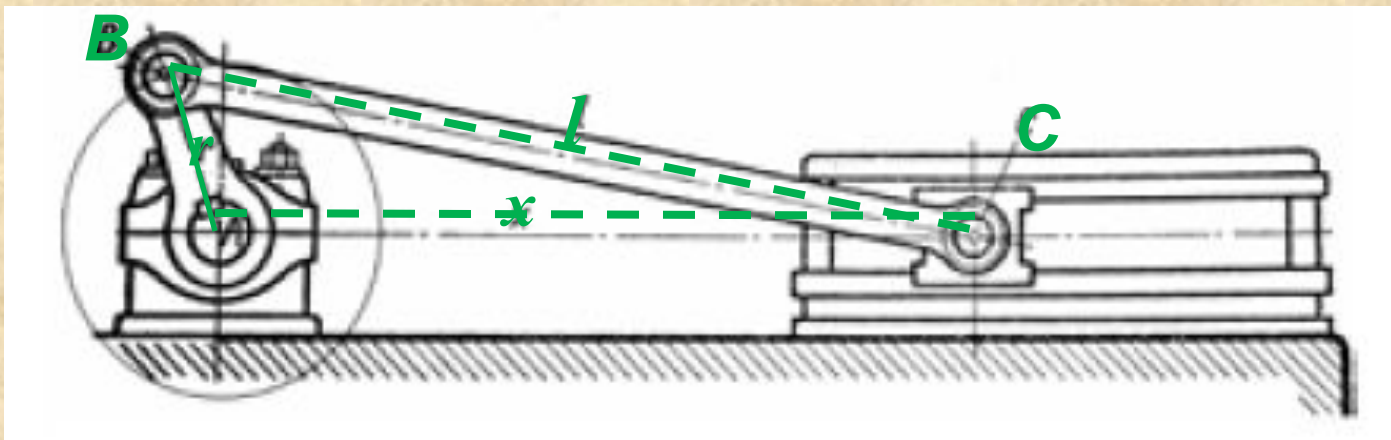
F2 $f_x$ =SIN(2*3,14*(D2-\$B\$5)/\$B\$3)							
	A	B	C	D	E	F	G
1	Период	Значение		Дата	биоритм физический	биоритм эмоциональный	биоритм интеллектуальный
2	физический	23		01.01.2011	0	0	0
3	эмоциональный	28		02.01.2011	0,269663413	0,222410024	0,189156463
4	интеллектуальный	33		03.01.2011	0,51934727	0,433678738	0,371483228
5	Дата рождения	01.01.2011		04.01.2011	0,730552318	0,62322294	0,54039719
6				05.01.2011	0,887630222	0,781547686	0,689799528
7				06.01.2011	0,978942968	0,900721927	0,814295909
8				07.01.2011	0,997725131	0,9747758	0,909391257
9				08.01.2011	0,942585125	0,999999683	0,971652051
10				09.01.2011	0,817608315	0,975130022	0,998830299
11				10.01.2011	0,632054319	0,901412627	0,9899447
12				11.01.2011	0,399670968	0,782540264	0,945316079
13				12.01.2011	0,137675709	0,624467674	0,8665558
14				13.01.2011	-0,134520041	0,435113276	0,756507588
15				14.01.2011	-0,396749106	0,223962504	0,619144853
16				15.01.2011	-0,629582746	0,001592653	0,459427224
17				16.01.2011	-0,81577015	-0,22085698	0,283121479
18				17.01.2011	-0,941516561	-0,4322431	0,096593328
19				18.01.2011	-0,997505337	-0,621976624	-0,09342243
20				19.01.2011	-0,97958823	-0,780553126	-0,280065071
21				20.01.2011	-0,889097731	-0,900078917	-0,156595659



# Биоритмы человека

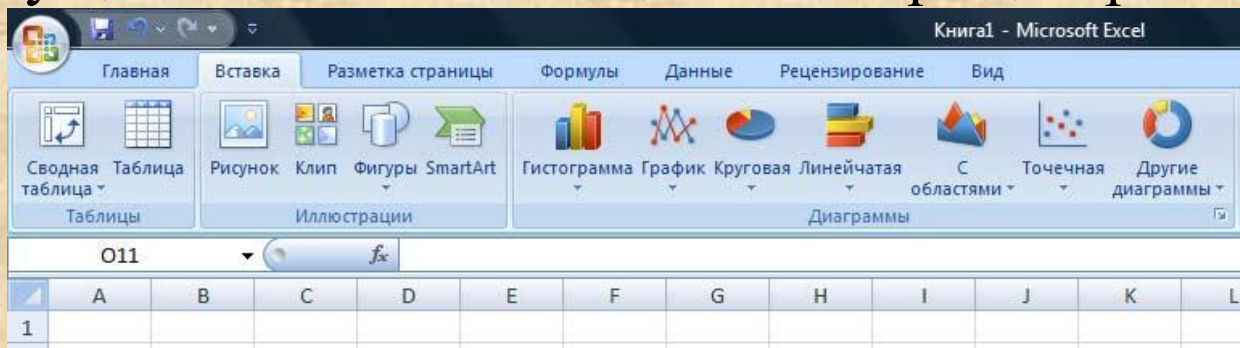


Задача. Рассмотрим привод колеса паровоза. Кривошип АВ длиной  $r$  связан с ползуном С с помощью шатуна ВС. При равномерном вращении кривошипа со скоростью  $\omega$  ползун совершает поступательное движение в корпусе. Найти расстояние, на которое продвинется ползун в момент времени  $t$ . В начальный момент времени положение кривошипа совпадает с положительным направлением оси ОХ.



# Алгоритм построения графика функции

1. Построение графиков математических функций в Excel осуществляется с помощью Мастера диаграмм



2. Далее необходимо составить таблицу значений этой функции.
3. В соответствующие ячейки внести значения аргумента функции с некоторым шагом и значения самой функции со ссылкой на аргумент.
4. После этого необходимо выделить таблицу значений функции и выполнить в меню: **Вставка – Диаграммы – Точечная**.

# Графики тригонометрических функций

**Задача 9.** На уроках физкультуры при метании малого мяча можно рассчитать дальность его полета по формуле

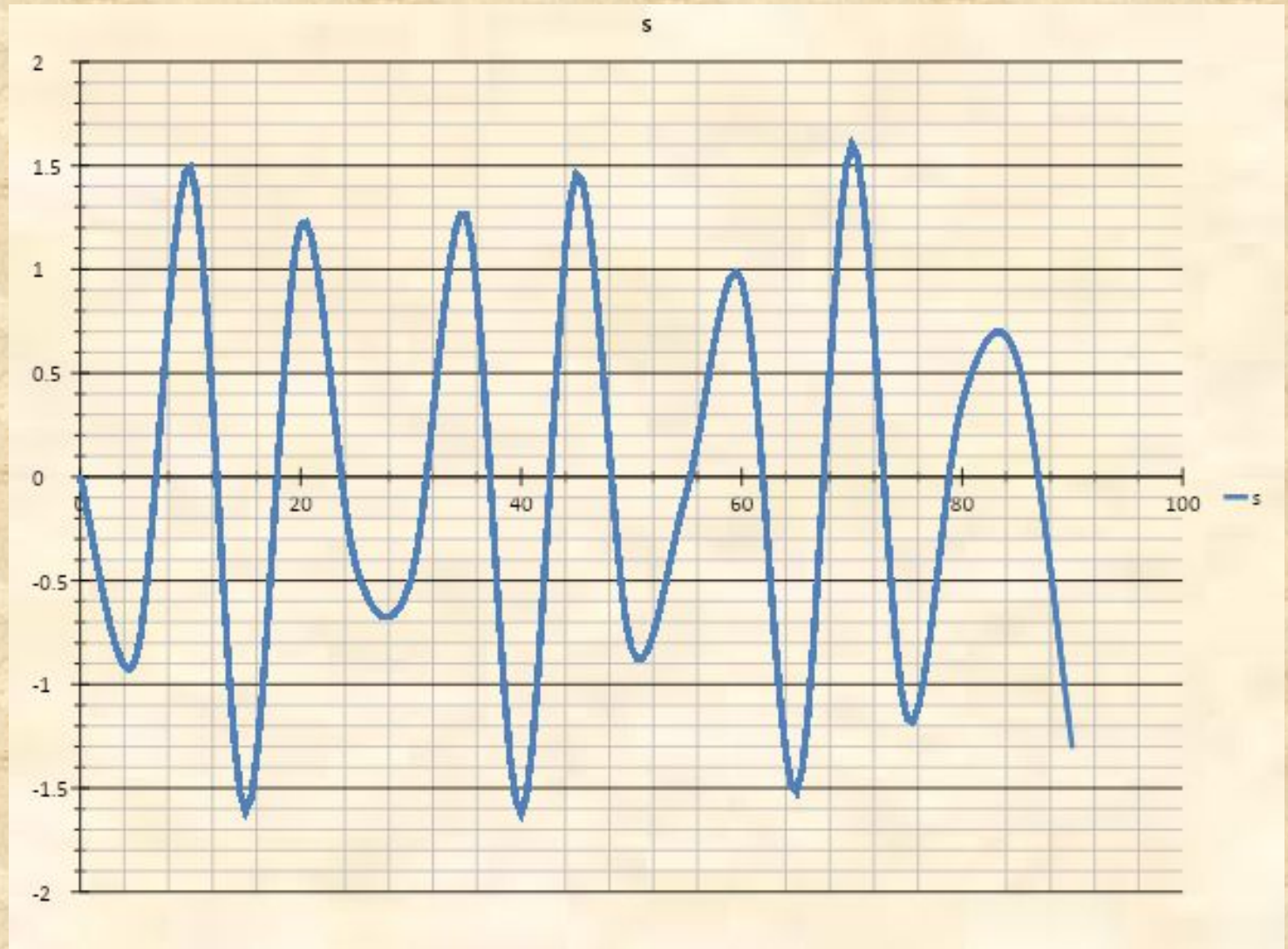
$$s = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g},$$

где  $\alpha$  — угол вылета,  $v_0$  — начальная скорость. Пусть  $v_0 = 4$  м/с,  $g = 9,8$  м/с<sup>2</sup>.

Постройте график функции  $s = s(\alpha)$ . При каком значении  $\alpha$  дальность полета будет максимальной?

$v_0$	4
$g$	9,8

$a$	$s$
0	0
5	-0,888
10	1,491
15	-1,613
20	1,217
25	-0,428
30	-0,498
35	1,263
40	-1,623
45	1,46
50	-0,827
55	-0,072
60	0,948
65	-1,519
70	1,6
75	-1,167
80	0,358
85	0,566
90	-1,308



# Тригонометрические уравнения и неравенства

**Задача 14.** Пусть имеется функция  $I = 10\sin(50t + 1)$ , где  $I$  — сила переменного тока. Определить такие моменты времени  $t$ , когда сила тока  $I$  равна 2 амперам

# Алгоритм подбора параметра

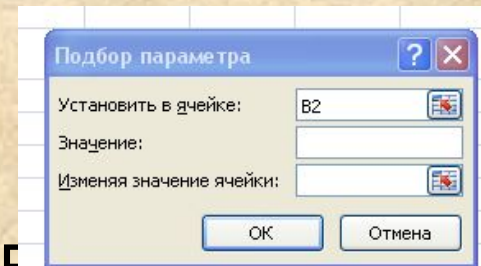
1. В ячейку A1 вводим пояснение – t (время)
2. В ячейку A2 вводим пояснение – I (сила тока)
3. В ячейку B1 вводим значение для параметра время, например, 0.
4. В ячейку B2 вводим формулу для вычисления силы тока:  
**=10\*sin(50\*B1+1)**

5. Выбираем вкладку:

***Данные \ Работа с данными \ Анализ "что-если" \  
Подбор параметра...***

6. В появившемся окне ***Подбор параметра:***

- в поле значение вводим - 2
- в поле изменяя ячейки вводим адрес ячейки B



1.

	A	B	C	D	E
1	t	-0,0159723			
2	l	2,0002			
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					

**Подбор параметра** [?] [X]

Установить в ячейке: B2 [ ]

Значение: 2 [ ]

Изменяя значение ячейки: \$B\$1 [ ]

OK Отмена

2.

	A	B	C	D	E	F	G
1	t	-0,0159723					
2	l	2,000275053					
3							
4							
5							
6							
7							
8							
9							
0							
1							

**Результат подбора параметра** [?] [X]

Подбор параметра для ячейки B2.  
Решение найдено.

Подбираемое значение: 2 [ Шаг ]

Текущее значение: 2,00027505 [ Пауза ]

OK Отмена



Задача. Как направить луч на границу двух сред, чтобы угол падения луча превышал угол преломления на данную

**Решение?**

Если  $\alpha_1 > \alpha_2$  на  $\alpha^\circ$ , то отыскание искомого угла  $x$  сводится к решению уравнения:

$$\frac{\sin x}{\sin(x - \alpha)} = n$$

После упрощения получаем  $\operatorname{tg} x = \frac{n \sin \alpha}{n \cos \alpha - 1}$

При  $\alpha = 10^\circ$  и коэффициенте  $n = 1,33$  преломления для воды получаем  **$x = 36^\circ 40'$**

	A	B	C	D	E	F
1	x	0,0000000				
2	n	0				
3	a	10				
4						
5						
6						
7						
8						
9						

**Подбор параметра** ? X

Установить в ячейке: B2

Значение: 1,33

Изменяя значение ячейки: \$B\$1

OK Отмена

	A	B	C	D	E	F
1	x	0,3293965				
2	n	1,329206873				
3	a					
4						
5						
6						
7						
8						
9						

**Результат подбора параметра** ? X

Подбор параметра для ячейки B2.  
Решение найдено.

Подбираемое значение: 1,33

Текущее значение: 1,32920687

Шаг Пауза

OK Отмена

# Выше меры конь не скачет

