Лекция № 12
Механические колебания

Алексей Викторович
Гуденко

24/04/2012

План лекции

- Свободные незатухающие гармонические колебания:
    1. Пружинный маятник
    2. Математический маятник
    3. Физический маятник
- Затухающие колебания с вязким трением.
- Вынужденные колебания. Резонанс.
- Параметрический резонанс.

Колебательные процессы

- **Колебание – изменение состояния системы по периодическому или почти периодическому закону**: маятник часов, груз на пружине, гитарная струна, давление воздуха в звуковой волне.
- **Свободные (или собственные) колебания**: колебания в системе, предоставленной самой себе: шарик в лунке, маятник.
- **Вынужденные колебания –** колебания под действием **внешней** периодической силы: вибрации моста, качели.
- Автоколебания, параметрические колебания.

Свободные незатухающие гармонические колебания.
Пружинный маятник

- $mx'' = -kx \Rightarrow mx'' + kx = 0 \Rightarrow$
- $x'' + \omega_0^2 x = 0$ – дифференциальное уравнение гармонических колебаний ($\omega_0^2 = k/m$)
- $x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ – гармоническое колебание
  A – амплитуда колебаний
  ω_0 – циклическая частота
  φ_0 – начальная фаза
  $\omega_0 t + \varphi_0$ – фаза колебаний
- $T = 2\pi/\omega_0$ – период колебаний
- **Изохронность:** ω_0 – определяется только свойствами системы и не зависит от амплитуды.
- $F = -kx$ – **квазиупругая возвращающая** сила

Скорость и ускорение при гармонических колебаниях

- Смещение:
  $x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$
- Скорость:
  $v = x' = -\omega_0 A\sin(\omega_0 t + \varphi_0) = \omega_0 A\cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi/2)$;
  $v_0 = \omega_0 A$ – амплитуда скорости;
  скорость опережает смещение x по фазе на $\pi/2$.
- Ускорение
  $a = -\omega_0^2 A\cos(\omega_0 t + \varphi_0) = \omega_0^2 A\cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi)$
  $a_0 = \omega_0^2 A$ – амплитуда ускорения;
  ускорение в противофазе со смещением

Энергия гармонических колебаний

- **Потенциальная энергия**:
  $П = kx^2/2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)$
- **Кинетическая энергия:**
  $K = mv^2/2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2A^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{1}{2}кA^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)$
- **Полная энергия:**
  $E = П + K = const = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv_0^2$
- Для гармонических колебаний:
  $<K> = <П> = \frac{1}{2}E$

Энергетический метод для колебательных систем с одной степенью свободы

- q – обобщённая координата (смещение, угол поворота)
  q’ – обобщённая скорость (скорость смещения, угловая скорость)
- Уравнение энергии: $\frac{1}{2} kq^2 + \frac{1}{2} \mu q'^2 = \text{const}$
  $П = \frac{1}{2} kq^2$ – потенциальная энергия
  $K = \frac{1}{2} \mu q'^2$ – кинетическая энергия
  $\omega^2 = к/\mu$ – циклическая частота
  к – эффективная жёсткость системы
  μ – инерционность системы

Математический маятник.

- Математический маятник – материальная точка на нерастяжимой лёгкой нити в поле тяжести Земли.
- Энергетический метод:
  θ – угол отклонения нити от вертикали (обобщённая координата).

1. Потенциальная энергия:
   $\Pi = mgL(1 - \cos\theta) \approx ½\, mgL\theta^2 = ½\, \kappa\theta^2$
   $k = mgL$ – эффективная жёсткость
2. Кинетическая энергия:
   $K = ½\, m(L\theta')^2 = ½\, mL^2\, \theta'^2 = ½\, \mu\theta'^2$
   $\mu = ½\, mL^2$ – инерционность системы
3. Уравнение колебаний: $½\kappa\theta^2 + ½\, \mu\theta'^2 = const$
4. $\omega_0^2 = \kappa/\mu = g/L$; $T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi(L/g)^{1/2}$

Ангармонический математический маятник

- $\frac{1}{2}k\theta^2 + \frac{1}{2}\mu\theta'^2 = \text{const} \Rightarrow \theta'' + \omega_0^2\theta = 0$ – линеаризованное уравнение
- $\theta'' + \omega_0^2\sin\theta = 0$ – нелинеаризованное **ангармоническое** уравнение;
  $T = T_0(1 + \theta_0^2/16 + 9\theta_0^4/64 + \ldots)$ – период зависит от амплитуды (θ_0 – амплитуда)

Физический маятник

- Физический маятник - твёрдое тело, совершающее колебания вокруг неподвижной горизонтальной оси.
- Энергетический метод:

1. Потенциальная энергия:
   $\Pi = mga(1 - \cos\theta) \approx \frac{1}{2} mga\theta^2$
2. Кинетическая энергия:
   $K = \frac{1}{2}I\theta'^2$, $I = I_c + ma^2$ - момент инерции относительно оси O
3. Уравнение колебаний: $\frac{1}{2}mga\theta^2 + \frac{1}{2} I\theta'^2 = const$
4. $\omega_0^2 = mga/I$; $T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi(I/mga)^{1/2}$

Приведённая длина. Центр качания. Теорема Гюйгенса. Оборотный маятник и измерение g

- $L_{пр}$ = I/ma – длина математического маятника с тем же периодом колебаний
- $L_{пр} = I/ma = (I_c + ma^2)/ma = a + I_c/ma$
- Центр качания O’ расположен на прямой OC расстоянии $L_{пр}$ от точки подвеса O
- <u>**Теорема Гюйгенса**</u>
  Точка подвеса и центр качания являются “сопряжёнными” точками: если маятник подвесить за центр качания, то его период не изменится.
  Доказательство: $L_{пр} = a + I_c/ma \Rightarrow a^2 - L_{пр}a + I_c/m = 0 \Rightarrow a_1 + a_2 = L_{пр}$
- Оборотный маятник и измерение g: экспериментально определяют расстояние между сопряжёнными точками OO’ = $L_{пр}$ и рассчитывают g по формуле: $g = L_{пр}\omega_0^2$

Крутильные колебания

- Диск на упругой нити:
  Момент упругих сил $M_z = - k\theta$, k – коэффициент “крутильной” жёсткости
- $I_0\theta'' = - k\theta \Rightarrow \theta'' + (k/I_0)\theta = 0 \Rightarrow \omega_0^2 = k/I_0$

Затухающие колебания.

- Сила вязкого трения $F_{тр} = -\beta v$
- $mx'' = - kx - \beta v \Rightarrow mx'' + \beta v + kx = 0 \Rightarrow$

  $x'' + 2\gamma x' + \omega_0^2 x = 0$ - дифференциальное уравнение колебаний с затуханием;

  $\gamma = \beta/2m$ – коэффициент затухания

  $\omega_0^2 = k/m$ – собственная частота
- если $\gamma < \omega_0$, то

  $x = a_0 e^{-\gamma t}\cos(\omega t + \varphi_0)$,

  $\omega = (\omega_0^2 - \gamma^2)^{1/2}$ – частота затухающих колебаний;

  $a_0 e^{-\gamma t}$ – амплитуда затухающих колебаний

Характеристики затухающих колебаний

- Время релаксации τ – это время, за которое амплитуда колебаний уменьшается в е раз:
  $\tau = 1/\gamma$
- Логарифмический декремент затухания:
  $\lambda = \ln[a(t)/a(t+T)] = \gamma T = T/\tau$
- Число колебаний, за которое амплитуда уменьшается в е раз
  $N_e = \tau/T = 1/\lambda$
- Слабое затухание $N_e = \tau/T = \omega/2\pi\gamma >> 1 \Rightarrow$
  $\gamma << \omega \approx \omega_0$

Диссипация энергии. Добротность.

- $dE/dt = -\beta v^2$ - мощность силы трения
- $dE/dt = -\beta v^2 = -(2\beta/m)(mv^2/2) = -4\gamma K$
- Слабое затухание: $\gamma \ll \omega_0 \Rightarrow \langle K \rangle = \frac{1}{2} E \Rightarrow$
  $dE/dt = -2\gamma E \Rightarrow E = E_0 e^{-2\gamma t}$
- Убыль энергии за период $\Delta E_T = 2\gamma T E$
- Убыль энергии при изменении фазы на 1 рад:
  $\Delta E = \Delta E_T/2\pi = (2\gamma/\omega)E_0$
- Добротность:
  $Q = E/\Delta E = \omega/2\gamma = \pi N_e$

Вынужденные колебания. Векторные диаграммы. Резонанс.

- $mx'' + \beta v + kx = F\cos\omega t$ ⇨
- $x'' + 2\gamma x' + \omega_0^2 x = f\cos\omega t,\ f = F/m$
- Вынужденные колебания ищем в виде: $x = B\cos(\omega t - \varphi)$
- Векторная диаграмма: $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$ проекция на ось OX радиус-вектора длиной A, вращающегося против часовой стрелки с угловой скоростью ω от начального положения φ_0

Вынужденные колебания. Векторные диаграммы. Резонанс.

- Из векторной диаграммы:
  - амплитуда
    $B = f/((\omega^2 - \omega_0^2)) + 4\gamma^2\omega^2)^{1/2}$
  - Фаза
    $\mathrm{tg}\ \varphi = 2\gamma\omega/(\omega_0^2 - \omega^2)$
- В резонансе (при малых γ)
  $B_{max} \approx B(\omega_0) = f/2\gamma\omega_0 \Rightarrow B_{max}/B_{стат} = \omega_0/2\gamma = Q$
- Вблизи резонанса:
  $B = B_{max}\gamma/((\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2)^{1/2} \Rightarrow$ ширина резонансной кривой $\Delta\omega = 2\gamma$

Параметрический резонанс

- Параметрический резонанс - возбуждение незатухающих колебаний периодическим изменением параметров колебательной системы
- Пример: маятник с изменяющейся длиной (качели)

1. Работа против тяжести:
   $A_1 = mg\Delta h(1 - \cos\varphi_0) \approx ½\, mg\Delta h\varphi_0^2 = ½\, mv_0^2\, \Delta h/L$
2. Работа против центробежной силы:
   $A_2 = mv_0^2\Delta h/L$
3. приращение энергии за период:
   $\Delta E = 2(A_1 + A_2) = 6\, \Delta h/L\, mv_0^2/2$
4. $dE/dt = 6\, \Delta h/L\, E/T = E/\tau \Rightarrow E = E_0 e^{t/\tau}$