A wide-angle photograph of a calm lake reflecting a range of mountains. The mountains in the background are rugged and partially covered in green vegetation. The lake's surface is like a mirror, creating a clear reflection of the mountains and the sky. In the foreground, some dark, submerged logs are visible in the water. The overall atmosphere is peaceful and natural.

Жизнь по законам математики

Цели урока

- Изучить историю возникновения тригонометрии и понять, как зарождались математические понятия, связанные с ней
- Узнать, в каких сферах жизни применяется тригонометрия
- Научиться использовать знания, полученные на уроках математики, в задачах с практическим содержанием

«Великая книга природы может быть прочтена
только теми, кто знает язык, на котором она
написана, и ЭТОТ ЯЗЫК — МАТЕМАТИКА.»



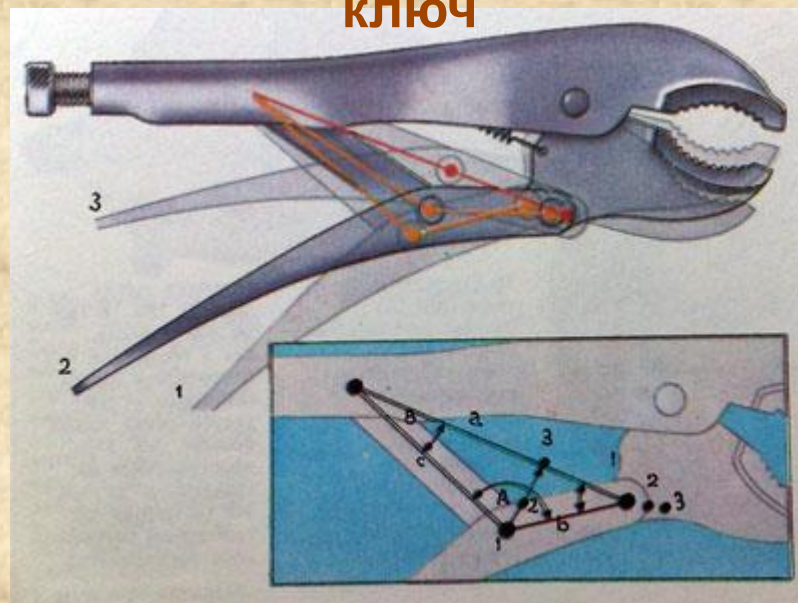
Галилео Галилей
(1564 – 1642)

**Какие житейские ситуации
повлияли на
возникновение
тригонометрических
функций?**

Геодезическая съёмка местности

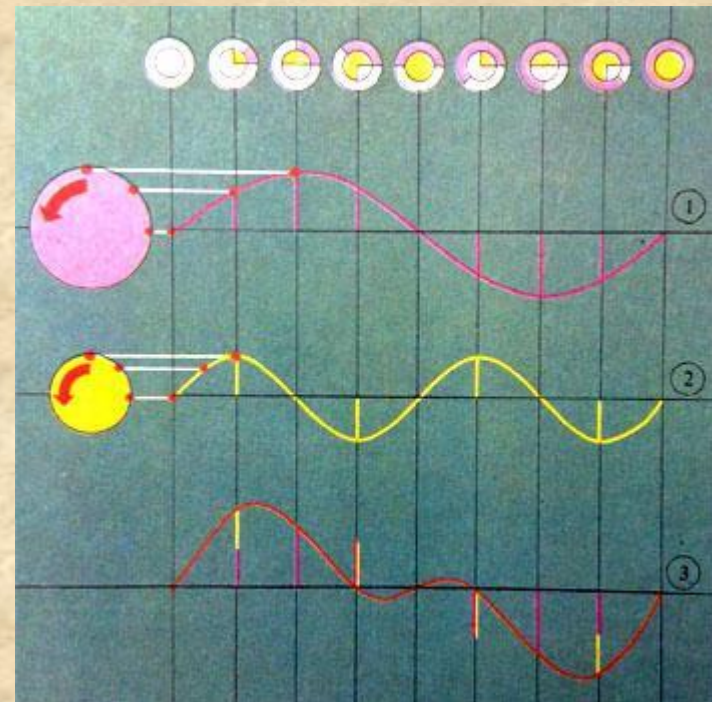
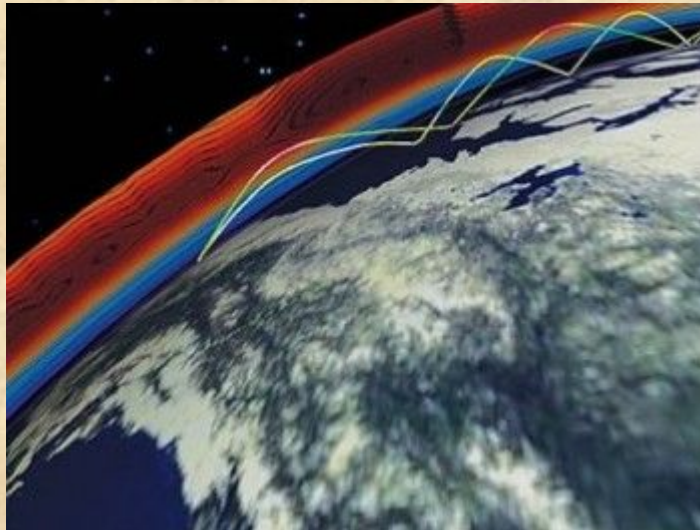
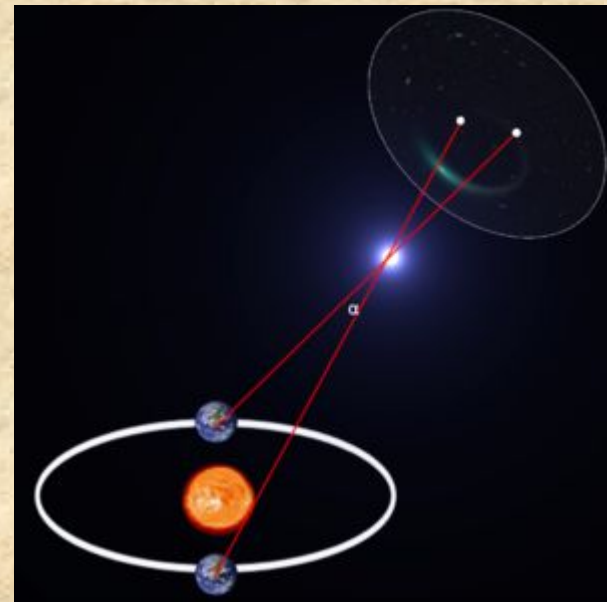


Самозахватывающий ключ





Квадрант



Пучок

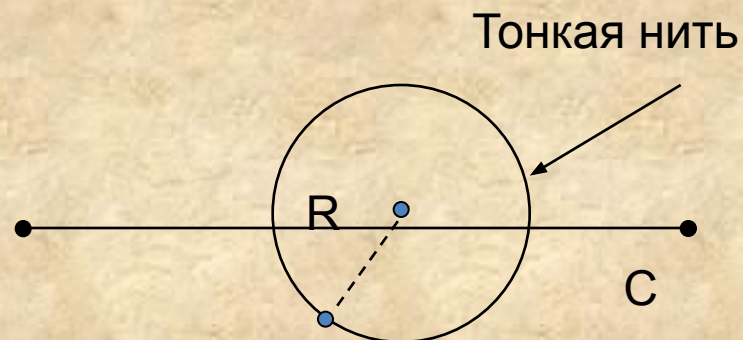
Современные инженеры и техники, создающие различные машины и механизмы, в которых происходит преобразование круговых движений в прямолинейные и обратно, должны знать теорию тригонометрических функций любых углов.

Для начала рассмотрим модель:

**Длина
окружности**

Длина окружности

Представим себе нить в форме окружности. Разрежем её и растянем за концы.



Длина полученного отрезка и есть длина окружности.

Задача 1. Вообразите, что вы обошли землю по экватору. На сколько при этом верхушка вашей головы прошла более длинный путь, чем кончик вашей ноги?

Решение.

- 1) Ноги прошли путь $2\pi R$, где R радиус земного шара.
- 2) Верхушка головы $2\pi(R + 1,7)$, где 1,7м рост человека.
- 3) Разность путей равна $2\pi(R + 1,7) - 2\pi R = 2\pi \cdot 1,7 = 10,7\text{м}$.
Итак голова прошла путь на 10,7 м больше, чем ноги.

Ответ: 10,7 м.

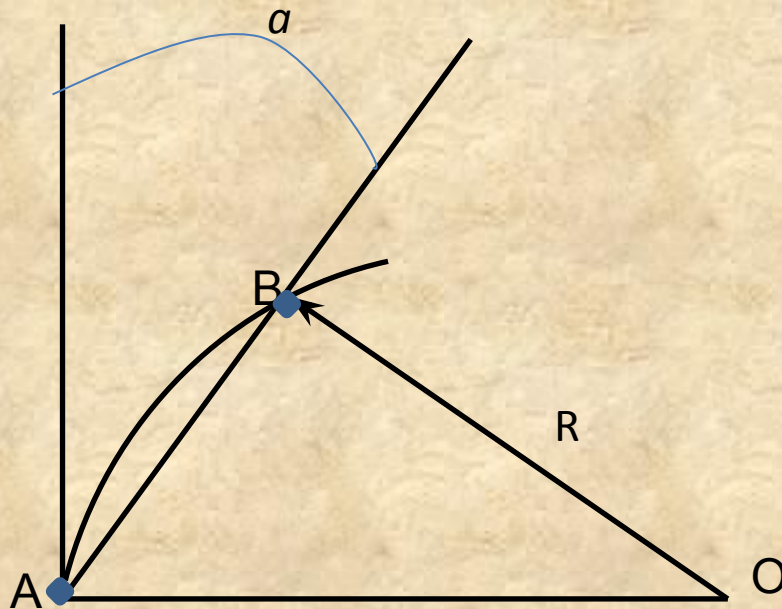


Задача 2. Вечером автобус на повороте радиусом закругления $R = 100$ м освещает дорогу светом, расходящимся от фар, под углом $\alpha \sim 2^\circ$ к направлению движения. Какова длина дороги, обозримой водителем на повороте?

Решение.

1. Пусть автомобиль находится в точке А. Тогда фары освещают дугу АВ, длину которой и требуется найти.
2. Соединим точки А и В с центром окружности О. Угол α образован касательной к окружности и хордой. Поэтому его величина равна половине угловой величины дуги АВ, тогда:

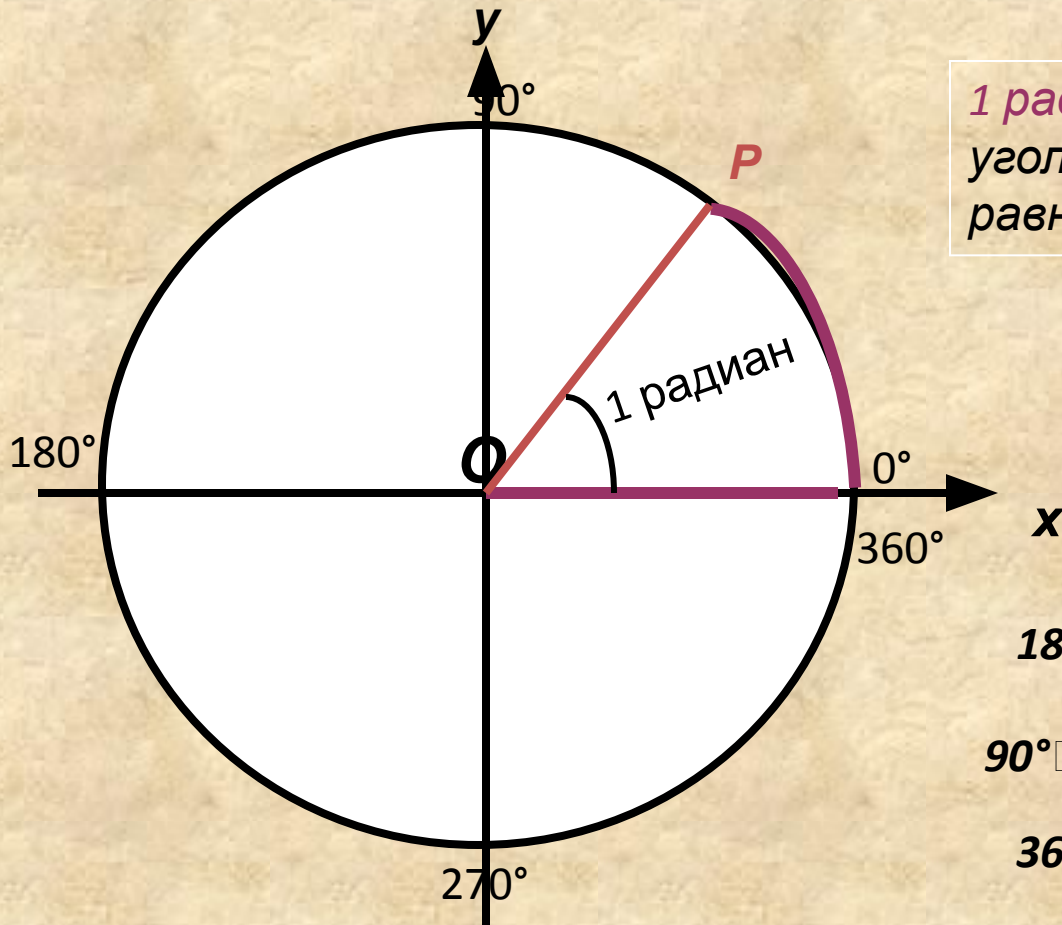
$$l = \frac{2\pi R}{360} \cdot 4 \approx 7 \text{ м}$$



Модель 2. Радианное измерение дуг и углов

Существуют различные способы измерения дуг и углов. Механики чаще измеряют углы, образующиеся при вращательных движениях. Всем известно выражение «обороты двигателя». Астроном – углы, образующиеся при вращении Земли вокруг оси (долгота). Землемеры – измеряет углы в градусных величинах. Наиболее удобной мерой измерения углов и дуг, связанных с вращательными движениями оказалась радианная мера.

Радийная мера угла



1 радиан это центральный угол, длина дуги которого равна радиусу окружности

$$1 \text{ радиан} \approx 57^\circ$$

$$180^\circ = \pi \text{ рад}$$

$$180^\circ \square \text{ развёрнутый угол} \square \pi$$

$$90^\circ \square \text{ прямой угол} \square \frac{\pi}{2}$$

$$360^\circ \square \text{ полный угол} \square 2\pi$$

Формула перехода от градусной меры к радианной:

$$\alpha \text{ рад} = \frac{\pi}{180} \cdot \alpha^\circ$$

Формула перехода от радианной меры к градусной:

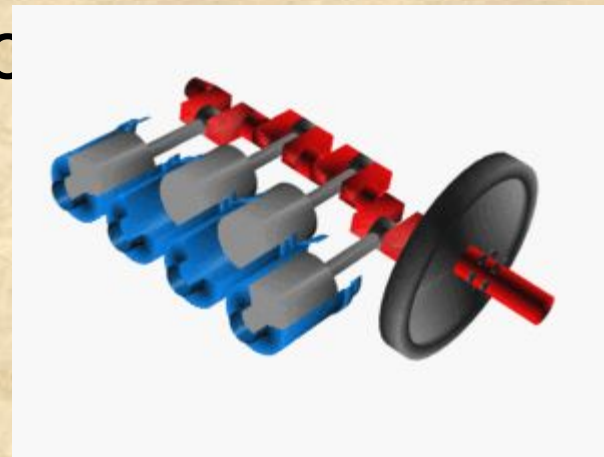
$$\alpha^\circ = \frac{180}{\pi} \cdot \alpha \text{ рад}$$

Задача 2. Маховик трактора имеет в диаметре 0,5 м и делает 1980 оборотов в минуту.

а) Выразите в радианной мере угловую скорость ω маховика.

б) Выразите в радианах, а затем в метрах длину дуги l , описанную за t часов точкой, взятой на ободу маховика.

в) Найдите линейную скорость точки.

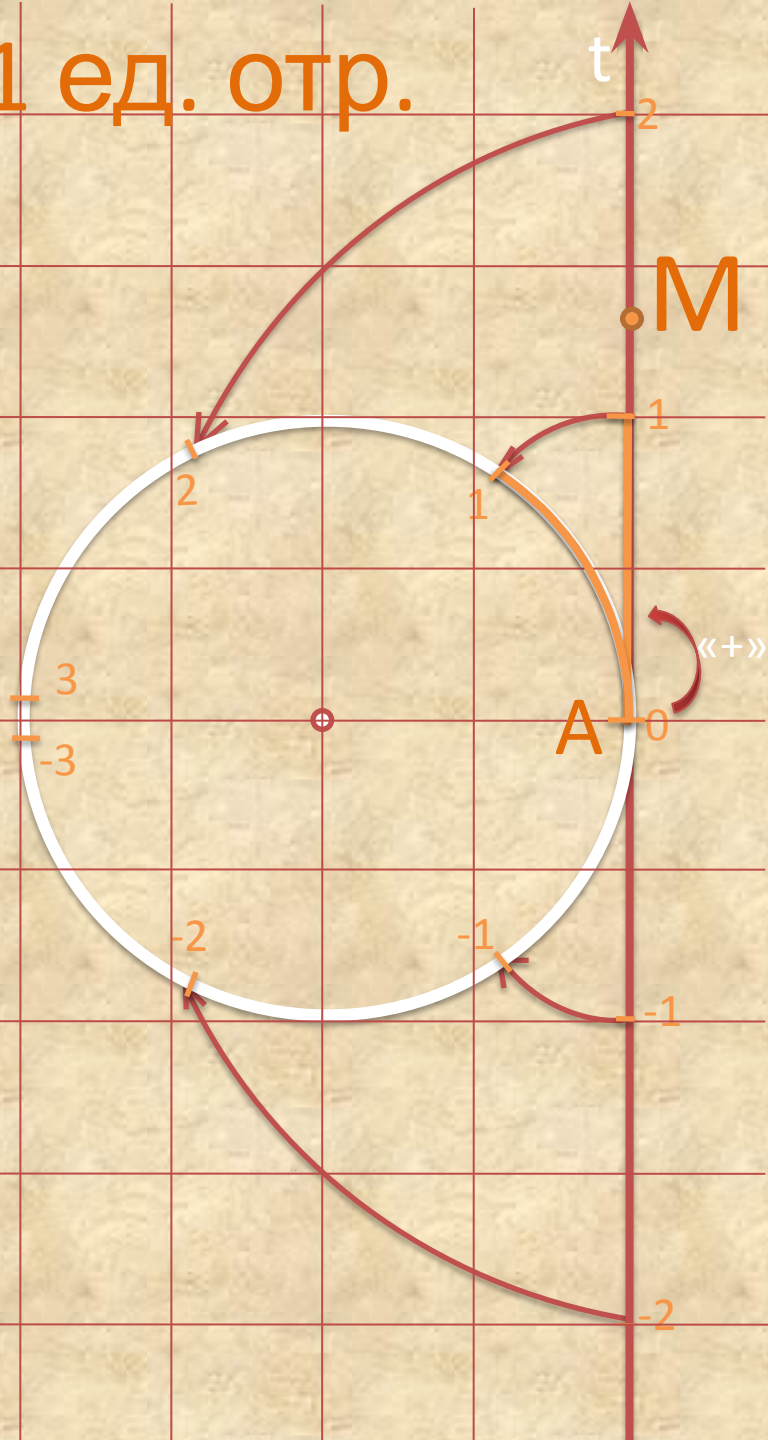


Периодический характер имеют многие световые, звуковые, электромагнитные явления, а также целый ряд явлений, наблюдаемых нами в самой природе (движение планет, смена дня и ночи, смена времен года и т.д.) и в организме человека (работа сердца).

Закономерности периодических явлений описываются функциями. Изучение таких функций значительно облегчает установление соответствия между действительными числами и точками окружности.

Модель 3. Координатная окружность

$R=1$ ед. отр.



Каждой точке числовой
прямой соответствует
единственная точка
числовой окружности.

Длина дуги равна
длине
единичного отрезка

Задача.

Колесо автомобиля вращается с угловой скоростью π рад/с.

Найти число оборотов:

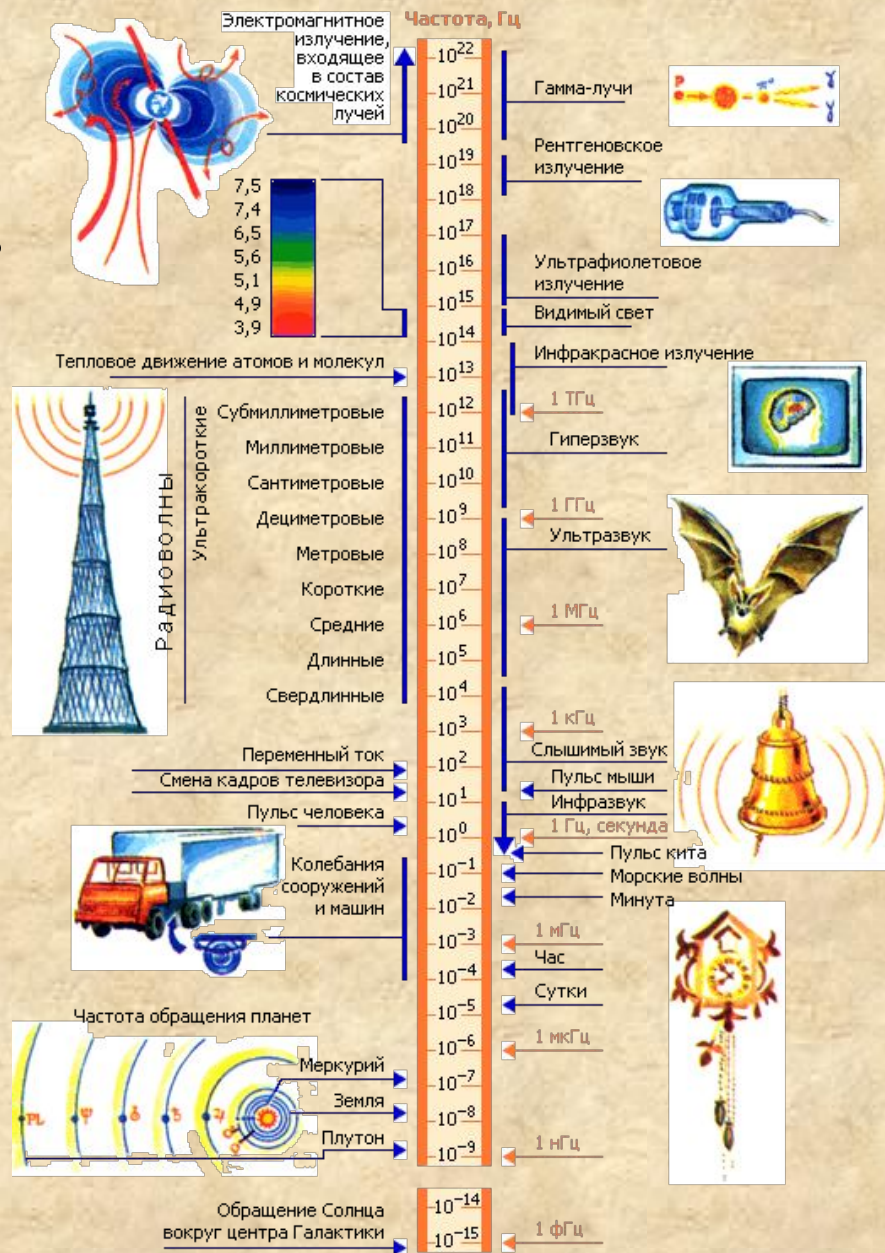
а) за 25с

б) за 1 мин 10 с

Колебания

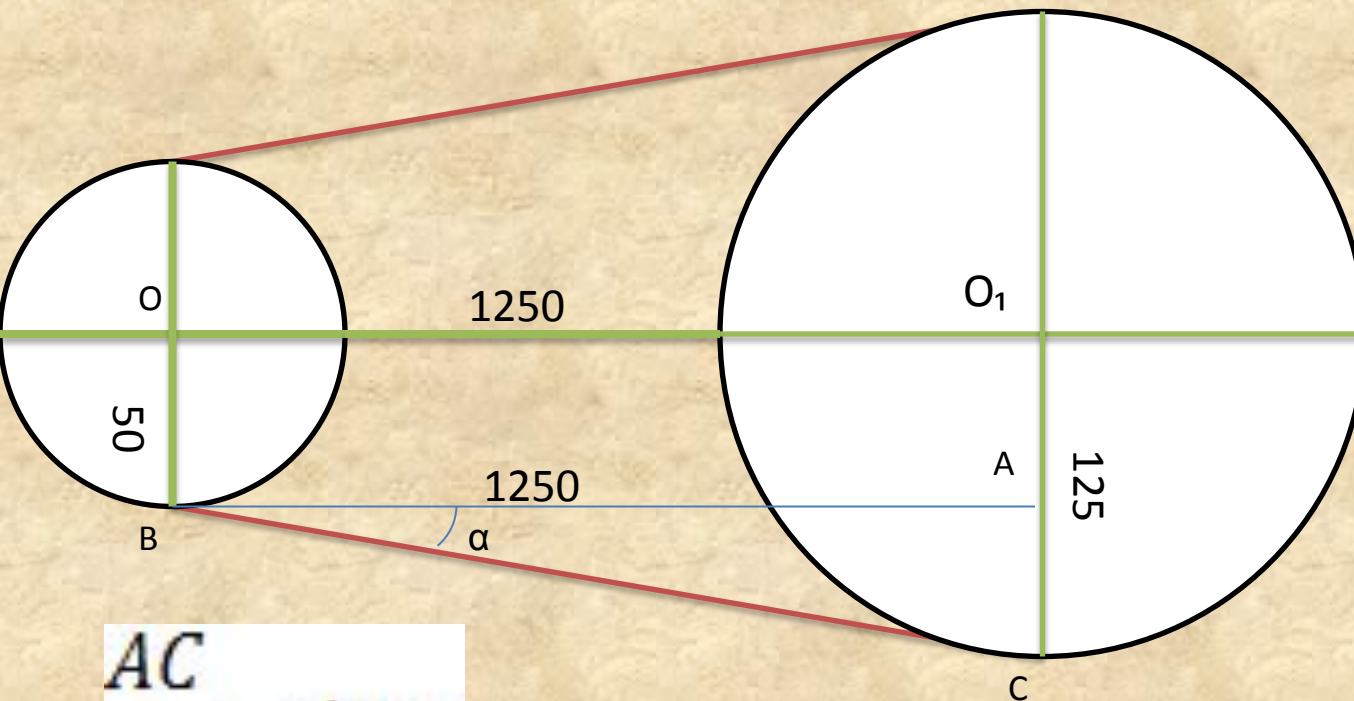
– один из самых распространенных процессов в природе и технике.

Даже наше каждодневное хождение на работу и возвращение домой попадает под определение колебаний, которые трактуются как процессы, точно или приблизительно повторяющиеся через равные промежутки времени.



Задача. Для двух шкивов, соединенных ременной передачей вычислите углы α при прямой передаче и β при перекрестной, если диаметры шкивов $D=250$ мм и $d = 100$ мм, а расстояние между центрами шкивов $l=1250$ мм

Случай 1



Дано:

$$OO_1 = 1250 \text{ мм}$$

$$OB = 50 \text{ мм}$$

$$O_1C = 125 \text{ мм}$$

Найти

α -?

$$\frac{AC}{AB} = \operatorname{tg} \alpha$$

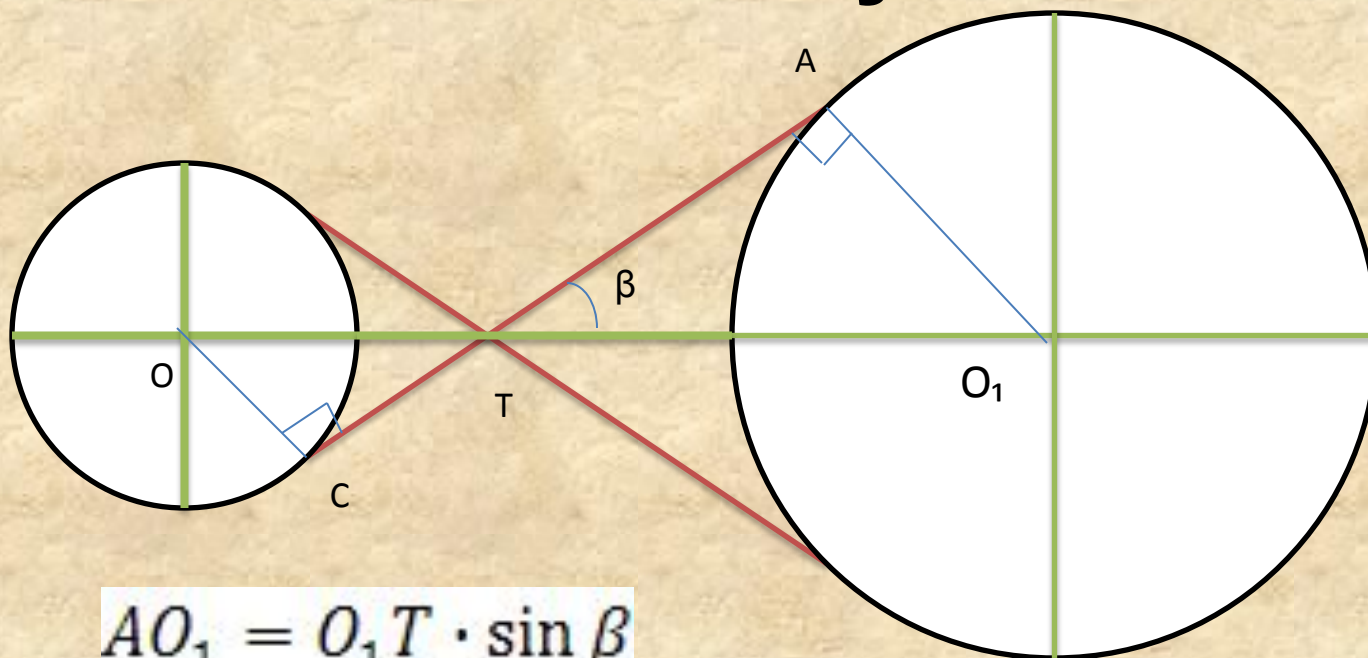
$$AB = l$$

$$AC = R - r$$

$$\operatorname{tg} \alpha = 0,06$$

$$\alpha = 3^\circ 26'$$

Случай 2



Дано:

$$OO_1 = 1250 \text{ мм}$$

$$OC = 50 \text{ мм}$$

$$O_1A = 125 \text{ мм}$$

Найти

β -?

$$AO_1 = O_1T \cdot \sin \beta$$

$$\begin{cases} R = O_1T \cdot \sin \beta, \\ r = OT \cdot \sin \beta; \end{cases}$$

$$R + r = (O_1T + OT) \cdot \sin \beta, \quad O_1T + OT = l$$

$$R + r = l \cdot \sin \beta$$

$$\sin \beta = 0,14$$

$$\beta = 8^\circ$$

Ответ $3^\circ 26'; 8^\circ$

Простые гармонические колебания описываются с помощью функций синус и

косинус:

$$y = A \cdot \cos(\omega x + \varphi)$$

$$y = A \cdot \sin(\omega x + \varphi)$$

A – амплитуда, ω - частота, φ - начальная фаза колебаний

Существует легенда о том, что еще в древнем Китае монахи день за днем вели наблюдения за человеком, записывая параметры его физической активности, умственных способностей и эмоционального состояния. В результате многолетних исследований они пришли к выводу, что эти три функции являются периодическими с периодами для физической активности 23 дня, эмоциональной – 28 дней и интеллектуальной – 33 дня.

Функции состояния человека в момент его рождения равны нулю, затем начинают возрастать, и каждая за свой период принимает одно максимальное положительное и одно минимальное отрицательное значения.

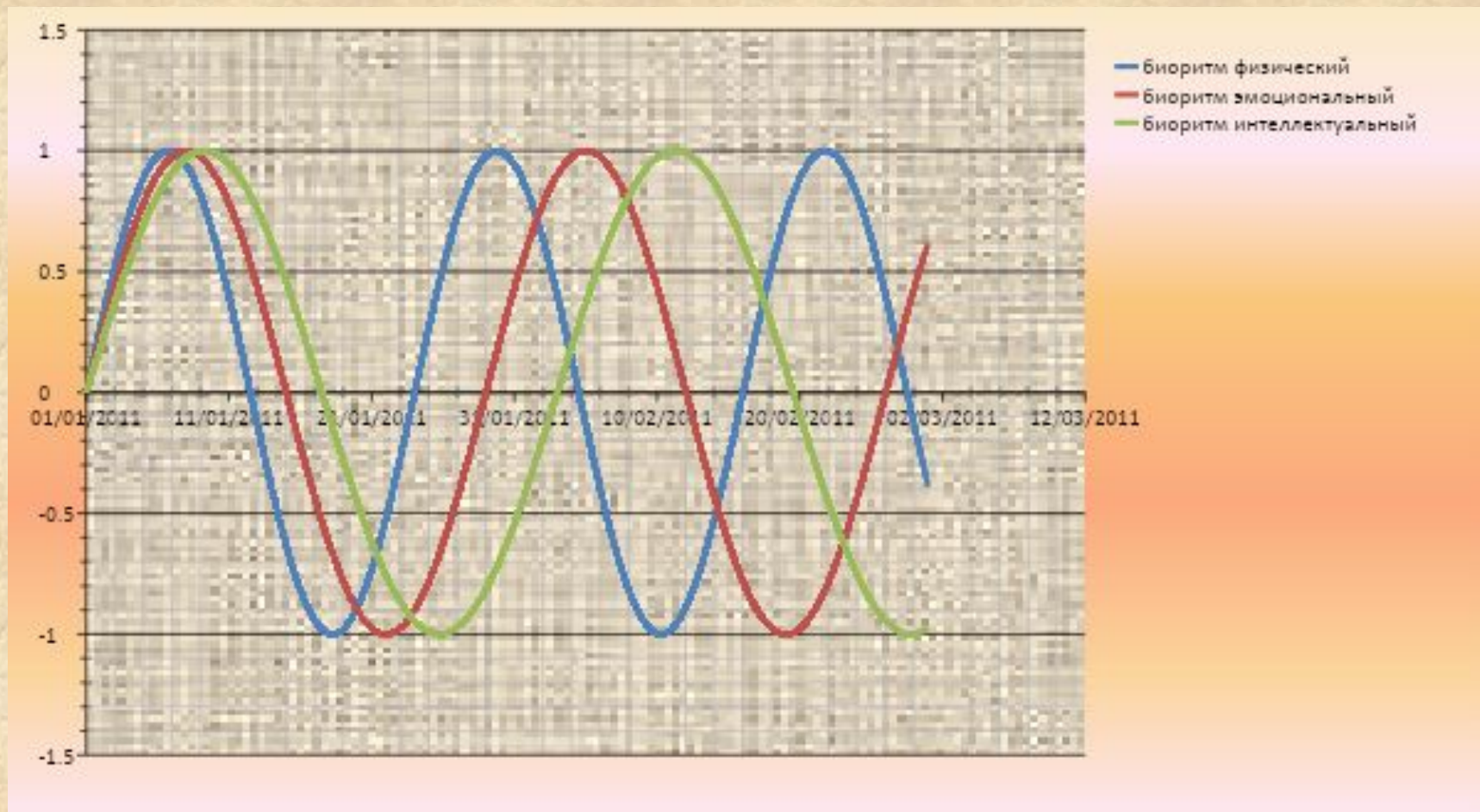
Проанализировав эту информацию, можно построить следующую модель:

$$f(x) = \frac{\sin(2\pi \cdot (t - t_0))}{T_r}$$

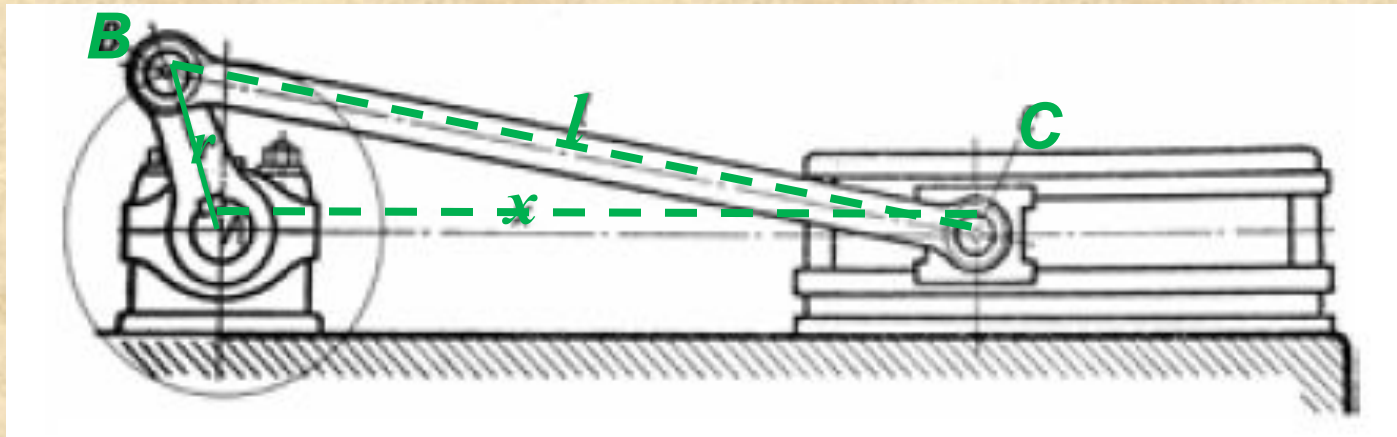
где t — время, T_r — периоды, r — номер периода.
Началом всех трех кривых является день рождения $t=t_0$, $\sin(0)=0$.

буфер обмена		Шрифт		Выравнивание		Число		Стили		Ячейки	
F2		fx		=SIN(2*3,14*(D2-\$B\$5)/\$B\$3)							
	A	B	C	D	E	F	G				
1	Период	Значение		Дата	биоритм физический	биоритм эмоциональный	биоритм интеллектуальный				
2	физический	23		01.01.2011	0	0	0				
3	эмоциональный	28		02.01.2011	0,269663413	0,222410024	0,189156463				
4	интеллектуальный	33		03.01.2011	0,51934727	0,433678738	0,371483228				
5	Дата рождения	01.01.2011		04.01.2011	0,730552318	0,62322294	0,54039719				
6				05.01.2011	0,887630222	0,781547686	0,689799528				
7				06.01.2011	0,978942968	0,900721927	0,814295909				
8				07.01.2011	0,997725131	0,9747758	0,909391257				
9				08.01.2011	0,942585125	0,999999683	0,971652051				
10				09.01.2011	0,817608315	0,975130022	0,998830299				
11				10.01.2011	0,632054319	0,901412627	0,9899447				
12				11.01.2011	0,399670968	0,782540264	0,945316079				
13				12.01.2011	0,137675709	0,624467674	0,8665558				
14				13.01.2011	-0,134520041	0,435113276	0,756507588				
15				14.01.2011	-0,396749106	0,223962504	0,619144853				
16				15.01.2011	-0,629582746	0,001592653	0,459427224				
17				16.01.2011	-0,81577015	-0,22085698	0,283121479				
18				17.01.2011	-0,941516561	-0,4322431	0,096593328				
19				18.01.2011	-0,997505337	-0,621976624	-0,09342243				
20				19.01.2011	-0,97958823	-0,780553126	-0,280065071				
21				20.01.2011	-0,889097731	-0,900078917	-0,156595659				

Биоритмы человека

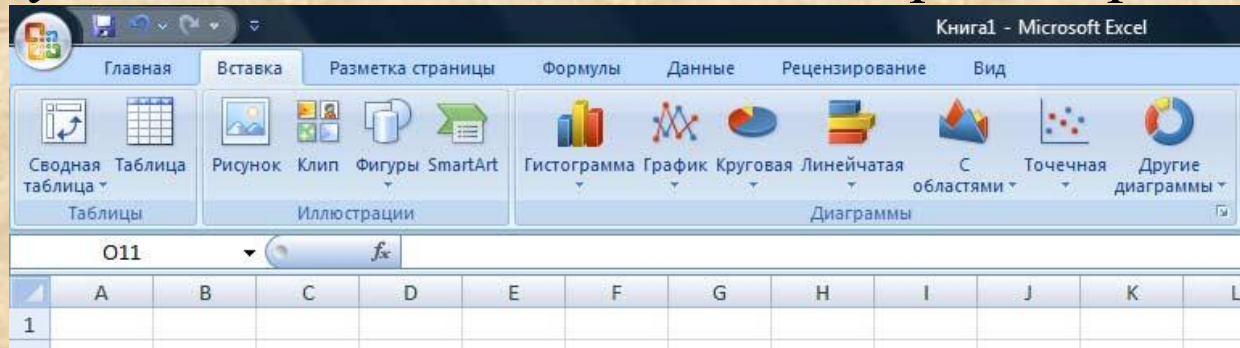


Задача. Рассмотрим привод колеса паровоза. Кривошип АВ длиной r связан с ползуном С с помощью шатуна ВС. При равномерном вращении кривошипа со скоростью ω ползун совершает поступательное движение в корпусе. Найти расстояние, на которое продвинется ползун в момент времени t . В начальный момент времени положение кривошипа совпадает с положительным направлением оси ОХ.



Алгоритм построения графика функции

1. Построение графиков математических функций в Excel осуществляется с помощью Мастера диаграмм



2. Далее необходимо составить таблицу значений этой функции.
3. В соответствующие ячейки внести значения аргумента функции с некоторым шагом и значения самой функции со ссылкой на аргумент.
4. После этого необходимо выделить таблицу значений функции и выполнить в меню: **Вставка – Диаграммы – Точечная**.

Графики тригонометрических функций

Задача 9. На уроках физкультуры при метании малого мяча можно рассчитать дальность его полета по формуле

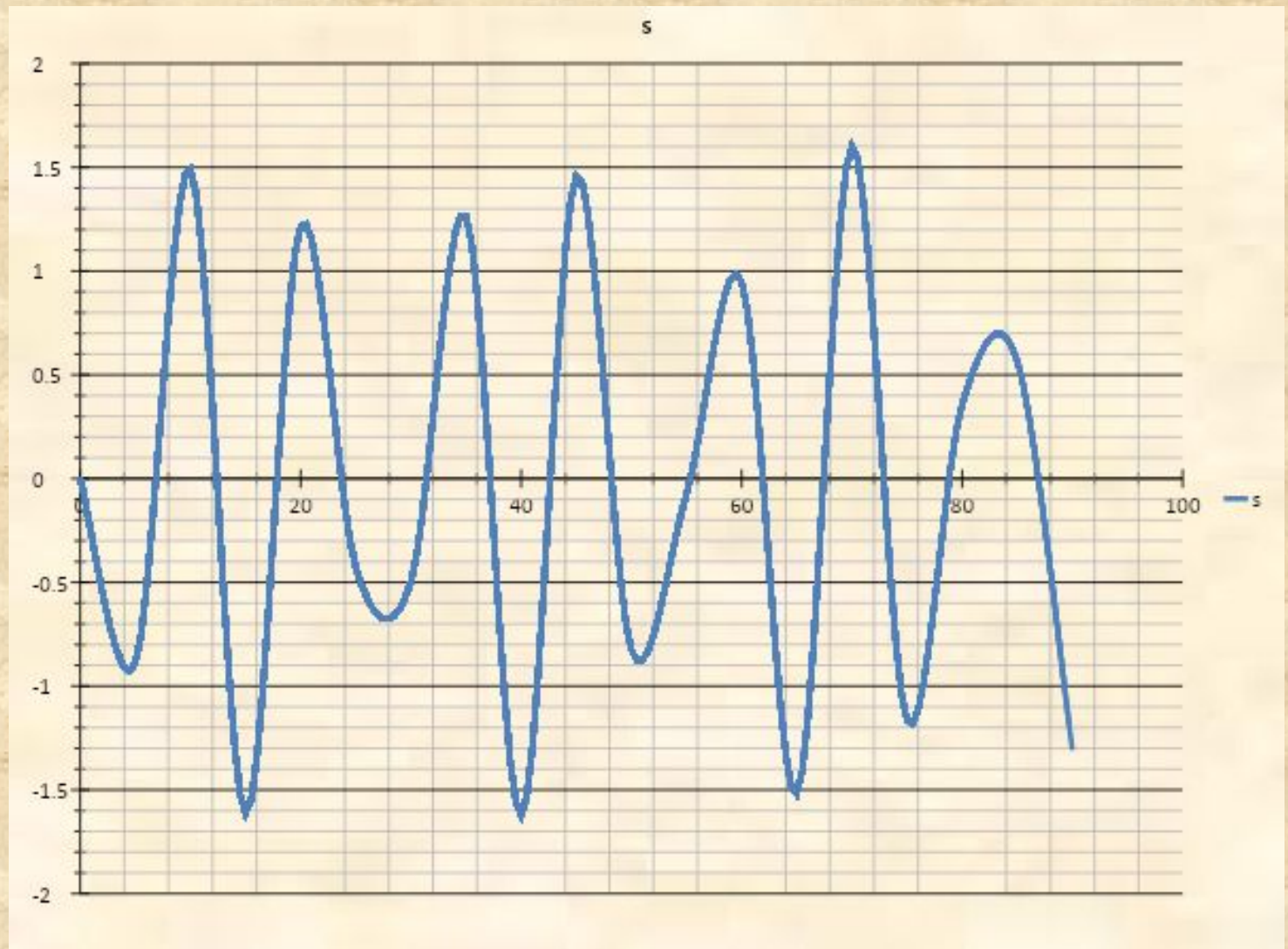
$$s = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g},$$

где α — угол вылета, v_0 — начальная скорость. Пусть $v_0 = 4$ м/с, $g = 9,8$ м/с².

Постройте график функции $s = s(\alpha)$. При каком значении α дальность полета будет максимальной?

v_0	4
g	9,8

a	s
0	0
5	-0,888
10	1,491
15	-1,613
20	1,217
25	-0,428
30	-0,498
35	1,263
40	-1,623
45	1,46
50	-0,827
55	-0,072
60	0,948
65	-1,519
70	1,6
75	-1,167
80	0,358
85	0,566
90	-1,308



Тригонометрические уравнения и неравенства

Задача 14. Пусть имеется функция $I = 10\sin(50t + 1)$, где I — сила переменного тока. Определить такие моменты времени t , когда сила тока I равна 2 амперам

Алгоритм подбора параметра

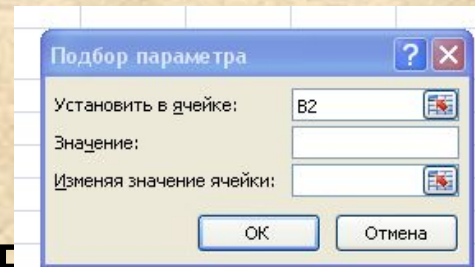
1. В ячейку A1 вводим пояснение – t (время)
2. В ячейку A2 вводим пояснение – I (сила тока)
3. В ячейку B1 вводим значение для параметра время, например, 0.
4. В ячейку B2 вводим формулу для вычисления силы тока:
$$=10*\sin(50*B1+1)$$

5. Выбираем вкладку:

***Данные \ Работа с данными \ Анализ "что-если" \
Подбор параметра...***

6. В появившемся окне ***Подбор параметра:***

- в поле значение вводим - 2
- в поле изменяя ячейки вводим адрес ячейки B



1.

	A	B	C	D	E
1	t	-0,0159723			
2	I	2,0002			
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					

Подбор параметра

Установить в ячейке: B2

Значение: 2

Изменяя значение ячейки: \$B\$1

OK Отмена

2.

	A	B	C	D	E	F	G
1	t	-0,0159723					
2	I	2,000275053					
3							
4							
5							
6							
7							
8							
9							
10							
11							

Результат подбора параметра

Подбор параметра для ячейки B2.
Решение найдено.

Подбираемое значение: 2

Текущее значение: 2,00027505

Шаг Пауза

OK Отмена

Задача. Как направить луч на границу двух сред, чтобы угол падения луча превышал угол преломления на данную

величину?

Если $\alpha_1 > \alpha_2$ на α° , то отыскание искомого угла x сводится к решению уравнения:

$$\frac{\sin x}{\sin(x - \alpha)} = n$$

После упрощения получаем $\operatorname{tg} x = \frac{n \sin \alpha}{n \cos \alpha - 1}$

При $\alpha = 10^\circ$ и коэффициенте $n = 1,33$ преломления для воды получаем **$x = 36^\circ 40'$**

	A	B	C	D	E	F
1	x	0,0000000				
2	n	0				
3	a	1				
4						
5						
6						
7						
8						
9						

Подбор параметра ? X

Установить в ячейке: B2

Значение: 1,33

Изменяя значение ячейки: \$B\$1

OK Отмена

	A	B	C	D	E	F
1	x	0,3293965				
2	n	1,329206873				
3	a					
4						
5						
6						
7						
8						
9						

Результат подбора параметра ? X

Подбор параметра для ячейки B2.
Решение найдено.

Подбираемое значение: 1,33

Текущее значение: 1,32920687

Шаг Пауза

OK Отмена

Выше меры конь не скачет

